...मंत्री अपने-अपने क्षेत्र में जाकर
...भी देते हैं लेकिन भोपाल की
...देखकर ऐसा लगा जैसे यहां
...हावी है : मंत्रियों की घोषणाओं
...होता देखा जा रहा है। प्रदेश की
...णाओं की सरकार ही रह गयी
...कांग्रेस (तिवारी) के कार्यकारी
...सिंह स्थानीय हेलीपैड मैदान में

और आम प्रतिक्रिया थी कि एन. सी. एल. में कार्यरत एक वर्ग विशेष के कतिपय अधिकारियों द्वारा उक्त कार्यक्रम को आवश्यकता से कहीं अधिक महत्व दिया गया। श्री सिंह को सुनने आये अनेक लोगों ने असामान्य सुरक्षा व्यवस्था पर भी टिप्पणी की। दर्शक दीर्घा में बैठे एक आदिवासी शिवप्रसाद सिंह ने बताया कि भाठ क्षेत्र के अनेक गांवों से मुख्यमंत्री के आगमन की जानकारी देकर ट्रकों और बसों में उन्हें भरकर यहां लाया गया है तथा उसी के गांव के लगभग ८० लोग वहां लाये गये हैं।

...श समाचार

...बोधित करते रहे थे। उल्लेखनीय है ... लगभग एक दशक के बाद आये ...कॉप्टर से उतरकर पहले एन. सी. ...शिष्ट विश्राम गृह गये जहां कुछ ...नका स्वागत किया।

...सांसद के साथ ही साथ पार्टी के ...मुख नेता श्री चिंतामणि तिवारी, ...दि के इस कार्यक्रम में शामिल न ...ह की चर्चाएं चल रही थी जबकि ...कर आश्वस्त करना चाहा कि वे ...के गृहग्राम जा रहे हैं अत: वे

आमसभा को संबोधित करते हुए श्री अर्जुन सिंह ने आम मतदाताओं का आभार व्यक्त करते हुए स्थानीय विरोधाभास को भुलाकर यहां की प्रगति और खुशहाली की दिशा में सोचने तथा कार्य करने का आग्रह किया। श्री सिंह ने पार्टी कार्यकर्ताओं को एक मंत्री द्वारा कार्य करने का आग्रह किया। श्री सिंह ने पार्टी कार्यकर्ताओं को एक मंत्री द्वारा कथित रुप से इमारती लकड़ी की विभागीय अधिकारियों की मिलीभगत से अवैध कटाई कराने के विरुद्ध मोर्चा खोलकर विरोध करने को कहा।

...ना जोड़ने गये युवक की मौत

...प्र.)। स्थानीय सर्किट हाउस रोड ...सीय ...त्रि में अपने संबंधी के ...र चढ़ कर डिश एन्टीना का तार ...की ऊपर से गुजरी हाई वोल्टेज ...गये।

दिन पूर्व उसके मन में ऊपर से गुजर रहे डिश एन्टीना का तार जोड़कर कार्यक्रमों का लुत्फ उठाना चाह रहा था कि ऊपर से गुजरी ३३ हजार वोल्ट करेंट की तारों ने उसे अपनी ओर खींच लिया।

बताया जाता है कि घटनास्थल पर ही उसकी ... से अब ... लेकिन ... हुयी है। ... और दो ... मिलने ... यी और

12.3

होकर लौट आये।

पुत्री की असामयिक मृत्यु से दुखी पिता न्याय की उम्मीद में दर-दर भटकता रहा और अंत में उसने जिला पुलिस प्रमुख का दरवाजा खटखटाया जहां से उसे न्याय प्रदान करने का आश्वासन प्राप्त हुआ।

इस घटना के पीछे हकीकत चाहे जो भी हो किन्तु पुत्री की असामयिक मृत्यु से पिता की द्रवित होना स्वाभाविक है और दुखी पिता की भावनाओं को समझते हुए उसके द्वारा पुत्री की मृत्यु के लिए जिम्मेदार ठहराये गये लोगों के विरुद्ध रिपोर्ट दर्ज करके पुलिस द्वारा मामले की छानबीन की जानी चाहिए, तभी इस तरह के मामलों के पीछे की वास्तविकता का पता लगाया जा सकेगा और दोनों पक्षों को न्याय मिल सकेगा।

❑बलिया समाचार

साक्षरता के लिए सांस्कृतिक कार्यक्रम आयोजित किये जायेंगे

बलिया (नि.प्र.)। जिलाधिकारी के निर्देशानुसार सूचना एवं जनसम्पर्क विभाग बलिया द्वारा मनाये जा रहे साक्षरता जागरुकता पखवारा के अन्तर्गत साक्षरता कार्यक्रम के लिए अनुकूल वातावरण सृजन हेतु सांस्कृतिक कार्यक्रम आयोजित किये जायेंगे।

इस आयोजन क्रम में १२ जून से १५ जून तक विभाग के अनुबंधित कलाकार रामभवन एवं उनके साथियों द्वारा सांस्कृतिक कार्यक्रम प्रस्तुत किये जायेंगे। ये कार्यक्रम संबंधित खंड विकास अधिकारियों के मार्गदर्शन में सम्पन्न होंगे।

चिकित्सकों की कमी से परेशानी

नरही (बलिया) (नि.प्र.)। सामुदायिक स्वास्थ्य केन्द्र नरही की एक्सरे मशीन खराब होने तथ डाक्टरों के अभाव के कारण काफी कठिनाइयों का सामना करना पड़ रहा है।

प्रभारी चिकित्सक की नियुक्ति न होने से ये...

...दशा में मौत

...ग्राम ...१० वर्षीय ...मृत्यु हो जाने ...पुत्री को दहेज हत्या ...विवाहिता के पिता श्री ...स अधीक्षक आजमगढ़ के ...लगायी है।

...ण अनुसार अम्बेकर नगर जनपद ...सुल्तानपुर ना क्षेत्र के ग्राम बिजली पड़ौल ...सी हरिवंश पाण्डेय ने कर तीन वर्ष पू... ...अपनी सामर्थ्य के अनुसार रीता की शादी आजमगढ़ के रौना पार' थान क्षेत्र के ग्राम दुवौली निवासी रामचन्दर दुबे के लड़के के साथ की। तत्पश्चात रस्मो रिवाज के मुताबिक इस वर्ष २८ फरवरी को रीता का गौना हुआ।

इस बीच हरिवंश पाण्डेय ...अनुसार लड़... वालों की ओर से स्कूटर की मांग की जाती रही। इसी वर्ष रीता के भाई का गौना ५ अप्रैल को तय हो गया, रीता के पिता उसे लिवाने के लिए उसके घर गये, किन्तु ससुराल...

...ने से इंकार कर दिया। पिता ने कुछ ...लेकर इस मांग को पूरा कर देने का ...सहते हुए रीता की विदाई के लिए काफी ...अनुनय की बावजूद इसके रीता की विदाई ...पाये।

...इन की अनुपस्थिति में ही भाई का गौना तो ...न्न हो गया, लेकिन पिता के दिल पर पुत्री की ...मृत्यु की खबर के बाद वज्रपात सा हो गया।

इस घटना का सबसे सशंकित पहलू यह है कि रीता की मृत्यु की खबर उसके मायके वालों को नहीं दी गयी और शव का अंतिम संस्कार भी कर दिया गया। मृतका के पिता ने बताया कि १७ मई को अन्य रिश्तेदारों के द्वारा उन्हें सूचना दी गयी कि रामचंदर दुबे की तबियत काफी खराब है और वह आपसे भेंट करना चाहते हैं। इस खबर के बाद हरिवंश पाण्डेय मृतका के गांव दुवौली पहुंचे जहां उन्हें यह सूचना मिली कि १६ मई की रात नौ बजे रीता की तबियत अचानक खराब हुयी और उसकी मृत्यु हो गयी तथा शव का दाह संस्कार भी कर दिया

...पहुंचायी ...ब्लाक से ...दो इंदिरा ...वालों को ...के पैसों

सरल बीजगणित

अध्यापक कालीपद बसु द्वारा रचित

सरल बीजगणित

ALGEBRA MADE EASY

(MATRICULATION ALGEBRA)

उर्दू, बँगला और असमीया संस्करण भी प्रकाशित हो गये हैं

आधुनिक रेखागणित

(MODERN GEOMETRY)

हिन्दी संस्करण प्रकाशित हो गये हैं

(७ वीं से १० वीं कक्षा तक पाठ्य)

बंगाल गवर्नमेंट शिक्षाविभाग-द्वारा बंगदेश के उच्च अंगरेज़ी स्कूलों की ७ वीं, ८ वीं, ९ वीं व १० वीं कक्षाओं के लिए इसका बँगला सं० अनुमोदित (कल० गज़ट, ता० २६।१२।३७)

सरल बीजगणित

ALGEBRA MADE EASY

(MATRICULATION ALGEBRA)

हिन्दी-संस्करण

(७ वीं से १० वीं कक्षा तक में पाठ्य)

ढाका कालिज के गणित के भूतपूर्व अध्यापक

तथा

"अल्जेब्रा मेड ईज़ी", "माडर्न जिओमेट्री", "इन्टरमीडियेट अलजेब्रा", "इन्टरमीडियेट सालिड जिओमेट्री" आदि के लेखक

अध्यापक कालीपद बसु, एम० ए०

द्वारा रचित

के० पी० बसु लाइब्रेरी

११, महेन्द्र गोस्वामी लेन, कलकत्ता

अनुवादक

अध्यापक यतीन्द्रनाथ सेन

वाइस-प्रिन्सिपल, कायस्थ-पाठशाला इन्टरमीडियेट कालिज

इलाहाबाद

[सप्तम संस्करण]

प्रकाशक

जे० के० बसु, बी० ए०

और

टी० बसु, बी० ए०

११, महेन्द्र गोस्वामी लेन, कलकत्ता

मुद्रक—श्रीत्रिदिवेश बसु, बी० ए०

के० पी० बसु प्रिंटिंग वर्क्स, ११, महेन्द्र गोस्वामी लेन, कलकत्ता

अनुवादक के दो शब्द

अत्यन्त हर्ष और सन्तोष का विषय है कि हमारी शिक्षा-प्रणाली में देशी भाषाएं शीघ्रता से अपना उचित स्थान प्राप्त कर रही हैं। संयुक्त-प्रान्त आगरा और अवध के हाई-स्कूल और इन्टरमीडिएट बोर्ड तथा पटना-विश्वविद्यालय के नवीन नियमों के अनुसार सन् १९४२ ई० से होनेवाली परीक्षाओं के लिए जो विद्यार्थी बैठेंगे उन्हें गणित के प्रश्नों के उत्तर भी हिन्दी या उर्दू ही में देने होंगे। इसलिए के० पी० बसु रचित **ALGEBRA MADE EASY for Matriculation Students** का यह हिन्दी अनुवाद प्रकाशित करने के यथेष्ट कारण हैं। गत ५० वर्षों में बीजगणित की शायद ही कोई दूसरी पुस्तक भारतीय शिक्षकों और छात्रों में इतनी आदर से देखी जाती न हो, जितनी बसु महोदय की रचना। वे सभी विशेषतायें जिनके कारण मूल ग्रन्थ उपयोगी और सर्वप्रिय सिद्ध हुआ है इस हिन्दी संस्करण में ज्यों की त्यों क़ायम रक्खी गई हैं। फलतः मूल ग्रन्थ के सभी प्रश्न अपने अपने स्थान पर आ गये हैं और किसी प्रकार के परिवर्तन करने का व्यर्थ प्रयास नहीं किया गया है। अँगरेज़ी संस्करण की भाँति इस पुस्तक की भाषा भी आदि से अन्त तक सरल रक्खी गई है।

पटना-विश्वविद्यालय में मैट्रिकुलेशन के कुछ परीक्षार्थी बीजगणित के कुछ अतिरिक्त विषयों (**Additional Course**) की भी परीक्षा देते हैं। चूँकि इन विषयों से साधारण विद्यार्थी का कोई सम्बन्ध नहीं है इसलिए उक्त विषयों पर एक दूसरी पुस्तक प्रकाशित की जायगी।

शिक्षा सम्बन्धी परिवर्तनों के इस प्रारम्भिक काल में पारिभाषिक शब्दों के चुनाव में अत्यन्त सतर्क रहने की ज़रूरत है। इसलिए बीजगणित के अँगरेज़ी शब्दों के प्रामाणिक हिन्दी पारिभाषिक शब्द काशी-हिन्दू-विश्वविद्यालय के भौतिक विज्ञान के अध्यापक श्री निहालकरण सेठी डी० एस-सी०-द्वारा संकलित तथा (नागरी-प्रचारिणी सभा की पारिभाषिक शब्द-कमिटी-द्वारा स्वीकृत) "हिन्दी वैज्ञानिक शब्दावली, गणित विभाग" से लिये गये हैं।

जनवरी, १९३९

अनुवादक

यतीन्द्रनाथ सेन

सूचीपत्र

विषय पृष्ठांक

पाँचवाँ अध्याय

सरल समीकरण

(Simple Equation)

छठा अध्याय

एकघात एकवर्ण समीकरण सम्बन्धी प्रश्नावली

(Problems leading to Simple Equation)

सातवाँ अध्याय

विन्दु अंकित करना (Plotting of Points)

रेखाचित्र (Graphs)

आठवाँ अध्याय

कठिन ज़ोड़ व बाक़ी

(Harder Addition and Subtraction)

नवाँ अध्याय

कठिन गुणन (Harder Multiplication)

विषय पृष्ठांक

दसवाँ अध्याय

कठिन भाग (Harder Division)

ग्यारहवाँ अध्याय

बीजगणितीय सूत्र और उनको रेखागणित द्वारा प्रकट करना

(Formulæ and their geometrical representation)

बारहवाँ अध्याय

सरल गुणनखंडीकरण (Simple Factorisation)

तेरहवाँ अध्याय

सरल तादात्म्य (Easy Identities)

चौदहवाँ अध्याय

महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factors)

पन्द्रहवाँ अध्याय

लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

विषय पृष्ठांक

सोलहवाँ अध्याय

सरल भिन्न (Easy Fractions)

सत्रहवाँ अध्याय

सरल समीकरण और प्रश्न (Simple Equations and Problems)

अठारहवाँ अध्याय

सरल युगपत् समीकरण (Simultaneous Equations) और उसकी प्रश्नावली (Problems)

उन्नीसवाँ अध्याय

सरल समीकरणों के रेखाचित्र (Graphs of Simple Equations)

बीसवाँ अध्याय

सहज वर्गसमीकरण और प्रश्न (Easy Quadratic Equations and Problems)

विषय पृष्ठांक

इक्कीसवाँ अध्याय

कठिन सूत्रावली (Harder Formulæ)

बाईसवाँ अध्याय

कठिन गुणनखंड और तादात्म्य (Harder Factors and Identities)

तेईसवाँ अध्याय

शेषफल नियम (Remainder Theorem) और विभाज्यता (Divisibility)

चौबीसवाँ अध्याय

कठिन म० स० अ० और ल० स० अ० (Harder H. C. F. and L. C. M.)

विषय पृष्ठांक

पचीसवाँ अध्याय

कठिन भिन्न (Harder Fractions)

छब्बीसवाँ अध्याय

सरल समीकरण और प्रश्न

(Simple Equations and Problems)

सत्ताईसवाँ अध्याय

कठिन युगपत् समीकरण (Harder Simultaneous Equations) और प्रश्नावली (Problems)

विषय पृष्ठांक

अट्ठाईसवाँ अध्याय

रेखाचित्र और उसका प्रयोग

(Graphs and Their Applications)

उनतीसवाँ अध्याय

घातांक नियम (Laws of Indices)

तीसवाँ अध्याय

घातमूल क्रिया (Evolution)

वर्गमूल और घनमूल (Square and Cube Roots) निकालना

इकतीसवाँ अध्याय

निष्पत्ति व अनुपात (Ratio and Proportion)

सरल बीजगणित

भूमिका

1. चीज़ों की ठीक माप करना, और उसे संख्या-द्वारा प्रकट करना निम्नलिखित उदाहरणों से अच्छी तरह समझाया जा सकता है :—

(1) किसी कपड़े के टुकड़े की लम्बाई मालूम करने के लिए हम यह देखते हैं कि एक छोटी लम्बाई, जैसे हाथ, उस कपड़े की लम्बाई में कितनी बार शामिल है।

(2) इलाहाबाद से कानपुर तक की दूरी मालूम करने के लिए जानना पड़ता है कि एक छोटा फ़ासला, जिसे मील कहते हैं, इसमें कितनी बार शामिल है।

(3) किसी रक़म की जमा तभी मालूम पड़ती है जब यह पता लगता है कि एक छोटी रक़म, जिसे रुपया कहते हैं, उसमें कितनी बार शामिल है।

(4) एक बोरा चावल का वज़न मालूम करने के लिए उससे एक छोटा वज़न जिसे सेर कहते हैं उसमें कितनी बार शामिल है, यह जानना पड़ता है।

ऊपर दिये उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है, कि जो संख्या यह बतलाय कि किसी वस्तु में उसी पदार्थ का एक छोटा परिमाण कितनी बार शामिल है, उस संख्या के द्वारा उस पूर्ण वस्तु के परिमाण का निर्णय होता है। इस छोटे परिमाण को **इकाई (unit)** और वह पूरी वस्तु में कितनी बार शामिल है, यह जतानेवाली संख्या को उस पूरी वस्तु की **संख्यात्मक माप (numerical measure)** या केवल **माप** अथवा **परिमाण (measure)** कहते हैं।

और यदि, हमें यह बात मालूम हो कि किसी कपड़े की लम्बाई 10 हाथ, या कानपुर से इलाहाबाद की दूरी 120 मील, या किसी रक़म की जमा 500 रुपये, या एक बोरे चावल का वज़न 25 सेर है, तो हाथ की इकाई के हिसाब से कपड़े की लम्बाई का माप है 10; मील की इकाई के हिसाब से कानपुर से इलाहाबाद के फ़ासले की माप है 120; रुपये की इकाई के हिसाब से रक़म की कुल जमा की माप है 500; और सेर की इकाई के हिसाब से चावल के वज़न की संख्या है 25.

किसी वस्तु में उसी पदार्थ की कोई इकाई कितनी दफ़ा शामिल है, यह जतानेवाली संख्या के द्वारा उस वस्तु का परिमाण बताया जाता है, इसी कारण ऊपर दिये गये उदाहरणों से कपड़े की लम्बाई 10 द्वारा, कानपुर से इलाहाबाद का फ़ासला 120 द्वारा, रक़म की जमा 500 द्वारा और चावल के वज़न की संख्या 25 द्वारा प्रकट की गयी है।

टीका 1. 'पाउंड की इकाई में सिक्के का परिमाण 30 है,' 'मील की इकाई में फ़ासले को माप 25 है', इत्यादि वाक्यों द्वारा यह मालूम होता है कि एक पाउंड को इकाई मानने से किसी रक़म की संख्यात्मक माप 30 है [अर्थात् पाउंड की इकाई उस रक़म में 30 बार शामिल है, या मील को इकाई मानने से किसी फ़ासले की माप 25 है अर्थात् फ़ासले के अन्दर मील की इकाई 25 बार शामिल है]।

टीका 2. यह साफ तौरपर समझ लेना चाहिए कि एक ही वस्तु उसी भाँति की भिन्न भिन्न इकाई मानने से भिन्न भिन्न संख्याओं द्वारा प्रकट की जा सकती है। जैसे, 'एक फ़ुट' को इकाई मानकर 10 फ़ुट की लम्बाई को 10 द्वारा प्रकट करेंगे, किन्तु दो फ़ुट की लम्बाई को इकाई मानने से वही 10 फ़ुट लम्बाई 5 द्वारा प्रकट होगी।

उदाहरण 1. लम्बाई की इकाई एक फ़ुट होने से 5 गज़ 2 फ़ुट की लम्बाई का परिमाण कितना होगा ?

5 गज़ 2 फ़ुट अर्थात् 17 फ़ुट के अन्दर लम्बाई की इकाई [अर्थात् एक फ़ुट] 17 बार शामिल है।

इसलिए 5 गज़ 2 फ़ुट की माप = 17 हुई।

उदाहरण 2. डेढ़ मिनट समय यदि 30 द्वारा प्रकट किया जाय तो समय की इकाई कितनी मानी गई है ?

डेढ़ मिनट = 90 सेकंड

इस कारण मालूम होता है कि 90 सेकंड के अन्दर समय की इकाई 30 बार सम्मिलित है, अर्थात् 30 समय की इकाइयाँ मिलकर 90 सेकंड के बराबर हैं।

इसलिए समय की इकाई = 90 सेकंड का $\frac{1}{30}$ भाग, अर्थात् 3 सेकंड।

प्रश्नमाला 1

1. यदि वज़न की इकाई एक सेर हो तो 2 मन 20 सेर का परिमाण कितना होगा ?
2. 10 सेर को इकाई मानकर 2 मन 20 सेर का परिमाण निकालो।
3. यदि 360 मील के फ़ासले को 30 संख्या द्वारा प्रकट किया जाय तो फ़ासले की इकाई कितनी होगी ?

4. वही दूरी यदि 45 संख्या द्वारा प्रकट की जाय तो फ़ासले की इकाई कितनी होगी ?

5. यदि 400 रुपये 16 संख्या द्वारा प्रकट किये जायं तो 225 रुपयों का परिमाण कितना होगा ?

6. 7 फ़ुट 4 इंच की लम्बाई यदि 22 द्वारा प्रकट की जाय तो 4 फ़ुट की लम्बाई संख्या में बताओ।

7. 3 घंटे 45 मिनट का समय यदि 5 द्वारा प्रकट किया जाय तो समय की इकाई बतलाओ।

8. समय की इकाई यदि 15 सेकंड मानी जाय तो 60 संख्या द्वारा कितने समय का ज्ञान होगा ?

9. वज़न की इकाई यदि साढ़े सात पाउंड हो तो $2\frac{1}{7}$ हंड्रेडवेट गेहूँ का वज़न किस संख्या द्वारा प्रकट किया जायगा ?

10. यदि क्षेत्रफल की इकाई 8 वर्गफ़ुट हो तो 18 वर्गइंच का क्षेत्रफल कितना होगा और 18 वर्गगज़ का क्षेत्रफल कितना होगा ?

11. 125 वर्गफ़ुट क्षेत्रफलवाले खेत को यदि $8\frac{1}{3}$ द्वारा प्रकट किया जाय तो क्षेत्रफल की इकाई के तिगुने खेत का क्षेत्रफल कितना होगा ?

12. सिक्के की इकाई कितनी हो यदि 10 पाउ० 2 शि० 6 पें० को 27 द्वारा प्रकट करें ?

13. यदि सिक्के की इकाई 7 शि० 8 पें० हो तो 7 पाउ० 13 शि० 4 पें० रक़म का परिमाण क्या होगा ?

14. सिक्के की इकाई यदि 5 रु० 11 आ० 2 पा० हो तो 51 रु० 4 आ० 6 पा० का परिमाण क्या होगा ?

15. यदि वज़न की इकाई 23 सेर 5 छटांक हो तो 16 मन $12\frac{3}{4}$ सेर का परिमाण कितना होगा ?

16. यदि 20 रुपये 10 आ० को $5\frac{1}{3}$ द्वारा प्रकट करें तो 45 रुपये का परिमाण क्या होगा, जब कि इकाई पहले की इकाई की तिगुनी हो ?

17. '9 हंड्रेडवेट 3 क्वार्टर' 273 द्वारा प्रकट करने पर वज़न की जो इकाई मानते हैं, उसके आठवें हिस्से वज़न को इकाई मानकर एक टन को किस संख्या द्वारा प्रकट करेंगे ?

18. 39 गज़ 2 फ़ुट की लम्बाई को 84 द्वारा प्रकट करने के लिए, जिस लम्बाई को इकाई मानते हैं, उसके $\frac{3}{17}$ हिस्सा लम्बाई को इकाई मानकर 75 गज़ का परिमाण कितना होगा ?

19. '26 दिन 10 घ० 26 मि०' समय को 120 द्वारा प्रकट करने पर जो इकाई बनती है, उससे 47 मि० 13 से० कम समय को इकाई मानकर एक लीप इयर (leap year) को किस संख्या द्वारा प्रकट करेंगे ?

20 यदि उक्त प्रश्न में पहली इकाई से दूसरी इकाई 6 घंटे 54 मि० 47 से० अधिक हो तो क्या जवाब होगा ?

2. राशि या मात्रा (Quantity) : कोई भी वस्तु, जो संख्या द्वारा प्रकट की जा सके, राशि या मात्रा (quantity) कहलाती है।

इसलिए समय, वज़न, रुपया, फ़ासला या दूरी आदि में से प्रत्येक को राशि कहेंगे, क्योंकि वे संख्या द्वारा प्रकट किये जाते हैं।

बीजगणित में राशि द्वारा अक्सर अभिन्न (integral) अथवा भिन्न (fractional) संख्या भी समझी जाती है।

टीका। 'राशि' और 'संख्या' दोनों शब्द एक ही अर्थ में काममें लाये जाते हैं, परन्तु उनमें भेद प्रकट करने के लिए वज़न, रुपया, दूरी आदि राशियों को अन्वित राशि (concrete quantity) और अभिन्न अथवा भिन्न संख्याओं को केवल शुद्ध राशि (abstract quantity) अथवा संख्यात्मक राशि (numerical quantity) कहते हैं।

3. अंकगणित की तरह बीजगणित भी संख्या-शास्त्र है, भेद केवल इतना ही है कि अंकगणित में संख्यायें १, २, ३ (अंगरेज़ी में 1, 2, 3) आदि द्वारा और बीजगणित में प्रायः वर्णमाला के अक्षर, यथा क, ख, ग......a, b, c......अथवा α, β, γ आदि द्वारा प्रकट की जाती है, इस लिए अंकगणित के नियम बीजगणित में पूर्ण रूप से काममें लाये जा सकते हैं।

टीका। प्राचीन काल के हिन्दुओं ने अंकगणित की तरह बीजगणित में भी बहुत सी नई बातें निकालकर इसकी उन्नति की थी। उनके काममें लाये हुए बहुत से पारिभाषिक शब्द आधुनिक बीजगणित में भी हमेशा काममें आते हैं। हिन्दुओं से अरब के विद्वानों ने बीजगणित सीखा और उन्होंने उसका "अल-जबर-उल-मुक़ाबला" नाम रखा। अरब से यह शास्त्र योरप पहुँचा और वहाँ एलजेब्रा (Algebra) कहलाने लगा। इस समय इसका यही नाम चल पड़ा है।

पहला अध्याय

चिह्न (Sign) : संकेत (Symbol)

4. **चिह्न (Sign) : संकेत (Symbol) :** a, b, c आदि अक्षर जो कि संख्याओं के लिए इस्तेमाल होते हैं; +, −, ×, ÷ आदि चिह्न जिनके द्वारा गणित की क्रिया बतलाई जाती है; और ∵, ∴, =, ... आदि संक्षिप्त संकेतों (abbreviations) को बीजगणित के संकेत (algebraical symbols) कहते हैं।

क्रियासूचक चिह्नों (symbols of operation) और संक्षिप्त संकेतों (symbols of abbreviation) में भेद करने के लिए अक्षरों को बीज अथवा राशि या मात्रा-संकेत (symbols of quantity) कहते हैं।

5. **जोड़-, संकलन या योगचिह्न (Plus sign) :** '+' ऐसे चिह्न को 'धन', कहते हैं, और यह यदि किसी संख्या के पहले रक्खा जाय तो यह समझना चाहिए कि इस संख्या को उससे पहली संख्या के साथ जोड़ना होगा। यथा, $a+b$ द्वारा यह समझा जाता है कि b द्वारा जो संख्या सूचित होती है वह a द्वारा सूचित संख्या के साथ जोड़ी जायगी, इसलिए यदि $a=5$ और $b=3$ हो, तो $a+b=8$ होगा। और '$a+b+c$' यह बतलाता है कि b द्वारा सूचित संख्या को a द्वारा सूचित संख्या के साथ जोड़कर योगफल को c द्वारा सूचित संख्या के साथ जोड़ना होगा। यदि a, b, c का मान 5, 3 व 2 हो तो $a+b+c=10$ होगा।

6. **घटाने का चिह्न (Minus sign) :** '−' इस चिह्न को ऋण कहते हैं। यह किसी संख्या के पहले रक्खा जाय तो उससे यह सूचित होता है कि इस संख्या को उसके पूर्व की संख्या से घटाना होगा। जैसे '$a-b$' द्वारा सूचित होता है कि b द्वारा सूचित संख्या को a द्वारा सूचित संख्या से घटाना होगा। इसलिए यदि $a=8$ और $b=3$ हो तो $a-b=5$. $a-b-c$ से मालूम होता है कि, b से जो संख्या जानी जाती है उसे a से जो संख्या मालूम होती है वह घटाकर, जो अंतरफल निकले उस से c द्वारा सूचित संख्या को घटाना होगा। जैसे, a, b, c का मूल्य यदि क्रमशः 8, 3, 1 हो तो '$a-b-c$' का मूल्य 4 होगा।

टीका। यदि कई संख्यायें धन या ऋण चिह्न द्वारा सम्बन्धित हों तो बाईं ओर से आरम्भ करके चिह्न द्वारा सूचित हिसाब करते हुए दायें को चलना होगा। जैसे, $a-b+c$ द्वारा सूचित होता है कि पहले b द्वारा सूचित संख्या को a द्वारा सूचित संख्या में से घटाकर जो बाक़ी बचे उसके साथ c द्वारा सूचित संख्या को जोड़ना होगा।

7. **द्वि-अर्थक-चिह्न (Ambiguous Sign)** अथवा धन या ऋण चिह्न (sign plus or minus) : '$\pm$' इस चिह्न को दुमानी चिह्न कहते हैं, और यदि यह चिह्न किसी संख्या से पहले रक्खा जाय तो उससे यही सूचित होता है, कि यह संख्या उसकी पूर्व संख्या के साथ या तो जोड़ी जायगी या उसमें से घटाई जायगी। जैसे, यदि a और b का मान 7 और 2 हो तो $a \pm b$ से या तो 9 या 5 सूचित होगा।

8. **भेद चिह्न (Sign of Difference)** : '$\sim$' इस चिह्न को भेद चिह्न कहते हैं, और यदि यह चिह्न दो संख्याओं के बीच रक्खा जाय तो इससे यह सूचित होता है कि इन दो संख्याओं में से जो संख्या बड़ी है, उसमें से दूसरी संख्या को जो कि छोटी है घटाना होगा। इसलिए यदि a और b का मान 5 और 8 हो तो $a \sim b$ का मान 3 होगा।

9. **गुणन चिह्न (Sign of Multiplication)** : '$\times$' चिह्न को गुणन चिह्न कहते हैं और दो राशियों के बीच में रक्खे जाने पर सूचित होता है कि इस चिह्न की दाहिनी ओर की राशि से बाईं ओर की राशि को गुणन करना होगा। जैसे $a \times b$ द्वारा सूचित होता है कि b द्वारा सूचित राशि से a द्वारा सूचित राशि को गुणना होगा; इसलिए a और b का मूल्य यदि 5 और 3 हो, तो '$a \times b$' द्वारा $5 \times 3 = 15$ सूचित होगा।

गुणन चिह्न द्वारा मिलित यदि दोनों संख्यायें ऐसी हों कि (1) इनमें से दोनों अक्षर द्वारा सूचित हों, (2) अथवा पहली राशि अंक द्वारा और दूसरी राशि अक्षर द्वारा प्रकट की जाय तो इन दोनों हालतों में गुणन चिह्न अक्सर उड़ा दिया जाता है, यथा '$a \times b$' के लिए 'ab', और '$4 \times a$' के लिए '$4a$', लिखा जाता है। ध्यान देने की बात है कि '8×8' के लिए 88 नहीं लिखा जा सकता, कारण अंकगणित के अनुसार $88 =$ '$80 + 8$'.

कभी कभी गुणन चिह्न की बजाय एक विन्दु (.) रख देते हैं। जैसे $a \times b$, 5×4 के लिए $a.b$, और 5.4 लिखते हैं। दशमलव बिन्दु (decimal point) से इसका भेद प्रकट करने के लिए यह कुछ नीचे लिखा जाता है, और दशमलव विन्दु कुछ ऊपर लिखा जाता है; जैसे '5.4' से मतलब है 5×4 अर्थात् 4×5 गुणा; लेकिन '5·4' पांच दशमलव 4 है।

10. **भाग का चिह्न (Sign of Division)** : '$\div$' इसको भाग का चिह्न कहते हैं, और यह चिह्न यदि दो अंकों के बीच में रक्खा जाय तो यह सूचित करेगा कि बाईं ओर लिखे हुए अंक को दाहिने ओर के अंक से भाग देना होगा। जैसे '$a \div b$' द्वारा सूचित होता है कि 'a' द्वारा सूचित अंक में 'b' द्वारा सूचित अंक का भाग देना होगा। और '$a \div b \div c$' द्वारा सूचित होता है कि a द्वारा सूचित अंक को b द्वारा सूचित अंक द्वारा भाग करके भजनफल में c द्वारा सूचित अंक का भाग देना होगा।

टीका। यदि कई अंक गुणन व भाग के चिह्न द्वारा एक दूसरे से मिले हों तो बाईं ओर से आरम्भ करके चिह्न द्वारा सूचित क्रिया क्रमशः करनी होगी। जैसे '$a \times b \div c$' में पहले a द्वारा सूचित अंक को b द्वारा सूचित अंक से गुणा करके गुणनफल में c द्वारा सूचित राशि का भाग देंगे। इसी प्रकार '$a \div b \times c$' में पहले a द्वारा सूचित राशि में b द्वारा सूचित राशि का भाग देंगे और भजनफल को c द्वारा सूचित राशि से गुणा करेंगे। '$a \div b$' को प्रायः $\frac{a}{b}$ ऐसे भी लिखा जाता है, इसलिए '$a \div b$' और $\frac{a}{b}$ इन दोनों का अर्थ एक ही है।

11. व्यंजक अथवा राशिमाला (Expression) : पद (Term) : गणित के क्रियाचिह्न, अक्षर अथवा अंकसमूह का चाहे जैसा भी सार्थक संग्रह हो, उसे बीजगणितीय व्यंजक अथवा बीजगणितीय राशिमाला (algebraical expression) कहते हैं। कभी कभी इसे सिर्फ राशि कहते हैं।

राशि के जो जो अंश धन (+) अथवा ऋण (−) चिह्न द्वारा एक दूसरे से जुड़े हों उनमें से प्रत्येक अंश को पद (term) कहते हैं। जैसे '$5a + ab \div c \times d - 8c \times f \div g$' व्यंजक में $5a$, $ab \div c \times d$ और $8c \times f \div g$ ये तीन पद हैं।

व्यंजक दो प्रकार के हैं, सरल (simple) व मिश्र (compound)। जिस व्यंजक में केवल एक ही पद हो (अर्थात् जिसमें कोई अंश '+' या '−' चिह्न द्वारा जुड़ा न हो) उसको एकपद (monomial) या सरल राशि कहते हैं, जैसे, $3ab$, $5cd \div e$। जिस व्यंजक में एक से अधिक पद हों उसको मिश्रव्यंजक कहते हैं। जिस व्यंजक में दो पद हों उसको द्विपदी (binomial), जैसे $2a + 3b$; जिसमें तीन पद हों उसे त्रिपदी (trinomial), जैसे $a + bc + 8efg$; और तीन से अधिक पदवाले व्यंजक को बहुपदी व्यंजक (polynomial or multinomial) कहते हैं।

12. बराबरी का चिह्न (Sign of equality) : '=' ऐसे चिह्न को समानता का चिह्न कहते हैं। किसी दो राशि के बीच में यह चिह्न रहने से यह जाना जाता है कि दोनों राशियां एक दूसरे के बराबर हैं। जैसे $b + c = a$ (b और c का जोड़ बराबर है a के, इससे यह सूचित होता है कि b व c द्वारा सूचित संख्याओं का योगफल a द्वारा सूचित संख्या के बराबर है)।

उदाहरण

टीका 1. '$a \div b \times c$' और '$a \div bc$' इन दो राशियों का फर्क जानना चाहिए। पहली राशि यह प्रकट करती है कि a द्वारा सूचित संख्या को b द्वारा सूचित संख्या से भाग देकर भजनफल को c द्वारा सूचित संख्या से गुणा करना होगा। दूसरी राशि द्वारा यह सूचित होता है कि b व c द्वारा सूचित दोनों संख्याओं को गुणा करके गुणनफल से a द्वारा

सूचित संख्या को भाग करना होगा। इसलिए यह देखा जाता है कि अनेक संख्याओं के बीच में यदि गुणन चिह्न न दिया हो तो उन संख्याओं को एक ही संख्या समझना चाहिए।

टीका 2. यदि किसी व्यंजक का मूल्य निकालना हो तो उसके अन्दर जितने भिन्न भिन्न पद हैं उन प्रत्येक पद (term) का मूल्य 10 वें नियम की टीकानुसार निकालकर तब 6 ठे नियम की टीकानुसार सारे संयुक्त पद का मूल्य निकालना होगा। जैसे '$a \times b - c \div d \times e + f \times g$' इस संयुक्त पद का मूल्य निकालना हो तो पहले $a \times b$, $c \div d \times e$, $f \times g$ इन तीन पदों का मूल्य निकालना होगा, फिर पहले पद के मूल्य से दूसरे पद के मूल्य को घटाकर जो बाक़ी बचे उसके साथ तीसरे पद को जोड़ना होगा।

ऊपर दिये हुये नियमों को नीचे हल किये उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 1. यदि $a=2$, $b=3$, $c=5$ हो, तो $5a+8b+7c$ का मूल्य निकालो।

$$5a = 5 \times a = 5 \times 2 = 10\ ;$$
$$8b = 8 \times b = 8 \times 3 = 24\ ;$$
$$7c = 7 \times c = 7 \times 5 = 35.$$
$$\therefore\ 5a+8b+7c = 10+24+35$$
$$= 34+35 = 69.$$

उदाहरण 2. यदि $a=8$, $b=5$, $c=2$ हो, तो $6a-5b+4c$ का मूल्य निकालो।

$$6a = 6 \times a = 6 \times 8 = 48\ ;$$
$$5b = 5 \times b = 5 \times 5 = 25\ ;$$
$$4c = 4 \times c = 4 \times 2 = 8.$$
$$\therefore\ 6a-5b+4c = 48-25+8$$
$$= 23+8 = 31.$$

उदाहरण 3. यदि $m=3$, $n=7$, $t=9$, $v=4$ हो, तो $7m \div 2n \times 8t \div 3v$ का मूल्य निकालो।

बीजगणितीय क्रिया का क्रम बाईं से दाहिनी ओर होता है, इसलिए पहले $7m$ को $2n$ से भाग देकर, भजनफल को $8t$ से गुणा करना होगा, और अंत में इस गुणनफल को $3v$ द्वारा भाग करने से मूल्य प्राप्त होगा।

अब (1) $7m \div 2n = \dfrac{7m}{2n} = \dfrac{7 \times 3}{2 \times 7} = \dfrac{3}{2}\ ;$

(2) $\frac{3}{2} \times 8t = \frac{3}{2} \times 8 \times 9 = 3 \times 4 \times 9\ ;$

(3) $3 \times 4 \times 9 \div 3v = \dfrac{3 \times 4 \times 9}{3 \times 4} = 9.$

इसलिए हिसाब का जवाब $= 9$.

उदाहरण 4. यदि $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=6,\ e=5,\ f=0$ हो, तो $abc-d\div b\times a+def+b\div a\times c-d\div bc$ का मूल्य निकालो। इस दिये हुए व्यंजक में पाँच पद हैं, $abc,\ d\div b\times a,\ def,\ b\div a\times c$ और $d\div bc$.

अब (1) $abc=a\times b\times c=1\times 2\times 3=6$;

(2) $d\div b\times a=6\div 2\times 1=3\times 1=3$;

(3) $def=d\times e\times f=6\times 5\times 0=0$;

(4) $b\div a\times c=2\div 1\times 3=2\times 3=6$;

(5) $d\div bc=\dfrac{d}{bc}=\dfrac{6}{2\times 3}=1.$

इसलिए जवाब $=6-3+0+6-1=3+6-1=8.$

प्रश्नमाला 2

यदि $a=8,\ b=2,\ c=4$ हो, तो निम्नलिखित राशियों की संख्या निकालो :

1. $b+c\times a.$
2. $a-b\times c.$
3. $a\div c\times b.$
4. $a\div cb.$
5. $a\div 3\times b.$
6. $a\div 3b.$
7. $a-c\div b.$
8. $b+a\div c.$
9. $3a-4c\div 2b.$
10. $a-c\div b+a\div c.$
11. $a\div c\div 2\times b.$
12. $a\div c\div 2b.$
13. $5a\div 2c.$
14. $5a\div 2\times c.$
15. $4bc-a\div 4\times b+c\div 2b.$
16. $80\div c\times ab\div 80\div ca\times b.$
17. $3ca\div 16b+5a\div 16\times b-a\div 2c\times c\div b\times 4.$
18. $48a\div c\div b\times 6\div 4c-3a\div 2c\div 4\times 3\div b\times 8+6b\div a\div 2\times c\div 3\times 5.$

यदि $m=2,\ n=3,\ p=4,\ q=0,\ r=7,\ s=10$ हो, तो निम्नलिखित राशियों की संख्या निकालो :

19. $8m-3p\div mn+q\times 3r+5s\div 2\times p.$
20. $s\times 6\div 5m\times 8p\div 16n.$
21. $mnr+5qs-3s\div m\div 5n+4r\div 3p\times 6m.$
22. $3\times r\div 5\times s\div 7\times p-8rs\div m\div 3\times n\div 7p+5m\div 2r\times 7.$
23. $4\times\dfrac{n-m}{p}-3\times\dfrac{p-m}{n}+2\times\dfrac{p-n}{m}.$
24. $\dfrac{11r+n}{p+q}\times 2pm+\dfrac{14s+4n+2p}{sn+2}.$
25. $\dfrac{3m+2n}{q+p}-\dfrac{4p-3n}{q+r}+\dfrac{2p+3m}{q+m}.$

13. गुणनफल (Product) : गुणनखंड (Factor) : दो अथवा दो से अधिक संख्याओं को एक के बाद एक गुणा करने से जो संख्या निकलती है उसको उन संख्याओं का गुणनफल कहते हैं, और उन संख्याओं में से प्रत्येक को उस गुणनफल का गुणनखंड कहते हैं।

जैसे $3 \times 5 \times 7 = 105$ है, इसलिए 105, '3, 5 व 7' का गुणनफल है, और 3, 5 व 7 में से प्रत्येक अंक 105 का गुणनखंड है। इसी प्रकार 3, a, b, x में से प्रत्येक राशि $3abx$ का गुणनखंड है, क्योंकि $3abx = 3 \times a \times b \times x$.

14. गुणक (Co-efficient) : किसी बीजगणितीय सरल राशि के पहले जो गुणा करनेवाला अंक या अक्षर या अंक व अक्षर दोनों रक्खे जायँ, वे उस सरल राशि के गुणक कहलाते है। जैसे $5abc$ सरल राशि में 5, abc का गुणक, '$5a$', 'bc' का गुणक; व '$5ab$', c का गुणक है।

कोई गुणक यदि केवल अंक हो उसे अंकगुणक (numerical co-efficient) कहते हैं, जैसे $5abc$ में 5 इस सरल राशि का अंकगुणक है। किन्तु गुणक यदि केवल अंक न हो तो उसे आक्षरिक गुणक (literal co-efficient) कहते हैं। जैसे $5abc$ राशि में, bc का गुणक '$5a$', अथवा c का गुणक '$5ab$' दोनों आक्षरिक गुणक हैं।

टीका। यदि किसी सरल राशि के पहले कोई अंक गुणक रूप से न हो तो '1' ही उस राशि का अंकगुणक समझना चाहिए।

15. घात (Power) : घातांक (Index or exponent) : किसी संख्या को उसी संख्या द्वारा बार बार गुणा करने से जो गुणनफल प्राप्त होता है, उसको उस संख्या का घात (power) कहते हैं। जैसे $a \times a$, $a \times a \times a$, $a \times a \times a \times a$ आदि 'a' के भिन्न भिन्न घात हैं।

'$a \times a$' को a का द्वितीय घात या वर्ग कहते हैं, और उसे a^2 लिखते हैं, '$a \times a \times a$' को a का तृतीय घात या घन कहते हैं, और उसे a^3 लिखते हैं, '$a \times a \times a \times a$' को '$a$' का चतुर्थ घात कहते हैं, और उसे a^4 लिखते हैं, आदि। इसी प्रकार '$a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots n$ बार' को a का n-घात कहते हैं और उसे a^n लिखते हैं। संख्याओं का घात लिखने के इस नियम से यह जाना जाता है, कि घात उस संख्या को कितनी बार गुणा करने से मिला है, यह प्रकट करनेवाला अंक संख्या की दाहिनी ओर छोटी लिपि में थोड़ा सा ऊपर को लिखते हैं [जैसे 'a' का द्वितीय घात '$a \times a$' के अन्दर 'a' दो मर्तबा है, इसलिए उसको a^2 लिखा जाता है]। संख्या का घात बतलानेवाले इस छोटे अंक या अक्षर को उस घात का घातांक कहते हैं। जैसे a^2, a^3, a^5, a^m घातों के 2, 3, 5, m घातांक हैं।

टीका। a^2 को a का वर्ग, a^3 को a का घन, a^4 को a का चौथा घात,......a^n को a का n-घात आदि पढ़ा जाता है। 'a' को a का पहला घात कहते हैं, इसलिए a को a^1 मानना चाहिए। जब घातांक 1 होता है, तो वह लिखा नहीं जाता।

16. गुणनफल के प्रत्येक अक्षर गुणनखंड को उसकी मात्रा (dimension) कहते हैं, और अक्षरवाले गुणनखंडों की संख्या को गुणनफल का घात (degree) कहते हैं। जैसे a^2x^5y की आठ मात्रायें हैं, कारण यह $a \times a \times x \times x \times x \times x \times x \times y$ के बराबर है, इसलिए इसका घात भी 8 है, और इसको आठ मात्रा की एक राशि कहा जायगा। इसी प्रकार $ab^2c^4d^5$ की 12 मात्रायें हैं, और यह एक 12 घात की राशि है। गुणनफलों के किसी अंकगुणक को मात्रा के रूप में नहीं माना जाता। जैसे $5ab^2c^3$ और ab^2c^3 दोनों की मात्रा 6 है और घात भी 6 है। यदि किसी बीजीय व्यंजक के भिन्न भिन्न पद भिन्न भिन्न मात्राओं के हों, तो जिस पद में मात्रायें सबसे अधिक हों उसकी मात्रा को व्यंजक का घात (degree of the expression) कहा जाता है।

17. जिस व्यंजक के सब पदों की मात्रायें एक दूसरे के बराबर है उसको समघाती (homogeneous) व्यंजक कहते हैं। जैसे $5a^3b - 7a^2bc + 8b^2c^2$ व्यंजक समघाती है, कारण इसके प्रत्येक पद की मात्रा 4 है।

18. फल (Function) : चल (Variable) : एक अथवा एक से अधिक अक्षरवाले किसी बीजीय व्यंजक अथवा पद को उस अक्षर अथवा अक्षरसमूहों का फल (Function) कहते हैं, जैसे $x^3 + 5x + 8$, x का फल है, $a^2 + ab + b^2$, a और b का फल है; $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$, a, b व c का फल है, $5a^2bcd$, a, b, c और d का फल है, आदि।

फल के अक्षर या अक्षरसमूह को चल (variable) कहते हैं। जैसे $x^2 + 5xy + y^2$ एक फल है और x और y इसके चल हैं।

उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $a = 3$ हो, तो $a^5 - 5a$ का मूल्य निकालो।

अब $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$;

और $5a = 5 \times a$

$= 5 \times 3 = 15$.

इसलिए मूल्य $= 243 - 15 = 228$.

उदाहरण 2. यदि $a=4$ हो, तो $2a^5-5a^2$ का मूल्य निकालो।

अब $2a^5=2\times a\times a\times a\times a\times a$

$=2\times4\times4\times4\times4\times4=2048$;

और $5a^2=5\times a\times a=5\times4\times4=80$.

इसलिए मूल्य $=2048-80=1968$.

उदाहरण 3. यदि $a=2, b=3, c=4, d=5$ हो, तो $\dfrac{a^5b^3d}{c^2}$ का मूल्य निकालो।

$$\text{दी हुई राशि}=\frac{a\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times d}{c\times c}$$

$$=\frac{2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times5}{4\times4}$$

$$=2\times3\times3\times3\times5=270.$$

प्रश्नमाला 3

यदि $a=8,\ b=12,\ c=4,\ m=7,\ n=6,\ x=2,\ y=3$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का हिसाब निकालो :

1. $3x^3$.
2. $7a^2+b$.
3. $2x^7-7n^2$.
4. $8cy^3-axy^2$.
5. $5c^5+3a^3$.
6. $7bx^3y^2+mn^4$.
7. a^x+c^y.
8. $9a^3b^2c^4+8n^2x^3y^2-b^2y+x$.
9. $2x^ab+a^2b^x$.
10. $3c^nx^b+a^my^3$.
11. यदि $y=8$ हो, तो $y^6-65y^4+66y^2-21y+40$ का मूल्य निकालो।
12. यदि $x=\cdot75$ हो, तो $8x^4+6x^3+11x^2+13x+29$ का मूल्य निकालो।
13. यदि $a=\frac{4}{7}$ हो, तो $15a^3-34a^4+7a-4a^2+35a^5-3$ का मूल्य निकालो।
14. यदि $m=2\cdot6$ हो, तो $23+20m+78m^5-199m^6+25m^8$ का मूल्य निकालो।
15. यदि $y=3\cdot4$ हो, तो $50y^7-51y^4+35y-563y^5-19$ का मूल्य निकालो।
16. यदि $n=1\cdot375$ हो, तो $64n^{10}-55n^4+32n^6-121n^8+64n^2-4n^5+79$ का हिसाब निकालो।

$a^3+b^3+c^3-3abc$ का मूल्य निकालो,

17. जब $a=29, b=24, c=27$.
18. जब $a=5\cdot625, b=3\cdot625, c=4\cdot625$.
19. जब $a=44\frac{3}{7}, b=51\frac{3}{7}, c=58\frac{3}{7}$.
20. जब $a=1667, b=1674, c=1659$.

19. मूल (Root) : किसी संख्या का वर्ग (square) अथवा द्वितीय घात (2nd power) यदि किसी दूसरी निश्चित संख्या 'a' के समान हो तो इस दूसरी संख्या को a का वर्गमूल (square-root) कहते हैं, और उसको $\sqrt[2]{a}$, अथवा संक्षेप में $\sqrt{a}$ लिखते हैं। जैसे $3=\sqrt{9}$ (9 का वर्गमूल है) कारण $3^2=9$.

किसी संख्या का घन (cube) अथवा तृतीय घात (3rd power) यदि किसी दूसरी निश्चित संख्या 'a' के समान हो, तो पहली संख्या को a का घनमूल कहते हैं और $\sqrt[3]{a}$, संकेत से प्रकट करते हैं।

इसी प्रकार किसी संख्या का n-घात (nth power) यदि किसी दूसरी निश्चित संख्या a के समान हो तो पहली संख्या को a का n-घातमूल कहते हैं और उसको $\sqrt[n]{a}$ इस प्रकार प्रकट करते हैं; यहाँ n एक पूर्णाङ्क है। जैसे; $2=\sqrt[5]{32}$, कारण, $2^5=32$; $3=\sqrt[4]{81}$, कारण $3^4=81$; आदि। '$\sqrt{\ }$' इस चिह्न को करणी चिह्न (radical sign) कहते हैं। यह अंगरेज़ी शब्द radix (करणी) का प्रथम अक्षर 'r' का अपभ्रंश कहा जाता है।

टीका। a के वर्गमूल $\sqrt{a}$ को 'वर्गमूल a' पढ़ते हैं।

20. कोष्ठक (Bracket) : ( ), { }, [ ] इन तीन चिह्नों को कोष्ठक कहते हैं। कोष्ठक के अन्दर के व्यंजक को कोष्ठक के बाहरवाले पदों से अलग एक ही राशि मानना पड़ता है। जैसे $(a+b)x$ द्वारा सूचित होता है कि 'x' को '$a+b$' द्वारा गुणन करना होगा, किन्तु $a+bx$ द्वारा सूचित होता है कि x को b द्वारा गुणन करके जो गुणनफल हो उसको a के साथ जोड़ देना होगा।

इसलिए, $d+(a+b)x$ एक द्विपदराशि (binomial) है, कारण इसमें d और $(a+b)x$ ये दो ही पद हैं।

इसी प्रकार $c-\{d+(a+b)x\}$ भी एक द्विपद राशि है, कारण इसमें 'c' और $d+(a+b)x$ ये दो ही पद हैं। किन्तु ये कोष्ठक यदि न रहें तो यह c, d, a और bx यह चार पदवाला व्यंजक हो जायगा।

कभी कभी किसी व्यंजक की भिन्न भिन्न राशियों को एक राशि बनाने के लिए कोष्ठक के स्थान में उन पदों के ऊपर एक लंबी रेखा खींच देते हैं। इस रेखा को 'रेखा कोष्ठक' (vinculum) कहते हैं। जैसे $a-\overline{b-c}$ और $a-(b-c)$ दोनों का एक ही मतलब है।

टीका 1. ऊपर दी हुई व्याख्या से $\sqrt{a+b}$ अथवा $\sqrt{(a+b)}$ और $\sqrt{a}+b$ का भेद मालूम करना आसान है। $\sqrt{a+b}$ और $\sqrt{(a+b)}$ द्वारा '$a+b$' का वर्गमूल सूचित होता है, किन्तु $\sqrt{a}+b$ द्वारा यह प्रकट होता है कि 'a' के वर्गमूल को

b के साथ जोड़ना होगा। इसी प्रकार $\sqrt{ab}$ और $\sqrt{(ab)}$ द्वारा 'ab' का वर्गमूल सूचित होता है, किन्तु $\sqrt{a}b$ द्वारा सूचित होता है कि 'a' के वर्गमूल द्वारा b को गुणन करना होगा।

टीका 2. ( ), { }, [ ] इन तीन प्रकार के कोष्ठकों को क्रमशः 'लघु कोष्ठक' (parentheses), 'धनु कोष्ठक' (braces) और 'गुरु कोष्ठक' (crotchets) कहते हैं।

उदाहरण

उदाहरण 1. यदि $a=2, b=4, c=9$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का हिसाब निकालो :

$$\sqrt{c}b+\sqrt{b}+5,\ \sqrt{cb}+\sqrt{(b+5)} \text{ और } \sqrt[3]{2b}+\sqrt{4a}.$$

$$\text{(i)}\ \sqrt{c}b+\sqrt{b}+5=\sqrt{9}\times4+\sqrt{4}+5$$
$$=3\times4+2+5$$
$$=12+2+5=19.$$

$$\text{(ii)}\ \sqrt{cb}+\sqrt{(b+5)}=\sqrt{9\times4}+\sqrt{(4+5)}$$
$$=\sqrt{36}+\sqrt{9}=6+3=9.$$

$$\text{(iii)}\ \sqrt[3]{2b}+\sqrt{4a}=\sqrt[3]{2\times4}+\sqrt{4\times2}$$
$$=\sqrt[3]{8}+2\times2$$
$$=2+4=6.$$

उदाहरण 2. यदि $a=3, b=5, c=8, d=12, e=20$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों की संख्या का अन्तर निकालो :

$$a\{c+b^2-a(e-d)\} \text{ और } a\{c+\overline{b^2-a}(e-d)\}.$$

$$\text{पहला व्यंजक}=3\times\{8+5^2-3\times(20-12)\}$$
$$=3\times\{8+25-3\times8\}$$
$$=3\times\{8+25-24\}=3\times9=27;$$

$$\text{और दूसरा व्यंजक}=3\times\{8+(5^2-3)\times(20-12)\}$$
$$=3\times\{8+22\times8\}$$
$$=3\times\{8+176\}=3\times184=552.$$

$$\text{इसलिए संख्या में अंतर}=552-27=525.$$

• **उदाहरण 3.** यदि $m=10, n=8, p=2, q=12, r=15$ हो, तो $[\{rm-2q-n(pq-m)\}+p]\times(r-m-p)$

और $[\{rm-2.\overline{q-n}(pq-m)\}+p]\times r-\overline{m-p}$

संख्याओं का अंतर निकालो।

पहला व्यंजक $=[\{15\times10-2\times12-8\times(2\times12-10)\}+2]\times(15-10-2)$

$=[\{150-24-8\times14\}+2]\times3=[\{126-112\}+2]\times3$

$=[14+2]\times3=7\times3=21;$

और दूसरा व्यंजक $=[\{15\times10-2\times(12-8)(2\times12-10)\}+2]\times15-(10-2)$

$=[\{150-2\times4\times14\}+2]\times15-8$

$=[\{150-112\}+2]\times15-8=[38+2]\times15-8$

$=19\times15-8=285-8=277.$

इसलिए संख्या में अंतर $=277-21=256.$

प्रश्नमाला 4

यदि $a=7,\ b=3,\ c=8,\ d=9,\ e=4,\ f=0,\ m=5,\ n=2,\ p=1$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का हिसाब निकालो :

1. $\sqrt[8]{cen}.$ 2. $\sqrt[5]{ce}.$ 3. $\sqrt[3]{cb}.$ 4. $6\sqrt[6]{b^4d}.$
5. $4\sqrt[4]{4e}.$ 6. $4\sqrt[4]{e^4}.$ 7. $2\sqrt{4c^2}.$ 8. $2\sqrt{4}c^2.$
9. $m+n\sqrt{d}.$ 10. $\overline{m+n}\sqrt{d}.$ 11. $3\sqrt{p}+c.$ 12. $3\sqrt{c+p}.$
13. $\sqrt[3]{3(c+p)}.$ 14. $3\sqrt[3]{8}(b+3c).$ 15. $3\sqrt[3]{8(b+3c)}.$
16. $f\sqrt{m}+d.$ 17. $f\sqrt{a+d}.$ 18. $3d-(2e-n).$
19. $3d-2(e-n).$ 20. $3(d-2e)-n.$ 21. $(3d-2)e-n.$
22. $(3d-2)\overline{e-n}.$ 23. $3\{d-(2e-n)\}.$ 24. $3(d-2)(e-n).$
25. $7c-(b^2-n^2).$ 26. $(7c-b)^2-n^2.$ 27. $7c-(b^2-n)^2.$
28. $7(c-b)^2-n^2.$ 29. $\{7c-(b^2-n)\}^2.$
30. $\sqrt[3]{c+3p+4e}(p+b)^3.$ 31. $\sqrt[3]{c}+3p+4e(p+b)^3.$
32. $\sqrt[3]{c}+\overline{3p+4e}(p+b)^3.$ 33. $\sqrt[3]{c}+(3p+4e)p+b^3.$
34. $\sqrt[3]{c}+3\{(p+4)ep+b^3\}.$

यदि $x=2, y=3, z=4, a=6, d=8, c=5, n=9, p=1$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का हिसाब निकालो :

35. $a(x+y)^2(a-\overline{c-z})^3.$
36. $4\{n-a(d-\overline{a+p})\}\sim4\{\overline{n-a}(d-a)+p\}.$

37. $5\{c+\overline{x^2+y}(n-\overline{d-z)}\} \sim 5\{(\overline{c+x^2}+y)\overline{n-d}-z\}$.

38. $[x+y^2\{ap-z(c-\overline{a-x})\}] \sim [\overline{x+y}^2\{(ap-z)c-a\}-x]$.

39. $\dfrac{x^x+y^y+z^z-7p^p}{3(x^2+p^2)+y^2+z^2}$.

40. $\sqrt{\left\{\dfrac{c^2+z^2+x^2}{c^2-(z^2+x^2)}-\dfrac{n(n^2-\overline{z^2+c^2})}{n^2+\overline{z^2-c^2}}\right\}}$.

21. सजातीय और विजातीय पद (Like and unlike terms) : जिन सब पदों या सरल राशियों में कोई भेद न हो अथवा केवल संख्यागुणक (numerical co-efficient) में भेद हो तो उनको सजातीय पद (like terms) कहते हैं। जैसे $3ax^2y^5$ और $5ax^2y^5$ ये दोनों पद सजातीय हैं। जो सब पद या सरल राशि सजातीय नहीं हैं उनको विजातीय पद (unlike terms) कहते हैं। जैसे $3ax^2y^5$ और $5ax^2y^4$ ये दोनों पद विजातीय हैं। इसी प्रकार abc, $5axbd$, $7a^2b^3$, c^2d^3x आदि पद विजातीय हैं।

22. 'चिह्न' शब्द का विशेष अर्थ : सम और विषम चिह्न (Like and unlike signs) : चिह्न शब्द का अर्थ तुमने चौथे और उसके बादवाले नियमों से सीखा है। किन्तु यह शब्द साधारण रूप में '+' और '−' इन दो चिह्नों को सूचित करता है। जैसे किसी पद का चिह्न क्या है यह जानने के लिए पद से पहले '+' अथवा '−' में से कौन सा चिह्न है यही देखते हैं।

यदि दो राशियों के पहले के दोनों चिह्न '+' अथवा दोनों '−' हों, तो उनको समान चिह्न कहते हैं; और यदि एक पद के पहले '+' हो और दूसरे के पहले '−' हो, तो उनको विषम (unlike) चिह्न कहते हैं। जैसे, $ax^2+bx-cy+d^2-f$ व्यंजक में पहले दूसरे और चौथे पदों के चिह्न समान हैं, और तीसरे व पाँचवें पदों के चिह्न भी समान हैं। परन्तु दूसरे और तीसरे अथवा चौथे व पाँचवें पद के चिह्न विषम हैं।

23. $>$, $<$, $\because$ और $\therefore$: '$>$' यह चिह्न यदि दो राशियों के बीच में हो तो यह जाना जाता है, कि बाईं ओर की राशि दाहिनी ओर की राशि से बड़ी है। जैसे $a+b>c+d$ द्वारा प्रकट होता है कि $a+b$ का मूल्य $c+d$ के मूल्य से अधिक है।

'$<$' चिह्न यदि दो राशियों के बीच रक्खा जाय, तो यह सूचित होता है कि बाईं ओर की राशि दाहिनी ओर की राशि से छोटी है। जैसे $a+x<b+y$ द्वारा प्रकट होता है कि $a+x$ का मूल्य $b+y$ के मूल्य से कम है।

$\because$ और $\therefore$ ये दो चिह्न "चूँकि" और "इसलिए" शब्दों के स्थानपर लिखे जाते हैं।

दूसरा अध्याय

धनसूचक व ऋणसूचक राशियां

(Positive and Negative Quantities)

24. विपरीत गुणसूचक सजातीय राशियाँ (Quantities of the same class but of opposite character) : जब हम रुपये की किसी रक़म की बात करते हैं, तो या तो लाभ हानि या लेन देनका जिक्र करते हैं। यह बात साफ है कि लाभ से असल जमा बढ़ जाती है, उसी प्रकार घाटे से असल रक़म घट जाती है। मुनाफ़े व घाटे में परस्पर ऐसा सम्बन्ध है, कि हमें पहले कुछ मुनाफ़ा हो और उसके बाद ठीक उतना ही घाटा भी हो, तो पहले जो रक़म हमारे पास थी उसमें कुछ फेरफार नहीं होता। धन और ऋण के विषय में भी यही बातें लागू होती हैं। इसलिए लाभ या धनसूचक जमा, घाटा या ऋणसूचक रक़म के बिलकुल उल्टा गुण प्रकट करती है।

किसी दिये हुए बिन्दु से उस बिन्दु से गुज़रती हुई किसी रेखा की दूरी या उसका फ़ासला मालूम करने के लिए उस दिये हुए बिन्दु से रेखा की दो तरफ में से किसी एक तरफ नाप सकते हैं। जैसे बिन्दु से पूरब या पश्चिम को अथवा उत्तर या दक्षिण को इत्यादि। यह बात स्पष्ट है कि दिये हुए बिन्दु से पूरब की तरफ को दूरी और पश्चिम की तरफ को दूरी एक दूसरे से ऐसा सम्बन्ध रखती हैं कि हम यदि दिये हुए बिन्दु से पहले पूरब को तरफ कुछ दूर जाकर और फिर वहाँ से वापस पश्चिम की तरफ ठीक उतनी ही दूर जायँ, तो हम उसी दिये हुए बिन्दु पर लौट आते हैं। इस कारण किसी रेखा पर उस रेखा के किसी बिन्दु से एक ओर की दूरी उस बिन्दु से विपरीत या उल्टी तरफ की दूरी से विपरीत गुणसूचक है।

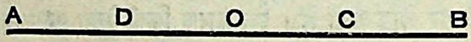
इसलिए पहले उदाहरण में रक़मों की दृष्टि से लाभ व घाटा दोनों ही समान जातीय राशियाँ हैं, परन्तु उन दोनों का हमारी पूँजी पर उल्टा फल होता है। लाभ पूँजी को बढ़ा देता है, और घाटा उसको घटा देता है; इसलिए उनको विषम गुणसूचक कहते हैं। दूसरे उदाहरण में दिये हुए बिन्दु से उत्तर की तरफ को दूरी और दक्षिण को तरफ की दूरी दोनों ही दूरियाँ हैं, इसलिए सजातीय राशियाँ हैं, किन्तु ये दूरियां दिये हुए बिन्दु के किस तरफ हैं (उत्तर या दक्षिण) इस दृष्टि से ये विपरीत या उल्टी गुणसूचक हैं।

25. धन व ऋण चिह्न का नया पहलू : भूमिका में दिखाया गया है कि किसी अन्वित परिमाण (concrete quantity) को कैसे संख्या द्वारा प्रकट किया जा सकता है; अब देखना चाहिए कि सजातीय किन्तु विपरीत गुणवाली दो राशियों को किस

रीति से प्रकट किया जा सकता है। ऐसी दो राशियों में एक के संख्यामूल्य से पहले धन-चिह्न देकर और दूसरे के संख्यामूल्य से पहले ऋण-चिह्न देकर इन दो राशियों को प्रकट किया जाता है। इन दो राशियों में से किसी एक के संख्यामूल्य से पहले '+' चिह्न दूसरे से पहले '−' चिह्न दिया जा सकता है। किन्तु किसी एक से पहले एक बार '+' चिह्न अथवा '−' चिह्न दिया गया तो, जब तक उन राशियों की बीजगणित की सब क्रियायें समाप्त न हो जायँ तब तक वही चिह्न निभाना होगा। नीचे दिये उदाहरणों द्वारा यह नियम साफ हो जायगा।

सब जानते हैं कि 'आमदनी' और 'क़र्ज़ा' विपरीत गुण प्रकट करते हैं। आमदनी बतलानेवाली संख्या से पहले यदि '+' चिह्न रक्खा जाय तो, क़र्ज़ा बतलानेवाली संख्या से पहले '−' चिह्न रखना पड़ेगा। इसलिए किसी प्रश्न में यदि आमदनी को '+' चिह्न द्वारा और क़र्ज़ा को '−' चिह्न द्वारा प्रकट करें, और यदि रक़म की इकाई एक पाउंड हो, तो +30, +45 और +90 का अर्थ होगा 30, 45 और 90 पाउंड की आमदनी, और −30, −45 और −90 का अर्थ होगा 30, 45 और 90 पाउंड का क़र्ज़ा। परन्तु यदि "आमदनी" और "क़र्ज़ा" का चिह्न उल्टा मान लिया जाय, तो +10, +25 व +30 द्वारा 10 पाउंड, 25 पाउंड व 30 पाउंड का क़र्ज़ा सूचित होगा, और −10, −25 और −30 द्वारा 10 पाउंड, 25 पाउंड और 30 पाउंड की आमदनी जाहिर होगी। इसलिए '$+a$' यदि किसी वस्तु का मूल्य सूचित करता हो, तो '$-a$' उस वस्तु के बराबर मूल्य का विपरीत गुणवाला अंश सूचित करेगा।

रेखाचित्र द्वारा उदाहरण :



मान लिया जाय कि AB एक सड़क है। एक मनुष्य O से B की ओर जाकर C तक पहुँचकर फिर O को लौट आया। इस अवस्था में चलने के पहले वह जहाँ था, उसके बाद भी ठीक वहीं रहा। इसलिए साफ है कि बायें से दायें को नापी हुई दूरी, दाहिने से बायें को नापी दूरी से विपरीत गुण रखती है। इसलिए बायें से दाहिनी तरफ चली हुई सड़क को बतानेवाली संख्या से पहले यदि '+' चिह्न रक्खें, तो दाहिने से बाँईं तरफ चली हुई सड़क को बतानेवाली संख्या से पहले '−' चिह्न रखना होगा। इन चिह्नों को आपस में बदल सकते हैं। अर्थात् '+' के लिए '−' और '−' के लिए '+' भी काम में ला सकते हैं।

और यदि दायें से बाँईं तरफ पार की हुई सड़क को बतानेवाली संख्या से पहले '+' चिह्न रक्खा जाय, तो "O विन्दु से −3 मील के फ़ासले" का अर्थ होगा, 'O के दाहिनी तरफ तीन मील का फ़ासला', और यदि O बिन्दु की एक दूसरे से उल्टी तरफ C व D दो बिन्दु

O से 5 और 4 मील की दूरी पर हों, और यदि एक मील को दूरी की इकाई मान लिया जाय, तो *OD*, *OC*, *CD* और *DC* को दूरी की क्रमशः +4, −5, +9, −9 संख्याओं द्वारा प्रकट करना होगा।

ऊपर दिये हुए दृष्टान्तों से साफ मालूम होता है कि '+' व '−' दो चिह्न जोड़ने और घटाने, इन दो क्रियाओं के अतिरिक्त विपरीत गुणसूचक दो राशियों का भेद बतलानेवाले चिह्न की जगह भी काम में लाये जाते हैं। जब इस अर्थ में वे प्रयोग किये जाते हैं तब उनको भेद-चिह्न (signs of affection) कहते हैं।

26. धनराशि व ऋणराशि (Positive and Negative Quantities) : जिन राशियों से पहले कोई चिह्न नहीं रहता अथवा '+' चिह्न रहता है उनको धनराशि और जिन राशियों से पहले '−' चिह्न रहता है उनको ऋणराशि कहते हैं। जैसे, 4, +6, $a, +b, +c$, ये धनराशियां और $-4, -6, -a, -b, -c$, ये ऋणराशियां हैं। इसलिए '+' व '−' चिह्नों को धनचिह्न व ऋणचिह्न कहते हैं।

टीका 1. यहां 'धनराशि' व 'ऋणराशि' शब्दों में 'राशि' का अर्थ संख्या है। नियम 25 में दिये हुए सिद्धान्त को याद रखने से ऋण-संख्या का अर्थ समझने में कुछ कठिनाई न होगी।

टीका 2. धन अथवा ऋण चिह्न का विचार न कर किसी राशि का जो मूल्य होता है, उसको विशुद्ध मूल्य या असल क़ीमत (absolute value) कहते हैं। a यदि 5 है, और b यदि 3 है, तो $+(ab)$ और $-(ab)$ दोनों का विशुद्ध मूल्य '15' होगा।

द्रष्टव्य। '−20 पाउंड लाभ', '−8 इंच की ऊंचाई', 'उत्तर की तरफ −5 मील की दूरी' आदि का अर्थ याद रखना बहुत आवश्यक है। असल में इनका क्रमशः अर्थ है, '20 पाउंड का घाटा', '8 इंच की निचाई', 'दक्षिण की ओर 5 मील की दूरी' आदि।

प्रश्नमाला 5

1. अगर इकाई 4 पाउंड हो '*A* का लाभ = −25'; इसका अर्थ क्या है ?

2. किसी सौदागर का 30 पाउंड का घाटा यदि 30 द्वारा सूचित हो, तो 70 पाउंड का लाभ किस संख्या द्वारा सूचित होगा ?

3. 60 पाउंड की आमदनी यदि 15 द्वारा सूचित हो, तो 100 पाउंड के क़र्ज़ को कैसे प्रकट करेंगे ?

4. 100 पाउंड क़र्ज़ यदि 25 द्वारा सूचित हो, तो 400 पाउंड की आमदनी को किस संख्या द्वारा प्रकट करेंगे ?

5. किसी विन्दु के उत्तर की ओर 75 मील की दूरी यदि 15 द्वारा सूचित हो, तो उस विन्दु के दक्षिण की ओर 150 मील की दूरी कैसे प्रकट होगी ?

6. किसी नदी का जल पहले दिन 12 इंच बढ़ा, दूसरे दिन 9 इंच घटा, तीसरे दिन फिर 5 इंच बढ़ा। यदि 3 इंच की लम्बाई को इकाई मानें, तो भिन्न भिन्न दिनों के जल की बाढ़ को संख्या द्वारा कैसे प्रकट करेंगे ?

7. किसी मनुष्य को पहले वर्ष 30 रुपया लाभ हुआ, दूसरे वर्ष 20 रुपये का घाटा हुआ, तीसरे वर्ष 40 रुपये का घाटा हुआ, और चौथे वर्ष 60 रुपया लाभ हुआ। यदि इकाई दो रुपया मानें तो भिन्न भिन्न वर्षों का लाभ संख्या द्वारा कैसे प्रकट करेंगे ?

8. ऊपर दिये हुए प्रश्न में भिन्न-भिन्न वर्षों का घाटा कैसे प्रकट करेंगे ?

तीसरा अध्याय

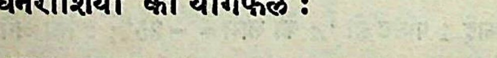
साधारण चार नियम (Four Simple Rules)

I. जोड़ (Addition)

27. दो या दो से अधिक राशियों का योग करने पर जो फल निकलता है, उसे उन राशियों का योगफल (sum) कहते हैं और उन राशियों में से प्रत्येक को यौगिक कहते हैं। योगफल निकालने की रीति को जोड़ (addition) कहते हैं।

टीका। अंकगणित में ऋणसूचक राशियों का प्रयोग नहीं होता, इसलिए योग शब्द के अर्थ अंकगणित और बीजगणित की दृष्टि से भिन्न हैं। बीजगणित के योग में यौगिक राशियों में से प्रत्येक राशि का धनसूचक होना आवश्यक नहीं, वे ऋणात्मक भी हो सकती है।

28. दो धनराशियों का योगफल :



मान लो कि $B'B$ रेखा एक सीधी सड़क सूचित करती है, और उस पर बायें से दायीं ओर का रास्ता धनराशि द्वारा सूचित किया जाता है।

मान लो कि O, A और B ये तीन विन्दु रास्ते के ऊपर ऐसे पड़े हैं कि OA, 2 मील और AB, 3 मील लम्बाई में है। अब यदि O, A और B की स्थिति ऊपर के चित्र के अनुसार हो और दूरी की इकाई एक मील हो, तो OA और AB को $+2$ और $+3$ द्वारा प्रकट करेंगे।

यदि कोई मनुष्य O से चलकर पहले घंटे में A तक पहुँचे और दूसरे घंटे में B पहुंच जाय तो दो घंटे के बाद O से उस मनुष्य की दूरी OB है और यह दूरी $+5$ द्वारा प्रकट होगी।

अत्र चूँकि (पहले घंटे का चला हुआ रास्ता)+(दूसरे घंटे का चला हुआ रास्ता) =(दोनों घंटों का चला हुआ रास्ता) $\therefore (+2)+(+3)=+5$; अर्थात् यदि साधारण रीति में बतलाया जाय तो $(+a)+(+b)=+(a+b)$; अथवा संक्षेप में $(a)+(b)=(a+b)$.

$\therefore$ जब दो धनराशियों को जोड़ा जाता है तो जोड़ या योगफल भी एक धनराशि होती है, और योगफल की असल क़ीमत यौगिक राशियों के विशुद्ध मूल्य के जोड़ के बराबर होती है।

29. दो ऋणराशियों का योगफल : 28 वें नियम के चित्र में मान लो O से बाँईं ओर दो मील दूर पर A', और वहाँ से बाँईं तरफ 3 मील दूर पर B', ये दो विन्दु लिये गये हैं। अतएव $OA'=2$ मील और $A'B'=3$ मील हैं। अब यदि दूरी की इकाई एक मील मान ली जाय, तो OA' और $A'B'$ -2 और -3 संख्याओं द्वारा सूचित होंगे।

अब यदि कोई मनुष्य पहले घंटे में A' तक जाकर दूसरे घंटे में B' पर पहुँचे तो दो घंटों के बाद O से बाईं ओर उसकी दूरी की नाप OB' होगी, और स्पष्ट है कि यह -5 द्वारा सूचित होगी।

अत्र $\because$ (पहले घंटे में चला हुआ रास्ता)+(दूसरे घंटे में चला हुआ रास्ता)= दो घंटे में चला हुआ रास्ता,

$$\therefore \ (-2)+(-3)=-5;$$

अर्थात्, साधारण रूप से कहा जा सकता है $(-a)+(-b)=-(a+b)$.

$\therefore$ दो ऋणराशियों का योग करने पर योगफल एक ऋणराशि होती है और योगफल की असल क़ीमत दोनों यौगिक राशियों के विशुद्ध मूल्य के जोड़ के बराबर होगी।

उदाहरण 1. यदि $a=2,\ b=3,\ c=5$ हो, तो $-a,\ -bc,\ -a^2b$ के योगफल का मूल्य निकालो।

अब $a=2,\ bc=3\times5=15,\ a^2b=2^2\times3=4\times3=12.$

$$\therefore \ (-a)+(-bc)+(-a^2b)=(-2)+(-15)+(-12)$$
$$=-(2+15+12)=-29.$$

उदाहरण 2. $(-3c)+(-a^3d)+(b+f+g)$ का मूल्य निकालो, यदि $a=3$, $b=-2$, $c=4$, $d=5$, $f=-6$, $g=-8$ हो।

अब $b+f+g=(-2)+(-6)+(-8)=-(2+6+8)=-16$;

$3c=3\times4=12$;

और $a^3d=3^3\times5=27\times5=135$.

इसलिए व्यंजक $=(-12)+(-135)+(-16)$

$=-(12+135+16)=-163$.

प्रश्नमाला 6

1. -2, -9 और -11 का योगफल निकालो।

2. यदि $x=2, y=3, z=5$ हो, तो $-5x$, $-y$ और $-z$ के योगफल की क़ीमत निकालो।

3. यदि $x=-5$ और $y=-19$ हो, तो (क) -7, x और y के योगफल का मूल्य निकालो और (ख) उस योगफल के साथ -10 जोड़ने से क्या उत्तर होगा, यह बतलाओ।

4. क़ीमत निकालो : $2a-3(b+c)$, यदि $a=-5$, $b=2$, $c=1$ हो।

5. क़ीमत निकालो : $(-a^2c^4)+(-a^4b^2)+\{-(c^3-a^2)\}$, यदि $a=2$, $b=3$, $c=4$ हो।

6. $-3a^3b^3$, d, e, $-20c^2$ और $(d+e)$ के योगफल की क़ीमत निकालो, यदि $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=-4$, $e=-5$ हो।

7. $-a^4(b-c)$, $-b^4(c-a)$ और $-c^4(b-a)$ के योगफल की क़ीमत निकालो, यदि $a=2$, $b=5$, $c=4$ हो।

8. $\{-(a^2-b^2)\}+\{-(a^3-b^3)\}+\{-(a^4-b^4)\}$ का हिसाब निकालो, यदि $a=3$, $b=5$ हो।

9. $-x^3(y^2-z^2)$, $-y^3(z^2-x^2)$ और $-z^3(y^2-x^2)$ के योगफल का हिसाब निकालो, यदि $x=3$, $y=6$, $z=5$ हो।

10. $-\{a^4+b^4-c^4\}$, $-\{a^4+(b^4-c^4)\}$, $-\{a^4-b^4\times c^4\}$ और $-\{(a^4-b^4)\times c^4\}$ के योगफल की क़ीमत निकालो, यदि $a=60$, $b=4$ और $c=2$ हो।

30. एक ऋणराशि और दूसरी धनराशि का योगफल : मान लो कि 28 वें नियम के चित्र में यदि एक मनुष्य एक घंटे में O से B तक चलकर दूसरे घंटे में A को लौट जाय, तो पहले और दूसरे घंटे में उसका चला हुआ रास्ता क्रमशः $+5$ और

-3 द्वारा प्रकट होगा, और O से उसका दो घंटे में चला हुआ पथ $(+5)+(-3)$ द्वारा प्रकट करना होगा। किन्तु दो घंटे के बाद O से उसकी दूरी असल में OA है और उसको $+2$ द्वारा सूचित करेंगे। $\therefore\ (+5)+(-3)=+2$, अर्थात् $+(5-3)$.

यदि यह मनुष्य पहले घंटे में O से B तक जाय और दूसरे घंटे में लौटकर A' पर आ पहुँचे, तो पहले व दूसरे घंटे में पार किये हुए रास्ते को $+5$ व -7 द्वारा सूचित करेंगे, इसलिए दो घंटों के बाद उसकी दूरी $(+5)+(-7)$ द्वारा सूचित करनी होगी; किन्तु दो घंटों के बाद O से उसकी दूरी जो कि OA' है -2 द्वारा सूचित होती है, इस कारण $(+5)+(-7)=-2=-(7-5)$.

मामूली तौरपर कहेंगे

$$(+a)+(-b)=+(a-b),\ \text{यदि } a>b \text{ हो}$$

या

$$=-(b-a),\ \text{यदि } b>a \text{ हो।}$$

इसलिए जब एक धनराशि और एक ऋणराशि जोड़ी जाती है तो यदि धनराशि की असल क़ीमत ऋणराशि के विशुद्ध मूल्य से अधिक हो, तो योगफल धनराशि होती है, और यदि कम हो, तो योगफल ऋणराशि होती है, और दोनों अवस्थाओं में योगफल का विशुद्ध मूल्य यौगिक राशियों में से छोटी राशि को बड़ी राशि में से घटाने से निकलता है।

उपसिद्धान्त 1. यदि a से b बड़ा हो, तो $a+(-b)=-(b-a)$; इसलिए $a=0$ होने पर $+(-b)=-b$; अर्थात् 'एक ऋणराशि को योग करना' अथवा 'उस राशि के विशुद्ध मूल्य को घटाना' दोनों बातें एक ही मतलब रखती हैं।

टीका। a से b बड़ा होने पर भी '$a-b$' की क़ीमत मालूम करना कठिन नहीं है, कारण $a-b$ हर हालत में '$a+(-b)$' के बराबर है; असल में, इस जगह $a+(-b)=-(b-a)$. जैसे $3-8=3+(-8)=-(8-3)=-5$.

उपसिद्धान्त 2. पहले उपसिद्धान्त से यह जाहिर है कि कई राशियां का योगफल प्रकट करने के लिए उन राशियों में से प्रत्येक राशि को अपने अपने चिह्न (धन या ऋण) के साथ लिखना चाहिए। जैसे $a+(-b)+c+(-d)$ और '$a-b+c-d$' दोनों का अर्थ एक ही है।

उदाहरण 1. क़ीमत निकालो: $a-3b+2c-7d$, यदि $a=2,\ b=4,\ c=3,\ d=1$ हो।

$$\begin{aligned} a-3b+2c-7d &= a+(-3b)+2c+(-7d) \\ &= 2+(-12)+6+(-7) \\ &= -10+6+(-7) \\ &= -4+(-7)=-11. \end{aligned}$$

उदाहरण 2. मूल्य बतलाओ : $a^2b-b^2c+c^2d-d^2a-bc^2$, यदि $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ हो।

$$\text{यह व्यंजक} =(1^2\times 2)-(2^2\times 3)+(3^2\times 4)-(4^2\times 1)-(2\times 3^2)$$
$$=2-12+36-16-18=-10+36-16-18$$
$$=26-16-18=10-18=-8.$$

प्रश्नमाला 7

1. जोड़ो : 117 और -114.

2. जोड़ो : 218 और -223.

3. हिसाब निकालो : $x-y+z$, यदि $x=8$, $y=25$, $z=13$ हो।

4. जोड़ो : $3x$, $-6y$, $2z$, u और $14v$, यदि $x=2$, $y=5$, $z=1$, $u=3$, $v=-2$ हो।

5. क़ीमत निकालो : $3m-5n+6q+r$, यदि $m=4$, $n=6$, $q=2$, $r=-8$ हो।

6. जोड़ो : $-a^2c$, bd^2, $-cb^2$ और $-a^2d^2$, यदि $a=2$, $b=5$, $c=3$, $d=6$ हो।

7. क़ीमत निकालो : $2x^2y-3y^3x-5x^2y^2+x^3y^4$, यदि $x=y=2$ हो।

8. क़ीमत निकालो : $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, यदि $a=3$, $b=5$ हो।

9. क़ीमत निकालो : $m^5-5m^4n+10m^3n^2-10m^2n^3+5mn^4-n^5$, यदि $m=4$, $n=6$ हो।

10. क़ीमत निकालो : $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$, यदि $a=3$, $b=2$ हो।

31. जब कई धन अथवा ऋणचिह्नित राशियां एक साथ जोड़ी जाती हैं, तो उनका योगफल इस बात पर निर्भर नहीं करता कि यौगिक राशियां किस क्रम में जोड़ी जा रही हैं।

मान लो कि एक मनुष्य एक स्थान से चलकर 6 मील उत्तर की ओर जाता है, और फिर उसी रास्ते से 8 मील दक्षिण की ओर लौटता है, तो अन्त में वह जहाँ से चला था उसके 2 मील दक्षिण पहुँचता है।

परन्तु यदि वह मनुष्य पहले 8 मील दक्षिण को जाकर तब 6 मील उत्तर को जाता तो इस बार भी जहाँ से चला था उसके 2 मील दक्षिण ही पहुँचता।

इसलिए इससे यह प्रकट होता है, कि $6+(-8)=(-8)+6$.

कारण दोनों -2 के समान हैं

अथवा साधारण रूप में लिखा जा सकता है कि $a-b=-b+a$.

और $\because\ 2-10+6=-8+6=-2,$

और $-10+6+2=-4+2=-2,$

$\therefore\ 2-10+6=-10+6+2.$ इसी प्रकार हर हालत में यही फल निकलेगा।

इसी प्रकार साधारण रूप से कहा जा सकता है कि $a-b+c=-b+c+a$.

इसी प्रकार यह दिखाया जा सकता है कि

$$a-b+c-d+e-f=a+c+e-b-d-f$$
$$=-b+e-d-f+c+a \text{ आदि।}$$

32. जब कई राशियाँ एक साथ जोड़ी जाती हैं, तो उनको कई अंशों में तोड़कर फल उन विभिन्न हिस्सों के योगफल के रूप में प्रकट किया जा सकता है।

अब चूँकि $3-7-8+6-4+2$

$$=-4-8+6-4+2$$
$$=-12+6-4+2,$$
$$=-6-4+2$$
$$=-10+2=-8;$$

और $(3-7)+(-8+6)+(-4+2)$

$$=-4+(-2)+(-2)=-8;$$

$3+(-7-8+6)+(-4+2)$

$$=3+(-9)+(-2)=-8;$$

$3+(-7-8)+(6-4)+2$

$$=3+(-15)+2+2=-8.$$

इसलिए $3-7-8+6-4+2$

$$=(3-7)+(-8+6)+(-4+2)$$
$$=3+(-7-8+6)+(-4+2)$$
$$=3+(-7-8)+(6-4)+2, \text{ आदि।}$$

और हर हालत में ऐसा ही फल निकलेगा।

इसलिए साधारण रूप में $a+b-c-d+e-f+g$ व्यंजक को निम्नलिखित किसी प्रकार से लिखा जा सकता है—

(1) $(a+b)+(-c-d)+e+(-f+g)$;
(2) $a+(b-c)-d+(e-f+g)$;
(3) $(a+b-c)+(-d+e-f)+g$;
(4) $a+(b-c-d)+e+(-f+g)$;
(5) $(a+b-c-d)+(e-f+g)$;

आदि, आदि।

उपसिद्धान्त 1. यदि उल्टी ओर से लिखा जाय, तो $(a+b)+(-c-d)+e+(-f+g)=a+b-c-d+e-f+g$. फलतः योग करने का नीचे दिया हुआ नियम निकला।

दो या दो से अधिक व्यंजकों को जोड़ने के लिए उनके पदों को अपने अपने चिह्नों के साथ एक दूसरे के बाद क्रम से लिखते जाते हैं।

उपसिद्धान्त 2. $\because$ $a-b+c-d+e-f$

$=a+c+e-b-d-f$ [नियम 31]

$=(a+c+e)+(-b-d-f)$.

इसलिए यह नियम निकला कि :—

यदि कई धनचिह्नित और कई ऋणचिह्नित राशियों का योगफल एक साथ निकालना हो, तो धनचिह्नित और ऋणचिह्नित राशियों का पृथक् योगफल निकालकर और इन दोनों योगफलों को यौगिक मानकर अंत में जो योगफल प्राप्त होगा उसके द्वारा दी हुई राशियों का योगफल प्रकट कर सकते हैं। जैसे

$$3-7+8-9+5-6$$
$$=(3+8+5)+(-7-9-6)$$
$$=16+(-22)=-6.$$

उदाहरण 1. हल करो : $5a-3b+2c-4a+2b-7c$

$=5a-4a-3b+2b+2c-7c$ [नियम 31]

$=(5a-4a)+(-3b+2b)+(2c-7c)$ [नियम 32]

$=a+(-b)+(-5c)$

$=a-b-5c.$

उदाहरण 2. हल करो :

$$3a^2b+5b^2c-6c^2a-10a^2b-7b^2c+8c^2a+4a^2b-b^2c+c^2a$$
$$=3a^2b-10a^2b+4a^2b+5b^2c-7b^2c-b^2c-6c^2a+8c^2a+c^2a$$
$$=(3a^2b-10a^2b+4a^2b)+(5b^2c-7b^2c-b^2c)+(-6c^2a+8c^2a+c^2a)$$
$$=(-7a^2b+4a^2b)+(-2b^2c-b^2c)+(2c^2a+c^2a)$$
$$=(-3a^2b)+(-3b^2c)+(3c^2a)$$
$$=-3a^2b-3b^2c+3c^2a.$$

टीका। ऊपर दिये हुए उदाहरणों के हल करने की रीति पर ध्यान देने से यह मालूम होता है कि असल में पदों का योगफल निकालने के समय वास्तव में उन पदों के संख्या-गुणकों के बीजीय योगफल (algebraical sum) के साथ पदों में मामूली अक्षर जोड़ दिये गये हैं। जैसे $5b^2c-7b^2c-b^2c$ का योगफल $=-3b^2c$, इसलिए साफ है कि 5, −7 और −1 का बीजगणितीय योगफल हुआ −3.

उदाहरण 3. जोड़ो : $3a-2b+c$ व $-5d+6e-f$; और यदि $a=2$, $b=1$, $c=3$, $d=4$, $e=7$, $f=5$ हो, तो इस योगफल की क़ीमत निकालो।

$$\text{योगफल}=(3a-2b+c)+(-5d+6e-f)$$
$$=3a-2b+c-5d+6e-f$$
$$=6-2+3-20+42-5$$
$$=(6+3+42)+(-2-20-5)$$
$$=51+(-27)=24.$$

33. बीजीय बहुपद व्यंजकों (Compound Expression) का योगफल निकालने की साधारण रीति : बहुपद व्यंजकों को एक के नीचे दूसरे को इस प्रकार लिखो कि उनके सजातीय पद एक स्तम्भ (column) में हों ; सबसे नीचे लिखे हुए व्यंजक के नीचे एक रेखा खींचकर प्रत्येक स्तम्भ के पदों का योगफल उस रेखा के नीचे लिखने से ही दिये हुए व्यंजक का योगफल प्राप्त हो जायगा।

उदाहरण 1. जोड़ो : $3a-5b+7c-9d$, $-8c+5a-3d+7b$, $4d+2c-a$ और $2b-3c+6d$.

पहला व्यंजक	=	$3a-5b+7c-9d$
दूसरा ,,	=	$5a+7b-8c-3d$ [नियम 31]
तीसरा ,,	=	$-a\quad+2c+4d$
चौथा ,,	=	$2b-3c+6d$
∴ योगफल	=	$7a+4b-2c-2d$

उदाहरण 2. निम्नलिखित व्यंजकों के योगफल का मूल्य निकालो :

$20a^2b^3-25b^3c^4+d^7$, $-22a^2b^3+19b^3c^4-3d^7$ और $2a^2b^3+7b^3c^4+2d^7$, यदि $a=498$, $b=3$, $c=2$, $d=19$ हो।

पहला व्यंजक $= 20a^2b^3-25b^3c^4+d^7$

दूसरा ,, $= -22a^2b^3+19b^3c^4-3d^7$

तीसरा ,, $= 2a^2b^3+7b^3c^4+2d^7$

योगफल $= b^3c^4$

$= 3^3 \times 2^4 = 27 \times 16 = 432.$

प्रश्नमाला 8

सरल करो :

1. $2x+3y-z-3x-2y+z.$
2. $9m^2-7n^2+5p^2+8n^2-4p^2-8m^2.$
3. $8a^2-5a^2b-7a^2+5c^2-2a^2+6a^2b-4c^2.$
4. $3abc-5c^2+6mnp^2-abc+7c^2-9mnp^2-2c^2.$
5. $-7a^3b-5b^2c^2+10a^3b-3b^2c^2+3df-a^3b-b^2c^2-5df.$
6. $8x^4y-5xyz-17x^4y+20x^2y^2-2xyz-35x^2y^2+3x^4y-4xyz+5x^2y^2.$
7. $9a^2bc-7b^2ca+5c^2ab+3b^2ca-5a^2bc-c^2ab.$
8. $20x^3mn-23m^3nx+14n^3xm-37x^3mn-47n^3xm+54m^3nx-8x^3mn+13n^3xm-15m^3nx+20n^3xm.$

यदि $a=9$, $b=10$, $c=12$, $d=5$, $k=2$, $m=3$, $n=4$, $x=6$, $y=7$, $z=8$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों के योगफल की क़ीमत अंकों में निकालो :

9. $-k+3m+5n$ और $5d-4x-6y.$
10. $5m-2y-7b-8c$ और $3d+x-10a.$
11. $3k^2$, $-5m^2+7n^2$, $-2x+5b-c$ और $10d-7a.$
12. $-2k+3m-4n$, $-d-5x+6y$ और $3z-5a-3b+5c.$
13. $-km+az$, $bc-4md+y$, $-n^2-d^2+ab$ और $6kn-5y-7x+kmn.$
14. k^3m-dnx, $by^2-ckm-x^2d$, $-bz+3a^2-2m^4d$ और $5n^2-7bdz+2ak^2-3b^2d.$

15. $3m^4b-5a^2x-4b^2z,\ -13k^2b+4z^2d-7d^2n,\ -5c^2n+8b^2y+9d^3$ और $5az^2-7b^2c-4x^3b+8adn.$

जोड़ो :

16. $a-2b+5c$ और $-7a+3b-8c.$

17. $-3x+5y-9z,\ 5x-3y+7z$ और $-2y+z.$

18. $x^3+3x^2-5x+4,\ 2x^3-6x^2+7x-8,\ -x^3+7x^2-2x+9$ और $5x^2+2.$

19. $3a-2b+7c-8d,\ 2c+6d-5a,\ 3b+d-10c,\ c-4b+a$ और $-7d+5b.$

20. $x^2+2xy+3y^2-x+y+2,\ -5x^2+y^2+2x-5,\ -3xy-7y^2+3y+1$ और $6x^2+xy-x-4y+2.$

यदि $a=5,\ b=4,\ x=8,\ y=7$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का मूल्य निकालो :

21. $(3x^3+5y^5-20a^2+49b^3)+(17a^2-27b^3-23x^3)+(-y^5+3b^3-3a^2)+(-23b^3-4y^5+7a^2+20x^3).$

22. $(10a^2-26x^5y^4+30x^3b^5+17a^6y^7)+(35x^5y^4+16a^6y^7-304a^2-28x^3b^5)+(-8a^6y^7-9x^5y^4-7x^3b^5)+(5x^3b^5-25a^6y^7+289a^2).$

23. $(2a^2-7b^2+9x^2-13y^2+15ab-21xy)+(5y^2+8b^2+17xy-6a^2-8ab-20x^2)+(13x^2-20ab+5a^2-16xy-10y^2-2b^2)+(13ab-2x^2+3b^2+23xy-a^2+18y^2).$

24. $(29abx-39bxy+49xya-59yab)+(29bxy+49yab-19abx-39xya)+(2abx-12xya+6bxy+24yab)+(3xya+4bxy-13abx-14yab).$

25. $(18a^2b^2-43b^2x^2+62x^2y^2-23abxy)+(39abxy+28b^2x^2-25a^2b^2-42x^2y^2)+(19b^2x^2+37a^2b^2-25abxy+35x^2y^2)+(9abxy-29a^2b^2-55x^2y^2-4b^2x^2).$

II. बाक़ी अथवा घटाना (Subtraction)

34. परिभाषा (Definition) : एक राशि b किसी दूसरी राशि a से घटाई गई है, इससे यह समझना चाहिए कि एक ऐसी राशि c मिली है, जो यदि b के साथ जोड़ दी जाय तो योगफल a के बराबर होगा। अर्थात् c यदि ऐसी हो कि $c=a-b$ तब $b+c=a.$ जिस राशि में से घटाया जाता है उसको वियोज्य (minuend) और जिस राशि को घटाया जाता है उसको वियोजक (subtrahend) कहते हैं। एक राशि से दूसरी राशि घटाने से जो राशि मिलती है उसको अन्तर या बाक़ी कहते हैं।

यदि $a-b=c$ हो, तो a को वियोज्य, b को वियोजक और c को अन्तर कहेंगे।

35. किसी राशि से एक धनात्मक राशि घटाना ऐसा ही है, जैसा कि उसके साथ एक ऋणात्मक राशि जोड़ देना जिसकी असल क़ीमत (absolute value) उस धनात्मक राशि के विशुद्ध मूल्य के बराबर है; और किसी राशि से एक ऋणात्मक राशि घटाना ऐसा ही है, जैसा कि उसके साथ एक ऐसी धनात्मक राशि जोड़ दी जाय जिसका विशुद्ध मूल्य उस ऋणात्मक राशि के विशुद्ध मूल्य के बराबर हो।

$\because\ 3+4=7, \quad \therefore\ 7-3=4=7+(-3);$

और $\quad 6+(-2)=4, \quad \therefore\ 4-6=-2=4+(-6).$

इसलिए साधारण रूप से यदि प्रकट किया जाय, तो $a-b=a+(-b)$ अर्थात् किसी राशि में से एक धनात्मक राशि घटाना अथवा उसके साथ एक उसी विशुद्ध मूल्य की ऋणात्मक राशि जोड़ देना दोनों बराबर हैं।

और $\because\ (-3)+5=2,$

$\therefore\ 2-(-3)=5=2+3$ (परिभाषा के अनुसार)

और इसी प्रकार $\quad (-6)+(-4)=-10,$

$\therefore\ (-10)-(-6)=-4=(-10)+6.$

साधारण ढंग से कहा जाय तो $\quad \because\ (-b)+(a+b)=a,$

$\therefore\ a-(-b)=a+b.$

अर्थात् किसी एक राशि से दूसरी एक ऋणात्मक राशि को घटाना अथवा उसके साथ उसी विशुद्ध मूल्य की धनात्मक राशि को जोड़ देना दोनों एक ही बात हैं।

टीका। $a-b$ यदि एक धनराशि हो, तो a को b से बड़ा कहा जाता है, $\therefore\ -4$, -5 से बड़ा है; कारण $(-4)-(-5)=-4+5=1$. इसी प्रकार $-5>-7$, $-10>-20$, आदि; $\therefore\ 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8$ आदि, इन संख्याओं में कोई भी संख्या उसकी पूर्वलिखित संख्या से कम है।

36. रेखाचित्र-द्वारा दृष्टान्त : मान लो कि AD पश्चिम से पूरब की ओर एक

A O B C D

रेल की लाइन है; और A, O, B, C, D इसके स्टेशन हैं। ये स्टेशन इतनी दूरी पर हैं कि $AO=OB=20$ मील; $BC=30$ मील और $CD=10$ मील। मान लो कि कोई मनुष्य दो दिन में A से C जा पहुँचता है तो (पहले दिन में पार किया हुआ पथ) + (दूसरे दिन में तै किया हुआ पथ) = 50 मील; $\therefore$ 50 मील − (पहले दिन में पार किया हुआ पथ) = दूसरे दिन में तै किया हुआ पथ।

अब (i) यदि वह मनुष्य पहले दिन O से B तक जाय, अर्थात् O से पूरब की ओर 20 मील रास्ता तै करे, तो दूसरे दिन उसको B से C तक पूरब की ओर 30 मील पथ जाना पड़ा है ; ∴ यह देखा जाता है कि (50 मील) − (20 मील) = 30 मील।

और (ii) यदि पहले दिन वह मनुष्य O से A तक जाता, अर्थात् O से पश्चिम की ओर 20 मील रास्ता चलता, तो दूसरे दिन उसको A से C तक पूरब की ओर 70 मील रास्ता जाना पड़ता। ∴ देखा जाता है कि (50 मील) − (−20 मील) = 70 मील।

और (iii) यदि पहले दिन वह मनुष्य O से D तक जाता अर्थात् 60 मील रास्ता पूरब की ओर जाता, तो दूसरे दिन उसको D से C तक पश्चिम की ओर 10 मील रास्ता जाना पड़ता। ∴ देखा जाता है कि (50 मील) − (60 मील) = −10 मील।

इसलिए यदि एक मील की दूरी का इकाई माना जाय तो ऊपर दिये हुए दृष्टान्तों से हिसाब निकला :

$$\left.\begin{aligned} 50-20&=30\\ 50-(-20)&=70\\ \text{और}\quad 50-60&=-10 \end{aligned}\right\}$$

उदाहरण 1. मूल्य निकालो : $a-b+c$, यदि $a=5, b=-2, c=-3$ हो।

$$\begin{aligned} a-b+c&=5-(-2)+(-3)\\ &=5+2-3=4. \end{aligned}$$

उदाहरण 2. मूल्य निकालो : $-a-(-b)+c$, यदि $a=-2$, $b=-3$, $c=-4$ हो।

$$\begin{aligned} -a-(-b)+c&=-a+b+c\\ &=-(-2)+(-3)+(-4)\\ &=2-3-4=-5. \end{aligned}$$

प्रश्नमाला 9

यदि $a=3$, $b=-5$, $c=-6$, $d=-8$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का हिसाब निकालो :

1. $-a+b-c+d.$ 2. $a+(-b)+c-d.$ 3. $c-d-(-b)-a.$
4. $c-(-d)+b-a.$ 5. $-(-a)+b-(-c)-d.$

यदि $m=-47$, $n=50$, $x=-154$, $y=-234$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का हिसाब निकालो :

6. $n-m-(-x)+y.$ 7. $-(-m)+y-(-n)-x.$
8. $-(-x)+m-y-(-n).$ 9. $-(-y)-m-x-(-n).$
10. $-(-n)-y-(-x)-m.$

37. सिद्ध करो :

$$a-(b+c)=a-b-c,$$

और $$a-(b-c)=a-b+c.$$

चूँकि $(b+c)+(a-b-c)=a,$

इस कारण परिभाषा के अनुसार $a-(b+c)=a-b-c.$

और चूँकि $(b-c)+(a-b+c)=a,$

$$\therefore \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

उपसिद्धान्त। एक बीजीय बहुपदी व्यंजक से दूसरे किसी बहुपदी व्यंजक को घटाने का नियम इस रूप में प्रकट किया जा सकता है।

वियोजक व्यंजक का प्रत्येक पद का चिह्न बदलकर (अर्थात् '+' को '−' और '−' को '+' बनाकर) पदों को वियोज्य के बाद लिखने से जो व्यंजक प्राप्त होगा वही अंतर है। जैसे :

$a-2b+c$ से $2a+3b-5c$ घटाने से

अंतर $=a-2b+c-2a-3b+5c$

$=-a-5b+6c.$

उदाहरण 1. $2a+b-8c$ से $-3a+2b-5c$ को घटाओ।

अंतर $=2a+b-8c+3a-2b+5c$

$=(2a+3a)+(b-2b)+(-8c+5c)$

$=5a+(-b)+(-3c)=5a-b-3c.$

उदाहरण 2. $-3a^2+2ab-4b^2$ से $2a^2+3ab-5b^2$ को घटाओ।

अंतर $=-3a^2+2ab-4b^2-2a^2-3ab+5b^2$

$=(-3a^2-2a^2)+(2ab-3ab)+(-4b^2+5b^2)$

$=-5a^2-ab+b^2.$

38. किसी बहुपदी व्यंजक से दूसरा बहुपदी व्यंजक घटाने की साधारण रीति : वियोजक व्यंजक को वियोज्य व्यंजक के नीचे इस प्रकार रक्खो कि दोनों व्यंजकों के सजातीय पद एक ही खड़ी कतार में हों। इसके बाद वियोजक के नीचे एक रेखा खींचो। अब वियोजक के प्रत्येक पद का चिह्न ज़बानी बदलकर प्रत्येक खड़ी कतार का योगफल निकालकर रेखा के नीचे लिखो। इस प्रकार से रेखा के नीचे जो व्यंजक प्राप्त हो वही अंतर है।

उदाहरण 1. $x^2 - 2xy + 3y^2$ से $-2x^2 + 3xy - y^2$ को घटाओ।

$$\begin{aligned} \text{वियोज्य} &= x^2 - 2xy + 3y^2 \\ \text{वियोजक} &= -2x^2 + 3xy - y^2 \\ \therefore \text{ अंतर} &= 3x^2 - 5xy + 4y^2 \end{aligned}$$

टीका। इस बात पर ध्यान देना चाहिए कि वियोज्य के पदों के चिह्न वास्तव में बदले नहीं जाते। इन पदों के चिह्नों को बदलना और उनको अपनी खड़ी कतार के सजातीय पदों के साथ जोड़ना ज़बानी किया जाता है।

उदाहरण 2. $a^2 - 3ab + 5x^2 - y^2$ को $3x^2 + 2y^2 - 7a^2$ में से घटाओ।

$$\begin{aligned} \text{वियोज्य} &= 3x^2 + 2y^2 - 7a^2 \\ \text{वियोजक} &= 5x^2 - y^2 + a^2 - 3ab \\ \therefore \text{ अंतर} &= -2x^2 + 3y^2 - 8a^2 + 3ab \end{aligned}$$

प्रश्नमाला 10

घटाओ :

1. $a - b + c$ को $3a + 2b - c$ में से।
2. $2a - 5b + 4c$ को $-a - 2b + 8c$ में से।
3. $-x + y - z$ को $2x + 3y - 4z$ में से।
4. $5m^2 - 6m + 3$ को $7m^2 - 8m - 1$ में से।
5. $x^2 - 2y^2 + 3z^2$ को $3x^2 - y^2 + 2z^2$ में से।
6. $4y^2 + 4xy - 2x^2$ को $2y^2 - 3xy + x^2$ में से।
7. $-3a^2 + 2ab - 7b^2$ को $a^2 - 5ab - 8b^2$ में से।
8. $-2bc + 6c^2 - 8xy$ को $5bc - c^2 + 2xy$ में से।
9. $2x^3 - 4x^2 + 7x + 5$ को $x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ में से।

कितना जोड़ने से

10. $x + 2y + z$, z बन जायगा ?
11. $-2x + 5y - 4z$, $x + y + z$ बन जायगा ?
12. $3m^2 + 5m - 6$, m^2 बन जायगा ?
13. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $a^3 + b^3$ बन जायगा ?
14. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$, $a^4 + b^4$ बन जायगा ?
15. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ से कितना घटाने से अंतर $a^3 - b^3$ होगा ?

39. कोष्ठक रखना (Insertion of brackets), कोष्ठक खोलना (Removal of brackets).

[क] कोष्ठक खोलने के नियम

(i) कोष्ठक के पहले यदि '+' चिह्न रहे तो उसके भीतर के व्यंजक के पदों के चिह्नों को न बदलकर कोष्ठक खोला जा सकता है, मानो कोष्ठक के अस्तित्व का कोई मूल्य ही नहीं।

(ii) कोष्ठक के पहले यदि '−' चिह्न रहे तो उसके अन्दर के व्यंजक के प्रत्येक पद का चिह्न बदलकर [अर्थात् '+' को '−' और '−' को '+' बनाकर] कोष्ठक खोला जाता है। जैसे :—

$$a-b+(c-d+e)=a-b+c-d+e;$$

किन्तु $$a-b-(c-d+e)=a-b-c+d-e.$$

[ख] कोष्ठक रखने के नियम

(1) कोष्ठक के सामने '+' चिह्न देकर अपने अपने चिह्नों के साथ चाहे जितने पद हों कोष्ठक के अन्दर रक्खे जा सकते हैं।

(2) कोष्ठक के सामने '−' चिह्न देकर भी, संख्या में चाहे जितने पद हों कोष्ठक के अन्दर रक्खे जा सकते हैं किन्तु इस हालत में पदों के चिह्नों को बदल के रखना पड़ता है। जैसे—

$$a-b+c-d+e-f=a-b-(-c+d-e+f).$$

टीका। अक्सर एक कोष्ठक के अन्दर दूसरा कोष्ठक रक्खा जाता है। जैसे $2a-[3b-\{4c-(5d-6e)\}]$. इसका अर्थ है कि { } धनुकोष्ठक के अन्दर की राशि को $3b$ से घटाना होगा, और इस प्रकार जो अंतर प्राप्त होगा उसको $2a$ से घटाना होगा। और धनुकोष्ठक { } के अन्दर की राशि को मालूम करने के लिए लघु कोष्ठक के अन्दर की राशि '$5d-6e$' को $4c$ से घटा देना होगा।

इसी प्रकार एक से अधिक कोष्ठकवाले व्यंजक का कोष्ठक खोलने के लिए सर्वप्रथम जो कोष्ठक सबसे अन्दर हो, फिर उसके बादवाले कोष्ठक को, फिर उसके बादवाले कोष्ठक को खोलने में आसानी पड़ती है।

उदाहरण 1. हल करो : $a-\{b-(c-d)\}$.

$$a-\{b-(c-d)\}=a-\{b-c+d\}$$
$$=a-b+c-d.$$

उदाहरण 2. हल करो : $a-[b-\{c-(d-e)\}-f]$.

$$\begin{aligned} a-[b-\{c-(d-e)\}-f] &= a-[b-\{c-d+e\}-f] \\ &= a-[b-c+d-e-f] \\ &= a-b+c-d+e+f. \end{aligned}$$

उदाहरण 3. हल करो : $a+[-b-\{c-(d-\overline{e-f})-g\}-h]$.

$$\begin{aligned} a+[-b-\{c-(d-\overline{e-f})-g\}-h] &= a+[-b-\{c-(d-e+f)-g\}-h] \\ &= a+[-b-\{c-d+e-f-g\}-h] \\ &= a+[-b-c+d-e+f+g-h] \\ &= a-b-c+d-e+f+g-h. \end{aligned}$$

उदाहरण 4. हल करो : $2a-[3a+\{4b-(2a-b)+5a\}-7b]$.

दिया हुआ व्यंजक $=2a-[3a+\{4b-2a+b+5a\}-7b]$

$$\begin{aligned} &= 2a-[3a+\{5b+3a\}-7b] \\ &= 2a-[3a+5b+3a-7b] \\ &= 2a-[6a-2b] \\ &= 2a-6a+2b \\ &= -4a+2b. \end{aligned}$$

उदाहरण 5. $a-[-b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]$ के कोष्टक में से पहले [ ] को फिर { } को तब ( ) को और अंत में '—' को खोलो :—

$$\begin{aligned} a-[-b-\{c-(d-\overline{e-f})\}] &= a+b+\{c-(d-\overline{e-f})\} \\ &= a+b+c-(d-\overline{e-f}) \\ &= a+b+c-d+\overline{e-f} \\ &= a+b+c-d+e-f. \end{aligned}$$

टीका। [ ] इस कोष्टक के अन्दर दो पद हैं ; अर्थात् $-b$ और $-\{c-(d-\overline{e-f})\}$. अब ∵ [ ] इस कोष्टक के पहले '—' चिह्न है ∴ इसको खोलने के लिए दोनों पदों के चिह्नों को बदलना पड़ता है ; और इस कोष्टक को खोलकर $b+\{c-(d-\overline{e-f})\}$ व्यंजक मिलता है। इस बात पर ध्यान देना चाहिए कि एक समय केवल एक ही कोष्टक खोलना होगा।

उदाहरण 6. हल करो : $[a-\{b-(c-d)\}]-[2a-\{3b+(2c-4d)\}]$.

$$\text{अब } a-\{b-(c-d)\}=a-\{b-c+d\}$$
$$=a-b+c-d;$$
$$\text{और } 2a-\{3b+(2c-4d)\}=2a-\{3b+2c-4d\}$$
$$=2a-3b-2c+4d.$$
$$\text{इसलिए दिया हुआ व्यंजक } =[a-b+c-d]-[2a-3b-2c+4d]$$
$$=a-b+c-d-2a+3b+2c-4d$$
$$=-a+2b+3c-5d.$$

उदाहरण 7. हर अवस्था में कोष्टक के पहले '−' चिह्न देकर $a+b-c+d-e-f$ व्यंजक के पहले तीन पदों को एक कोष्टक के अन्दर और अंत के तीन पदों को एक और कोष्टक के अंदर रक्खो ; और इन दोनों कोष्टकों के अन्दर के तीन पदों में से अंत के दो पदों को एक और कोष्टक में रक्खो ; इस अंतिम कोष्टक के पहले भी '−' चिह्न रहे।

दिये हुए निर्देशों के अनुसार :

$$a+b-c+d-e-f=-\{-a-b+c\}-\{-d+e+f\}$$
$$=-\{-a-(b-c)\}-\{-d-(-e-f)\}.$$

प्रश्नमाला 11

हल करो :

1. $2a-3b-(4a-6b)+(-2a+5b)$.
2. $x+(-y+4x)-(-2x+3y)$.
3. $-(5x-y)+(-3x+y)-(2y-6x)$.
4. $3a-\{6a-(2b-a)\}$.
5. $-a-\{2b-(6a+4b)\}$.
6. $2a-\{5b-\overline{7b-2a}\}$.
7. $3-\{5-(6-\overline{7+9})\}$.
8. $-2-[-3-\{-4-(-5-6)\}]$.
9. $-a-[-3b-\{-2a-(-a-4b)\}]$.
10. $a-[2b-\{3c-(a-\overline{2b-3c})\}]$.
11. $3x-[5y-\{10z-(5x-\overline{10y-3z})\}]$.
12. $-a-[-b-\{-c-(-\overline{a-b-c})\}]$.

उल्टे क्रम से कोष्टकों को खोलकर (अर्थात् पहले बाहरवाला और अंत में सबसे भीतरवाला कोष्टक खोलकर) नीचे दिये व्यंजकों को हल करो :

13. $2x-[5y-\{9x-(10y-4x)\}]$.
14. $-5a-[3b-\{6a-(5b-7a)\}]$.
15. $-7m-[3n-\{8m-(4n-10m)\}]$.

16. $-2a-[-4b-\{-6c-(-8a-\overline{-10b-12c})\}]$.

17. $-3x-[-5y-\{-7z-(-9x-\overline{-11y-13z})\}]$.

18. $-2x-[-4y-\{-6z-(-3x-\overline{-5y-7z})\}]$.

19. $-x-[-3y+\{-5z-(-2x+\overline{-4y-6z})\}]$.

20. $-2a+[-5b-\{-8c+(-3a-\overline{-6b+9c})\}]$.

21. $-x+[-5y-\{-9z+(-3x-\overline{-7y+11z})\}]$.

हल करो :

22. $\{2a-(3b-5c)\}-[a-\{2b-(c-4a)\}-7c]$.

23. $[x-\{y-(z-x)\}-(y-z)]-[z-\{x-(y-z)\}]$.

24. $[2a-(b-c)-\{3b-(2a-c)\}-\{-2a+(c-4b)\}]$
$$-[-3b-(2a-4c)+\{6c-(2b-3a)\}-\{-5c+(6a-7b)\}].$$

'$a-b-c+d-m+n-x+y-z$' व्यंजक के

25. दूसरे, तीसरे तथा चौथे पदों को एक कोष्टक के अंदर जिसके पहले '$-$' चिह्न हो, और पाँचवे, छठे, तथा सातवें पदों को एक दूसरे कोष्ठक के अंदर जिसके सामने '$+$' चिह्न हो, रक्खो।

26. पहले पद को छोड़कर बाक़ी सब पदों को ऐसे कोष्टक के अंदर रक्खो जिसके पहले '$-$' चिह्न हो, और कोष्टक के अंदर के पदों के अन्तिम चार पदों को एक ऐसे कोष्टक के अंदर रक्खो जिसके पूर्व '$+$' चिह्न हो।

27. जिसके सामने कोई चिह्न न रहे ऐसे एक कोष्टक के भीतर पहले पाँच पदों को और जिसके सामने '$-$' चिह्न रहे, ऐसे एक कोष्टक के अंदर अंत के चार पदों को रक्खो, और इन दो कोष्टकों के अंदर के अंतिम तीन पदों को एक ऐसे कोष्टक के अंदर रक्खो, जिसके पहले '$-$' चिह्न हो।

28. सामने '$-$' चिह्न रहे ऐसे एक कोष्टक के अंदर आरम्भ से तीन तीन पदों को रक्खो ; और इन कोष्टकों के प्रत्येक के अंदर के तीन पदों में से अंत के दो पदों को ऐसे कोष्टक के अन्दर रक्खो जिसके सामने '$-$' चिह्न हों।

III. गुणन (Multiplication)

40. जब हम संख्या पर वही बीजीय क्रिया का प्रयोग करते हैं जिसका प्रयोग 1 (unity) पर करने से हमको दूसरी संख्या मालूम होती है तो कहा जाता है कि एक संख्या को किसी दूसरी एक संख्या द्वारा गुणन किया गया है।

$\because \quad 4=1+1+1+1,$

$\therefore \quad 4\times x$ अथवा $4x=x+x+x+x.$

इसी प्रकार

$$\left.\begin{aligned} 4\times5&=5+5+5+5 &&= 20\\ 3\times6&=6+6+6 &&= 18\\ 5\times3&=3+3+3+3+3 &&= 15 \end{aligned}\right\}\quad \cdots \text{ I}$$

$$\left.\begin{aligned} 3\times(-5)&=(-5)+(-5)+(-5) &&=-15\\ 4\times(-3)&=(-3)+(-3)+(-3)+(-3) &&=-12\\ 5\times(-4)&=(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4) &&=-20 \end{aligned}\right\}\quad \cdots \text{ II}$$

और चूँकि $\quad -4=-1-1-1-1,$

इसलिए $\quad (-4)\times x=-x-x-x-x.$

इसी प्रकार

$$\left.\begin{aligned} (-4)\times5&=-5-5-5-5 &&=-20\\ (-3)\times6&=-6-6-6 &&=-18\\ (-5)\times3&=-3-3-3-3-3 &&=-15 \end{aligned}\right\}\quad \cdots \text{ III}$$

और

$$\left.\begin{aligned} (-3)\times(-5)&=-(-5)-(-5)-(-5)\\ &=5+5+5 &&= 15\\ (-4)\times(-3)&=-(-3)-(-3)-(-3)-(-3)\\ &=3+3+3+3 &&= 12\\ (-5)\times(-4)&=-(-4)-(-4)-(-4)-(-4)-(-4)\\ &=4+4+4+4+4 &&= 20 \end{aligned}\right\}\quad \cdots \text{ IV}$$

जिस संख्या को गुणा करते हैं उसको गुण्य (multiplicand), जिस संख्या-द्वारा गुणा किया जाता है उसको गुणक (multiplier) और गुणा करके जो संख्या प्राप्त होती है उसको गुणनफल (product) कहते हैं।

प्रश्नमाला 12

गुणन की परिभाषा के अनुसार निम्नलिखित गुणनफल निकालो :

1. 5 को 3 द्वारा गुणा करने से।
2. 6 को 3 द्वारा गुणा करने से।
3. 9 को 4 ,, ,, ,, से।
4. − 8 को 4 ,, ,, ,, से।
5. −15 को 3 ,, ,, ,, से।
6. −13 को 6 ,, ,, ,, से।
7. 8 को −3 ,, ,, ,, से।
8. 7 को −5 ,, ,, ,, से।

9. 15 को -3 द्वारा गुणा करने से। 10. -9 को -4 द्वारा गुणा करने से।
11. -12 को -5 „ „ „ से। 12. -16 को -4 „ „ „ से।

41. गुणन के चिह्नों के नियम (Law of signs in multiplication) : ऊपर (नियम 40 में) दिये हुए नियम की व्याख्या से साफ मालूम होता है कि यदि a और b दोनों पूर्ण संख्यायें (whole numbers) हों, तो

$$\left.\begin{aligned}(+a)\times(+b)&=+(ab)\\(+a)\times(-b)&=-(ab)\\(-a)\times(+b)&=-(ab\\(-a)\times(-b)&=+(ab)\end{aligned}\right\}$$

इसलिए यदि गुण्य व गुणक दोनों का चिह्न एक ही हो, तो दो पूर्ण संख्याओं के गुणनफल का चिह्न '+' होता है, अर्थात् दोनों का चिह्न '+' हो या दोनों का चिह्न '−' हो ; यदि गुण्य व गुणक के चिह्न भिन्न हों, अर्थात् एक चिह्न '+' और दूसरा चिह्न '−' हो, तो गुणनफल का चिह्न '−' होता है।

गुण्य व गुणक पूर्ण संख्यायें न होकर यदि भिन्न संख्यायें हों, तब भी वही सिद्धान्त निकलता है। दृष्टान्त के लिए कहा जा सकता है, कि $\because\ -\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$ अर्थात् $\because$ 1 (unity) की तिहाई दो बार घटाने से $-\frac{2}{3}$ प्राप्त होता है, $\therefore$ किसी संख्या x को $-\frac{2}{3}$ द्वारा गुणा करने का अर्थ यह है कि x की तिहाई दो बार घटायी गयी है।

$$\therefore\quad (-\tfrac{2}{3})\times x=-\frac{x}{3}-\frac{x}{3}=-\frac{2x}{3}.$$

इसी प्रकार $(-\frac{2}{3})\times\frac{4}{5}=-\frac{4}{15}-\frac{4}{15}=-\frac{8}{15}$,

$$(-\tfrac{2}{3})\times(-\tfrac{4}{5})=-(-\tfrac{4}{15})-(-\tfrac{4}{15})$$
$$=\tfrac{4}{15}+\tfrac{4}{15}=\tfrac{8}{15}\ ;$$ आदि।

$\therefore$ गुणा का चिह्न सम्बन्धी नियम और भी व्यापक रूप में निम्न ढंग से प्रकट किया जा सकता है।

यदि गुण्य व गुणक का एक ही चिह्न हो तो गुणनफल धनचिह्नात्मक, और यदि गुण्य व गुणक के चिह्न भिन्न हों तो गुणनफल ऋणचिह्नात्मक होता है।

उपसिद्धान्त। $\because\ (-x)\times(-x)=x^2$ और $(+x)\times(+x)=x^2$, इसलिए $\sqrt{x^2}=\pm x$. $\therefore$ प्रत्येक बीजीय राशि के दो वर्गमूल (square-root) होते हैं, जिनकी असली क़ीमत एक किन्तु चिह्न भिन्न होते हैं।

उदाहरण। हल करो : $(a^2b-cd)(c^2-d^2)$, यदि $a=-2$, $b=-3$, $c=-4$ और $d=5$ हो।

चूँकि $a^2b=(-2)^2\times(-3)=4\times(-3)=-12$,

और $cd=(-4)\times 5=-20$;

$\therefore$ $a^2b-cd=-12-(-20)=-12+20=8$. ... (क)

और चूँकि $c^2=(-4)^2=16$,

और $d^2=(5)^2=25$,

$\therefore$ $c^2-d^2=16-25=-9$. ... ... (ख)

इसलिए (क) व (ख) से

$$(a^2b-cd)(c^2-d^2)=8\times(-9)=-72.$$

प्रश्नमाला 13

निम्नलिखित व्यंजकों की क़ीमत निकालो :

1. $ab-cd$, यदि $a=-2$, $b=-3$, $c=-8$, $d=6$ हो।

2. $(x^2-y^2)b-axy$, यदि $a=1$, $b=-3$, $x=4$, $y=-5$ हो।

3. $3x^2y-3xy^2+xyz$, यदि $x=-1$, $y=-2$, $z=-7$ हो।

4. $(-a)b^2-cd^2+b(-c)^2$, यदि $a=5$, $b=-7$, $c=4$, $d=-3$ हो।

5. $-x^2(-c)+b^2(-y)+4a^3$, यदि $a=-2$, $b=-3$, $c=-1$, $x=5$, $y=6$ हो।

6. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$, यदि $a=-2$, $b=-5$, $c=-7$ हो।

7. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$, यदि $x=-3$, $y=8$, $z=-5$ हो।

8. $p^3(q^2-r^2)+q^3(r^2-p^2)+r^3(p^2-q^2)$, यदि $p=-3$, $q=-5$, $r=-7$ हो।

9. $a^3+b^3+c^3-3abc$, यदि $a=-12$, $b=-13$, $c=-15$ हो।

10. सिद्ध करो : $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$, यदि $a=3$, $b=-5$ हो।

42. सिद्ध करना होगा कि $a\times b=b\times a$; अर्थात् a को b द्वारा गुणा करना, और b को a द्वारा गुणा करना दोनों एक ही हैं।

(1) फ़र्ज़ करो कि a और b दो धनात्मक पूर्ण राशियाँ (positive integers) हैं।

1 को b बार एक आड़ी लकीर (horizontal row) में लिखो और ऐसी a पंक्तियाँ एक के नीचे एक इस प्रकार लिखो कि प्रत्येक पंक्ति के एक विशेष स्थान पर जितने 1 हैं सब एक एक खड़ी लकीर (vertical column) में पड़ें।

आड़ी लकीर में स्थान / खड़ी लकीर में स्थान	(1)	(2)	(3)	(4)		(b) तक
(1)	1	1	1	1	...	1
(2)	1	1	1	1	...	1
(3)	1	1	1	1	...	1
(4)	1	1	1	1	...	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	
(a) तक	1	1	1	1	...	1

इस प्रकार लिखने से यह स्पष्ट देखा जाता है कि इसमें a-संख्यक आड़ी लकीरें हैं, और प्रत्येक लकीर में 1, b बार लिखा गया है।

अब जितने 1 लिखे गये हैं उनकी संख्या गिन डालो।

चूँकि संख्या में a आड़ी लकीरों में से प्रति लकीर में b इकाइयां हैं,

∴ सब इकाइयों की संख्या = (पहली आड़ी लकीर के 1) + (दूसरी लकीर के 1) + (तीसरी लकीर के 1) + ... + (अंत की a-संख्यक लकीर के 1)

$= b + b + b + \cdots b \times$ (संख्या में a पद) $= a \times b$ ··· (1)

फिर चूँकि, खड़ी लकीर में प्रत्येक लकीर में a बार 1 लिखा गया है,

इसलिए इकाइयों की पूरी संख्या = (पहली खड़ी लकीर के 1) + (दूसरी खड़ी लकीर के 1) + (तीसरे खड़ी लकीर के 1) + ... + (अंतिम b-संख्यक लकीर के 1)

$= a + a + a + a + \cdots\cdots + a$ (रेखा में b-संख्यक पद तक) $= b \times a$ ··· (2)

इसलिए (1) व (2) से यह प्रकट है कि $a \times b = b \times a$*.

---

* चूँकि $ab = ba$, तो ab को यदि 'a बार b' पढ़ें, अथवा 'b बार a' पढ़ें तो ये दोनों एक ही हैं। परन्तु जब तक प्रमाणित न हो जाय कि $a \times b = b \times a$ यह उचित है कि ab का केवल एक ही प्रकार से अर्थ किया जाय। यदि किसी नये विद्यार्थी को बतलाया जाय कि $7a$ का अर्थ है 7 बार a और 7×4 का अर्थ है 4 बार 7 तो अपने आप उसको यह मालूम हो जायगा, कि 'ab' और 'ba' दोनों का अर्थ एक ही है और $ab = ba$ प्रमाणित करने की कोई आवश्यकता उसे न मालूम होगी। इस भ्रम को दूर करने के लिए ab को दोनों में से केवल एक ही अर्थ में, जैसे 'a बार b' अथवा 'b को a द्वारा गुणा किया गया है,' मान लिया गया है।

(2) अब फ़र्ज़ करो कि a व b दोनों धनात्मक भिन्न राशियाँ हैं।

यदि $a=\frac{m}{n}$ और $b=\frac{p}{q}$ हो और m, n, p, q में से प्रत्येक धनात्मक पूर्ण राशि है

$$\text{तो } a\times b=\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}=m\times\left\{\left(\frac{p}{q}\right)\div n\right\}=m\times\frac{p}{nq}=\frac{mp}{nq} \quad \cdots \quad \text{(I)}$$

$$\text{और } b\times a=\frac{p}{q}\times\frac{m}{n}=p\times\left\{\left(\frac{m}{n}\right)\div q\right\}=p\times\frac{m}{qn}=\frac{pm}{qn}. \quad \cdots \quad \text{(II)}$$

अब चूँकि p, q, m, n में से प्रत्येक धनात्मक पूर्ण राशि है $\therefore mp=pm$, और $nq=qn$.

इसलिए (I) व (II) से $\boldsymbol{a\times b=b\times a}$.* ... ... (क)

(3) 41 वें नियम के अनुसार यह पाया जाता है कि,

$$x\times(-y)=-(xy),$$

$$\text{और} \quad (-y)\times x=-(yx)\,; \quad \text{किन्तु } xy=yx.$$

$$\therefore \quad x\times(-y)=(-y)\times x. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ख)}$$

(4) 41 वें नियम से पाया जाता है कि

$$(-x)\times(-y)=+xy,$$

$$\text{और} \quad (-y)\times(-x)=+yx\,; \quad \text{किन्तु } xy=yx.$$

$$\therefore \quad (-x)\times(-y)=(-y)\times(-x). \quad \cdots \quad \text{(ग)}$$

इसलिए (क), (ख) व (ग) से यही सिद्धान्त निकलता है, कि a और b चाहे कैसी ही दो राशियाँ हों हर हालत में $\boldsymbol{a\times b=b\times a}$.

---

* a और b यदि भिन्न राशियाँ हो तो $a\times b=b\times a$ को नीचे दिये हुए उदाहरण द्वारा भी सिद्ध कर सकते हैं। मान लो यह प्रमाण करना है कि $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ का अर्थ है कि किसी वस्तु के चार बटा पाँच हिस्से को तीन बराबर हिस्सों में बाँटकर उनमें से दो हिस्से लिये गये हैं; और '$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$' का अर्थ है कि किसी वस्तु के दो बटा तीन हिस्से को पाँच समान अंशों में विभाजित कर चार अंश लिये गये हैं।

A ———————————— B

अब फ़र्ज़ करो कि AB, 15 इंच लम्बी एक सीधी रेखा है। इस रेखा का $\frac{4}{5}$ हिस्सा 12 इंच है; और उसका $\frac{2}{3}$ हिस्सा लेने से 8 इंच लम्बाई की रेखा होती है; फिर चूँकि AB रेखा का $\frac{2}{3}$ अंश 10 इंच है; और उसका $\frac{4}{5}$ अंश 8 इंच है;

$\therefore$ इस रेखा का $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ हिस्सा = इस रेखा का $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ हिस्सा; अर्थात् $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$; अन्य भिन्न संख्याओं के लिए भी ऐसे उदाहरण दिये जा सकते हैं।

प्रश्नमाला 14

सिद्ध करो :

1. $4 \times 5 = 5 \times 4$. 2. $6 \times 3 = 3 \times 6$. 3. $7 \times 5 = 5 \times 7$.
4. $4 \times 8 = 8 \times 4$. 5. $9 \times 5 = 5 \times 9$.

43. **सिद्ध करना होगा कि $(ab) \times c = a \times (bc)$, अथवा $= b \times (ac)$;**
अर्थात् c को a व b के गुणनफल द्वारा गुणा करने से जो राशि प्राप्त होती है, c को b अथवा a से गुणन करके उस गुणनफल को फिर दूसरी राशि जो a और b में से बच जाती है उससे गुणन करने से वही राशि प्राप्त होती है।

b कोष्टकों को एक आड़ी लकीर में इस भाँति रक्खो कि प्रत्येक कोष्टक में c-इकाई हो ; इन पंक्तियों को एक के नीचे एक इस प्रकार से रक्खो कि प्रत्येक पंक्ति के विशिष्ट स्थानों के कोष्टक एक एक खड़ी रेखा में पड़ें, जैसे—

खड़ी रेखा में स्थान		(1)	(2)	(3)	(4)	...	(b) तक
(1)	आड़ी रेखा में स्थान	[c]	[c]	[c]	[c]	...	[c]
(2)		[c]	[c]	[c]	[c]	...	[c]
(3)		[c]	[c]	[c]	[c]	...	[c]
(4)		[c]	[c]	[c]	[c]	...	[c]
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(a) तक		[c]	[c]	[c]	[c]	...	[c]

अब यह कहा जा सकता है, कि खड़ी रेखाओं की संख्या b है ; और प्रत्येक खड़ी रेखा में कोष्टकों की संख्या 'a' है, और प्रत्येक कोष्टक में c इकाइयाँ हैं।

अब ∵ $a \times b$ कोष्टकों की संख्या है, और प्रति कोष्टक में c इकाइयाँ हैं, इसलिए कुल इकाइयों की संख्या $= (ab) \times c$ ... ... (a)

फिर ∵ संख्या में a आड़ी रेखायें हैं, जिनके प्रत्येक c इकाईवाले कोष्टकों की संख्या b है, इसलिए कुल इकाइयों की संख्या $= a \times (bc)$ ... ... (β)

और ∵ खड़ी रेखाओं की संख्या b है और प्रति खड़ी रेखा c इकाईवाले कोष्टकों की संख्या a है ; ∴ कुल इकाइयों की संख्या $= b \times (ac)$ ... ... (γ)

इसलिए (a), (β) और (γ) से सिद्ध हुआ $(ab) \times c = a \times (bc) = b \times (ac)$.

उपसिद्धान्त। 42 वें व 43 वें नियमों के सिद्धान्तों से माळूम होता है कि $abc = bca = cab$, कारण 43 वें नियम के अनुसार $abc = a \times (bc)$ और 42 वें नियम के अनुसार $a \times (bc) = (bc) \times a = bca$; $\therefore abc = bca$; इसी प्रकार $bca = cab$. इससे फल निकला कि :—

गुणनखंडों को चाहे किसी क्रम से रक्खा जाय हर हालत में गुणनफल का मूल्य एक ही रहता है।

टीका 1. यह ठीक है कि गुणनफल के गुणनखंडों को चाहे जिस क्रम में लिखा जाय, पर उसके मूल्य में कोई हेरफेर नहीं होता, फिर भी गुणनखंडों में से अंक गुणक को पहले, और वर्ण गुणकों को वर्णमाला के क्रम से लिखने पर आसानी होती है, जैसे,

$c^3 \times d \times 7 \times b \times a^4$ को $7a^4bc^3d$ लिखा जाता है।

टीका 2. अब हम 15 वें नियम में बतलाई हुई 'गुणक' की परिभाषा कुछ बदलकर लिख सकते हैं। किसी गुणनफल के गुणनखंडों में से एक या एक से अधिक गुणनखंडों को बाक़ी गुणनखंडों का गुणक (co-efficient) कहा जा सकता है। जैसे $7abcd$ में $7ac$ को bd का गुणक कह सकते हैं, कारण $7abcd$ को $7acbd$ रूप में भी लिख सकते हैं।

44. m व n यदि दो धनात्मक पूर्ण राशियाँ हों, तो

सिद्ध करना होगा कि $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

ध्यान देने की बात। 42 वें नियम में बतलाया गया है कि '$\times$' चिह्न द्वारा सम्मिलित दो राशियों में से किसी को भी गुणक और दूसरे को गुण्य माना जा सकता है। इसलिए '$a \times b$' के अर्थ को सीमित करने का अब कोई प्रयोजन नहीं रहा।

चूँकि $a^2 = aa$, और $a^3 = aaa$,

इसलिए $a^2 \times a^3 = (aa) \times (aaa) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{2+3}$.

और चूँकि $a^4 = aaaa$, और $a^6 = aaaaaa$,

इसलिए $a^4 \times a^6 = (aaaa) \times (aaaaaa) = aaaaaaaaaa = a^{10} = a^{4+6}$.

मामूली तौर पर, चूँकि $a^m = aaaa$ ... ... m-संख्यक गुणनखंड

और $a^n = aaaaa$ ... ... n-संख्यक गुणनखंड

इसलिए $a^m \times a^n = (aaaa$ ... ... m-संख्यक गुणनखंड$) \times$

$(aaaaa$ ... ... n-संख्यक गुणनखंड$)$

$= aaaaaaaaa......$ $(m+n)$-संख्यक गुणनखंड

$= a^{m+n}$.

उपसिद्धान्त 1. $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$, यदि m, n, p में से प्रत्येक धनात्मक पूर्ण राशि हो।

चूँकि $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{(m+n)+p} = a^{m+n+p}$.

उपसिद्धान्त 2. $(a^m)^n = a^{mn}$, यदि m व n में से प्रत्येक धनात्मक पूर्ण राशि हो।

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots n$-संख्यक गुणनखंड तक

$= a^{m+m+m+\cdots n}$-संख्यक पद तक $\cdots\cdots\cdots = a^{mn}$.

45. उक्त नियमों का प्रयोग।

उदाहरण 1. सिद्ध करो : $(-ab)^2 = a^2b^2$.

$(-ab)^2 = (-ab) \times (-ab)$

$= (ab) \times (ab)$ [नियम 41]

$= a \times b \times a \times b$ [नियम 43]

$= a \times a \times b \times b$ [43 वें नियम का उपसि०]

$= (aa) \times (bb)$ [नियम 43]

$= a^2b^2$. [नियम 44]

उदाहरण 2. गुणा करो : $-5a^3b^2$ को $4a^5b^4$ से।

$(-5a^3b^2) \times (4a^5b^4) = -\{(5a^3b^2) \times (4a^5b^4)\}$ [नियम 41]

$= -\{5 \times a^3 \times b^2 \times 4 \times a^5 \times b^4\}$ [नियम 43]

$= -\{5 \times 4 \times a^3 \times a^5 \times b^2 \times b^4\}$ [43 वें नियम का उपसि०]

$= -\{20 \times (a^3a^5) \times (b^2b^4)\}$ [नियम 43]

$= -20a^8b^6$. [नियम 44]

उदाहरण 3. हल करो : $(-2x^5y^4z) \times (4x^2y^7z^2) \times (-6xy^3z^4)$.

$(-2x^5y^4z) \times (4x^2y^7z^2)$

$= -\{(2x^5y^4z) \times (4x^2y^7z^2)\}$

$= -\{2 \times x^5 \times y^4 \times z \times 4 \times x^2 \times y^7 \times z^2\}$

$= -\{2 \times 4 \times x^5 \times x^2 \times y^4 \times y^7 \times z \times z^2\}$

$= -\{8 \times (x^5x^2) \times (y^4y^7) \times (zz^2)\}$

$= -8x^7y^{11}z^3$.

इसलिए दी हुई राशि

$= (-8x^7y^{11}z^3) \times (-6xy^3z^4) = (8x^7y^{11}z^3) \times (6xy^3z^4)$

$= 8 \times x^7 \times y^{11} \times z^3 \times 6 \times x \times y^3 \times z^4$

$= 8 \times 6 \times x^7 \times x \times y^{11} \times y^3 \times z^3 \times z^4$

$= 48 \times (x^7x) \times (y^{11}y^3) \times (z^3z^4) = 48x^8y^{14}z^7$.

प्रश्नमाला 15

सिद्ध करो :

1. $(-a) \times 6b = -6ab.$
2. $(4a) \times (-2b) = -8ab.$
3. $-7x^7 \times 8x^8 = -56x^{15}.$
4. $(-2b) \times (-10a) = 20ab.$
5. $(-7c) \times (-3ab) = 21abc.$
6. $10 \times 35 = 25 \times 14.$
7. $15 \times 75 = 5^3 \times 3^2.$
8. $(-a)^3 = -a^3.$
9. $(-ab)^3 = -a^3b^3.$
10. $(a^4b^2)^3 = a^{12}b^6.$
11. $(-a^3b^5)^2 = a^6b^{10}.$
12. $(-x)^5 = -x^5.$
13. $(-4x^2y^4)^2 = 16x^4y^8.$

गुणा करो :

14. $2x^2y$ को $-3x^5y^4$ से।
15. $-7a^2b^3c$ का $-3abc^8$ से।
16. $-5x^{12}y^3$ को $-8x^5y^{13}$ से।
17. $-12x^3y^3z^2$ को $13x^7y^6z^4$ से।
18. $-14xy^5z^8$ को $-10x^5y^2z^{12}$ से।

हल करो :

19. $(-x)^3 \times (-2xy^2)^2 \times (x^2y)^3.$
20. $(-2a^2) \times (7a^4b^7) \times (5a^9b^5).$
21. $(-6x^5y^2z) \times (2z^4x^3y^5) \times (-4y^3z^2x^8).$
22. $(-3x^2y) \times (4zy^2x) \times (-x^3z^5y^4) \times (2zxy).$

46. इसके पहले के नियम में बताये ढंग से सरल पदों का गुणनफल निकाला जा सकता है। इससे कठिन गुणन के समय ये सब काम साधारणतः ज़बानी हल किये जाते हैं। विद्यार्थियों को ऐसे गुणन करने में विशेष अभ्यास कराने के लिए नीचे एक प्रश्नमाला दी गई है :—

उदाहरण 1. $3x^2$ व $-5xy$ का गुणनफल बताओ।

$$(3x^2) \times (-5xy) = -15x^3y.$$

उदाहरण 2. $-5a^2b$ व $-8ab^2$ का गुणनफल बताओ।

$$(-5a^2b) \times (-8ab^2) = 40a^3b^3.$$

प्रश्नमाला 16

नीचे दी हुई राशियों का गुणनफल लिखो :

1. $-2x^3$ व $5x^4$.
2. $5a^3b$ व $-4ab^5$.
3. $-3m^2n^5$ व $-7n^3m^5$.
4. $3x^3y^5$ व $-6xy^2$.
5. $-a^3b^2$ व $-3a^4b^8$.
6. $5mn^6$ व $-8m^7n$.
7. $-10xyz^2$ व $-5xy^2z$.
8. $4x^3y^3z$ व $-6xyz^3$.
9. $-6x^2y^3z^4$ व $-8x^3y^2z$.
10. $-5a^3b^5c^7$ व $-5a^2b^4c^6$.
11. $3x^2yz^4$ व $-8xy^2z$.
12. $-4abxy$ व $-8a^2xby^2$.
13. $-7a^2b^2z^3$ व $-5abz$.
14. $5a^4x^2y$ व $-12x^5y^4a^3$.
15. $-14xy^4$ व $-5x^4yz$.
16. $2abc^5$ व $-9a^7b^5c$.
17. $-7a^3x^5y$ व $-9x^3ya^6$.
18. $-8x^6y^2z^5$ व $-20y^5z^2x^8$.
19. $-13a^8b^{13}c^{15}$ व $-5bc^5a^2$.
20. $-7a^7x^8y^6z^2$ व $-16z^5x^2a^6y^3$.

47. सिद्ध करो : $a(b+c)^* = ab+ac$.

b और c चाहे कैसी ही राशियाँ हों और a यदि धनात्मक पूर्णराशि हो, तो

$$a(b+c)=(b+c)+(b+c)+(b+c)+\cdots\cdots a\text{-संख्यक पदों तक}$$
$$=(b+b+b+\cdots\cdots a\text{-पदों तक})$$
$$+(c+c+c+\cdots\cdots a\text{-पदों तक})$$
$$=ab+ac. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (1)$$

$\therefore$ उल्टी तरह से $\frac{ab+ac}{a}=b+c=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}$; अर्थात् p व q चाहे जैसी राशियाँ हों और यदि r एक धनात्मक पूर्णराशि हो तो

$$\frac{p+q}{r}=\frac{p}{r}+\frac{q}{r}. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (A)$$

अब फर्ज़ करो कि a एक धनात्मक भिन्न राशि (positive fraction) है, अर्थात् $a=\frac{m}{n}$; किन्तु m व n दोनों धनात्मक पूर्णराशियाँ हैं।

$$\text{तो } \frac{m}{n}(b+c)=m\times\frac{b+c}{n}$$
$$=\frac{m(b+c)}{n}=\frac{mb+mc}{n}=\frac{mb}{n}+\frac{mc}{n}=\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c. \quad \ldots \quad (2)$$

---

* प्रत्येक द्विपद राशि को $b+c$ रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरण के रूप में कहा जा सकता है कि $2x^2$ को b और $-3y^2$ को c मानने से, $2x^2-3y^2$ को अर्थात् $(2x^2)+(-3y^2)$ को अवश्य $b+c$ रूप में मान ले सकते हैं।

इसलिए (1) व (2) से स्पष्ट है कि a यदि कैसी भी धनात्मक राशि हो,

$$a(b+c)=ab+ac. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

फिर फ़र्ज़ करो कि a एक ऋणात्मक राशि है; और $-x$ के बराबर है; इस हाल्त में x अवश्य एक धनात्मक राशि है। तब :—

$$\begin{aligned}(-x).(b+c) &= -[x(b+c)] \\ &= -(xb+xc) \\ &= -xb-xc \\ &= (-x).b+(-x).c\,; \\ &= ab+ac.\end{aligned}$$

इसलिए देखा जाता है कि a के किसी भी ऋण मूल्य के लिए

$$a(b+c)=ab+ac. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

इसलिए (3) और (4) से सिद्ध होता है, कि a कोई राशि क्यों न हो,

$$a(b+c)=ab+ac.$$

उपसिद्धान्त 1. उल्टे क्रम में $ab+ac=a(b+c)$;

इस प्रकार $xya^2+xyb^2=xy(a^2+b^2)$.

उपसिद्धान्त 2. चूँकि $b-c=b+(-c)$,

इसलिए $a(b-c)=a[b+(-c)]=ab+a(-c)=ab-ac$.

उल्टे क्रम में $ab-ac=a(b-c)$. इस प्रकार $2ax-2ay=2a(x-y)$.

उपसिद्धान्त 3. $a(b+c+d)=a\{b+(c+d)\}=ab+a(c+d)$

$=ab+ac+ad$.

इस प्रकार $a(b+c+d+e+f+\cdots)=ab+ac+ad+ae+af+\cdots$

इसलिए यदि किसी बहुपद व्यंजक को एक सरल राशि या पद से गुणा करें, तो यह गुणनफल व्यंजक के प्रत्येक पद को सरल राशि-द्वारा गुणन करने पर प्राप्त गुणनफलों के योग के बराबर होता है।

उल्टे क्रम में $ab+ac+ad+ae+\cdots=a(b+c+d+e+\cdots)$.

उदाहरण 1. $2ab-3b^2$ को $5ab$ से गुणा करो।

$$\begin{aligned}5ab(2ab-3b^2) &= 5ab\{2ab+(-3b^2)\} \\ &= 5ab\times 2ab+5ab\times(-3b^2) \\ &= 10a^2b^2-15ab^3.\end{aligned}$$

उदाहरण 2. गुणा करो : $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 4$ को $-6x^2$ से।

$$(-6x^2)(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 4)$$
$$= (-6x^2)\{x^4 + (-3x^3) + 5x^2 + (-6x) + 4\}$$
$$= (-6x^2).x^4 + (-6x^2)(-3x^3) + (-6x^2).\ 5x^2 + (-6x^2)(-6x) + (-6x^2).4$$
$$= -6x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 36x^3 - 24x^2.$$

ध्यान देने की बात। नये विद्यार्थियों को ऊपर दिखलाये हुए नियम से हरएक प्रश्न को हल करना चाहिए; परन्तु पूरा अभ्यास होने पर नीचे दिये हुए उदाहरणों के अनुसार एक साथ ही फल लिख दिया जा सकता है।

उदाहरण 3. गुणा करो : $-4a^4 + 5a^3b - 6a^2b^2 - 8ab^3 + 9b^4$ को $-3a^2b^2$ से।

$$\begin{array}{l} -4a^4 + 5a^3b - 6a^2b^2 - 8ab^3 + 9b^4 \\ \underline{-3a^2b^2} \\ 12a^6b^2 - 15a^5b^3 + 18a^4b^4 + 24a^3b^5 - 27a^2b^6 \end{array}$$

उदाहरण 4. हल करो : $2x^2(3x-2) + 2x(2x+3) - 6(x-3)$.

अब, $2x^2(3x-2) = 6x^3 - 4x^2,$
$2x(2x+3) = 4x^2 + 6x,$
$6(x-3) = 6x - 18.$

इसलिए व्यंजक $= (6x^3 - 4x^2) + (4x^2 + 6x) - (6x - 18)$
$= 6x^3 - 4x^2 + 4x^2 + 6x - 6x + 18 = 6x^3 + 18.$

उदाहरण 5. हल करो : $3a(2a-5) - 3a(a-6)$.

फर्ज़ करो कि $x = 2a - 5$ व $y = a - 6$.

$$3a(2a-5) - 3a(a-6) = 3ax - 3ay = 3a(x-y)$$
$$= 3a\{(2a-5) - (a-6)\}$$
$$= 3a(a+1) = 3a^2 + 3a.$$

प्रश्नमाला 17

गुणा करो :

1. $2x - y$ को $-x$ से।
2. $a - 2b + 3c$ को $-5a$ से।
3. $2x - 3y$ को $4xy$ से।
4. $2a^2 - 3b^2 - c^2$ को abc से।
5. $x^2y - 2xy^2 - y^3$ को $-3xy$ से।

6. $3a^2b^2 - ab^2 - 5a^3 + a^2b$ को $7b^2$ से ।

7. $3a^2x - 4ax^2 + 5ax$ को $-2a^2$ से ।

8. $-2m^3 + 3m^2n - 5mn^2$ को $4mn$ से ।

9. $a^2bc - b^2ca + c^2ab$ को $-abc$ से ।

10. $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$ को xyz से ।

11. $-2c^3d + 3d^3c - 5cd^2 - 4c^2d^2$ को $-6c^2d^4$ से ।

12. $8a^4 - 6a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3$ को $-2a^3b^3$ से।।

हल करो :

13. $7x^3(x-2) - 2x^2(x-3) - 8x^2(1-2x)$.

14. $x^2(y^2 - z^2) + y^2(z^2 - x^2) + z^2(x^2 - y^2)$.

15. $9x^3(x^3 - 2y^2) + 5y^2(3x^3 + y^2) + 3y^2(x^3 - 10y^2)$.

16. $x^3(x^3 + 2x^2 + 2x) - 2x^2(x^3 + 2x^2 + 2x) + 2x(x^3 + 2x^2 + 2x)$.

17. $a^6b^3(a^6b^3 - 2a^4b^2 + 2a^2b) + 2a^4b^2(a^6b^3 - 2a^4b^2 + 2a^2b)$
$+ 2a^2b(a^6b^3 - 2a^4b^2 + 2a^2b)$.

18. $2a^9b^6(2a^9b^6 + 6a^6b^4 + 9a^3b^2) - 6a^6b^4(2a^9b^6 + 6a^6b^4 + 9a^3b^2)$
$+ 9a^3b^2(2a^9b^6 + 6a^6b^4 + 9a^3b^2)$.

19. $a^2(2x - 3y) + a^2(3x + 4y) - a^2(5x - 2y)$.

20. अगर $a = x^2 - yz$, $b = y^2 - zx$ और $c = z^2 - xy$ हो, तो
(i) $ax + by + cz$; (ii) $cx + ay + bz$ का मूल्य निकालो ।

IV. भाग (Division)

48. परिभाषा : कोई भी तीन राशियाँ a, b और c का परस्पर में ऐसा सम्बन्ध हो कि $a = b \times c$, तो a राशि को b राशि-द्वारा विभाज्य (divisible) कहते हैं ; अथवा संक्षेप में $a \div b = c$ कहा जाता है । इसी प्रकार यदि $x = y \times z$ हो तो $x \div y = z$ और $x \div z = y$. जिस राशि में भाग देते हैं उसको भाज्य (dividend), जिस राशि-द्वारा भाग दिया जाता है उसको भाजक (divisor) और भाग देने से जो राशि मिलती है उसको भजनफल (quotient) कहते हैं ।

टीका। a में b का भाग देने से जो भजनफल होता है उसको साधारण रूप में $\frac{a}{b}$ द्वारा भी प्रकट करते हैं ।

49. मूल साध्य (Fundamental Propositions).:

(1) सिद्ध करो कि $a \div b \times b = a$.

यदि '$a \div b$' x द्वारा सूचित हो, तो परिभाषा के अनुसार

$$x \times b = a.$$

$$\therefore \quad a \div b \times b = x \times b = a.$$

(2) सिद्ध करो कि $a \div b \div c = a \div bc$.

$$(a \div b \div c) \times bc = \{(a \div b) \div c\} \times c \times b$$
$$= [\{(a \div b) \div c\} \times c] \times b$$
$$= (a \div b) \times b = a.$$

इसलिए परिभाषा के अनुसार $a \div b \div c = a \div bc$;

<u>अर्थात् किसी राशि को एक के बाद अन्य दो राशियों द्वारा एक के बाद दूसरी से भाग करना और उस राशि को उन दोनों राशियों के गुणनफल द्वारा भाग करना एक ही बात है।</u>

उपसिद्धान्त। प्रकट है कि $a \div b \div c = a \div c \div b$; कारण दोनों $a \div bc$ के बराबर हैं।

(3) सिद्ध करो कि $a \div b = a \times \frac{1}{b}$.

अब $$\frac{1}{b} \times b = 1 \div b \times b = 1;$$

$$\therefore \quad a \times \frac{1}{b} \times b = a \times \left(\frac{1}{b} \times b\right) = a \times 1 = a;$$

अर्थात् $$\left(a \times \frac{1}{b}\right) \times b = a.$$

परिभाषा के अनुसार $$a \div b = a \times \frac{1}{b}.$$

<u>इसलिए किसी एक राशि को दूसरी एक राशि से भाग करना और पहली राशि को दूसरी राशि के व्युत्क्रम (reciprocal) द्वारा गुणन करना एक ही बात है।</u>

दो राशियों का गुणनफल यदि 1 (unity) हो, तो उनमें से एक राशि को दूसरी राशि का व्युत्क्रम कहते हैं।

उपसिद्धान्त। $a \div b \times c = a \times c \div b$;

क्योंकि $$a \div b \times c = a \times \frac{1}{b} \times c = a \times c \times \frac{1}{b} = a \times c \div b.$$

50. भाग में चिह्न सम्बन्धी नियम :

चूँकि $a \times (-b) = -ab,$

इसलिए परिभाषा के अनुसार $\left.\begin{aligned}(-ab) \div a &= -b \\ \text{और} \quad (-ab) \div (-b) &= a\end{aligned}\right\}$ ... ... (I)

फिर चूँकि $(-a) \times (-b) = ab,$

इसलिए $\left.\begin{aligned}ab \div (-a) &= -b \\ \text{और} \quad ab \div (-b) &= -a\end{aligned}\right\}$ ... ... (II)

फिर यह भी स्पष्ट है कि, $\left.\begin{aligned}ab \div a &= b \\ \text{और} \quad ab \div b &= a\end{aligned}\right\}$ ... ... (III)

इसलिए (I), (II) और (III) से भाग के चिह्नों के सम्बन्ध में नीचे दिये हुए नियम पाये जाते हैं।

भाज्य व भाजक के यदि एक ही चिह्न हों, तो भजनफल का धनचिह्न होता है। और यदि भिन्न चिह्न हों, तो भजनफल का ऋणचिह्न होता है, अर्थात् समचिह्न से धनात्मक व विषमचिह्न से ऋणात्मक चिह्न उत्पन्न होता है।

1. एक सरल या एकपदराशि का दूसरी एकपदराशि द्वारा भाग : यहाँ कई विशेष अवस्थाओं की जांच की जायगी—

(1) चूँकि $3a^2b \times 5a^3b^2c = 15a^5b^3c,$

इसलिए $(15a^5b^3c) \div (5a^3b^2c) = 3a^2b.$

$\therefore$ यदि भाज्य $= 15a^5b^3c$ हो, तो,
$= 3 \times 5 \times a^3 \times a^2 \times b^2 \times b \times c,$
और भाजक $= 5a^3b^2c$ हो, तो भजनफल $= 3a^2b.$ ... (I)

(2) चूँकि $(-2a^{10}b^2cd) \times (-3a^5c^2) = 6a^{15}b^2c^3d,$

इसलिए $(6a^{15}b^2c^3d) \div (-2a^{10}b^2cd) = -3a^5c^2.$

$\therefore$ यदि भाज्य $= 6a^{15}b^2c^3d$ हो, तो,
$= 2 \times 3 \times a^{10} \times a^5 \times b^2 \times c \times c^2 \times d,$
और भाजक $= -2a^{10}b^2cd$ हो, तो भजनफल $= -3a^5c^2.$ ... (II)

(3) चूँकि $(-5a^8b^5c^2d) \times (4b^3c^4) = -20a^8b^8c^6d,$

इसलिए $(-20a^8b^8c^6d) \div (-5a^8b^5c^2d) = 4b^3c^4.$

$\therefore$ यदि भाज्य $= -20a^8b^8c^6d$ हो, तो,
$= (-5) \times 4 \times a^8 \times b^5 \times b^3 \times c^2 \times c^4 \times d,$
और भाजक $= -5a^8b^5c^2d$ हो, तो भजनफल $= 4b^3c^4.$ ... (III)

(I), (II) व (III) से एक सरल राशि में दूसरी एक सरल राशि द्वारा भाग देने के नीचे दिये हुए नियम निकलते हैं :—

<u>भाज्य में से भाजक के सभी गुणनखंड निकालने पर जो राशि बच जाती है वह भजनफल होती है, और उसके पहले '+' चिह्न होता है यदि भाज्य-भाजक के समचिह्न हों, और '−' होता है यदि इनके चिह्न विषम हों।</u>

टीका। अब $a^{12} \div a^7 = (a^5 \times a^7) \div a^7 = a^5 [= a^{12-7}]$.

इसी प्रकार $a^{20} \div a^9 = a^{11}$; $a^{21} \div a^{14} = a^7$ आदि।

इसलिए साधारण तौरपर, यदि m व n दो धनात्मक पूर्ण राशियाँ हों और $m > n$ हो,

तो $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

उदाहरण 1. $18m^3n^2p$ में $-6m^2n^2p$ का भाग दो।

भाज्य $= 18m^3n^2p$

$= 6 \times 3 \times m^2 \times m \times n^2 \times p$.

भाजक $= -6m^2n^2p$.

$\therefore$ भागफल $= -3m$.

उदाहरण 2. $-24a^7b^3c$ में $-6a^4bc$ का भाग दो।

भाज्य $= -24a^7b^3c$

$= (-6) \times 4 \times a^4 \times a^3 \times b \times b^2 \times c$.

भाजक $= -6a^4bc$.

$\therefore$ भजनफल $= 4a^3b^2$.

प्रश्नमाला 18

भाग दो :

1. $16x^4$ में $-4x$ का।
2. $-18x^6$ में $6x^2$ का।
3. $-20a^7x^5$ में $-5a^3x^2$ का।
4. $36x^{10}y^9$ में $12x^5y^4$ का।
5. $-14a^4b^3c$ में $-7a^2bc$ का।
6. $-20p^{12}q^8r^2$ में $10p^{10}q^6r^2$ का।
7. $-70x^{16}y^9z$ में $-14x^{10}y^5$ का।
8. $64a^{12}b^7c^5$ में $-8a^9b^7c^3$ का।
9. $-81m^{13}n^{14}p^5$ में $27m^8n^8p^4$ का।
10. $-69a^7b^4c^9$ में $-23a^5b^4c^7$ का।
11. $25x^{20}y^3z^8$ में $-5x^{16}yz^8$ का।
12. $-42a^{23}x^{23}y^9z^3$ में $-14a^{17}x^{18}y^5z$ का।

13. a^{101} में a^{57} का। 14. $28x^{205}$ में $-4x^{157}$ का।

15. $56m^{307}$ में $-8m^{289}$ का।

16. $-91a^{138}b^{209}$ में $13a^{97}b^{89}$ का।

52. एक बहुपद व्यंजक को एक सरल राशि द्वारा भाग करना।

47 वें नियम के तीसरे उपसिद्धान्त से पाया जाता है कि,

$$a(b+c+d+e+f+\cdots\cdots)=ab+ac+ad+ae+af+\cdots\cdots$$

इसलिए $(ab+ac+ad+ae+af+\cdots\cdots)\div a$

$$=b+c+d+e+f+\cdots\cdots$$

$$=(ab\div a)+(ac\div a)+(ad\div a)+(ae\div a)+(af\div a)+\cdots$$

इस कारण यदि किसी बहुपद व्यंजक को किसी एकपद राशि द्वारा भाग करना हो, तो भाज्य के प्रत्येक पद में भाजक द्वारा अलग भाग देने से भिन्न भिन्न भजनफल प्राप्त होंगे, निर्णय पूर्ण भजनफल उनके योग के बराबर होगा।

उदाहरण 1. $4a^3x^2-6a^2x^3+10ax^4$ में $-2ax$ का भाग दो।

$$\text{भजनफल}=\frac{4a^3x^2-6a^2x^3+10ax^4}{-2ax}$$

$$=\frac{4a^3x^2}{-2ax}+\frac{-6a^2x^3}{-2ax}+\frac{10ax^4}{-2ax}$$

$$=-2a^2x+3ax^2-5x^3.$$

उदाहरण 2. $9x^5-4x^4a-2x^3a^2$ में $3x^3$ का भाग दो।

$$\text{भजनफल}=\frac{9x^5-4x^4a-2x^3a^2}{3x^3}$$

$$=\frac{9x^5}{3x^3}+\frac{-4x^4a}{3x^3}+\frac{-2x^3a^2}{3x^3}$$

$$=3x^2-\tfrac{4}{3}xa-\tfrac{2}{3}a^2.$$

टीका। परन्तु अभ्यास हो जाने पर बीच की क्रियाओं को न दिखलाकर केवल भजनफल लिखा जा सकता है।

प्रश्नमाला 19

भाग दो :

1. $3a^3b^2-2a^2b^3$ में a^2b^2 का। 2. $2a^3b-3ab^3$ में $-ab$ का।

3. $6a^4b^2-9a^2b^4$ में $3a^2b^2$ का।

4. $12x^4y^2-9x^5y$ में $-3x^3y$ का।

5. $14x^7y^5-21x^5y^7$ में $-7x^5y^5$ का।

6. $4mn^3 - 12m^2n^2 + 16m^3n$ में $4mn$ का।
7. $-3a^3x^4 + 6a^2x^5 - 9a^4x^3$ में $-3a^2x^3$ का।
8. $12x^5 - 8x^3a^2 + 20ax^4$ में $-4x^3$ का।
9. $10m^5n^4 - 15m^7n^2 - 20m^3n^6$ में $5m^3n^2$ का।
10. $8p^4q^2 - 5p^3q^3 - 3p^2q^4$ में $-8p^2q^2$ का।
11. $-14x^8y^5 + 21x^{10}y^3 - 28x^7y^6$ में $7x^7y^3$ का।
12. $15a^4x^8 - 30a^7x^5 - 45a^6x^6$ में $20a^4x^5$ का।
13. $-60x^4a^5 - 75x^3a^6 + 80x^5a^4$ में $-20x^3a^4$ का।
14. $125m^6n^4p^2 - 175m^4n^6p^2 - 200m^2n^2p^8$ में $25m^2n^2p^3$ का।
15. $-a^2b^4c^4x^4y^4z^2 + 2a^4b^2c^4x^2y^4z^4 - 3a^4b^4c^2x^4y^2z^4$ में $-a^2b^2c^2x^2y^2z^2$ का।

विविध प्रश्नमाला I

I

1. कौन संख्या 5 घंटे का समय बतायगी, यदि (i) समय की इकाई आध घंटा हो, (ii) समय की इकाई 10 घंटा हो ?

2. यदि $x = 17$ व $y = 25$ हो, तो $x \sim y$ द्वारा क्या जाना जायगा ?

3. गुणक किसे कहते हैं ? संख्या-गुणक व अक्षर-गुणक की भिन्नता बतलाओ। $15x^3$, $2ax^3$, $7ab^2x^3$ और $16m^2pqx^3$ में x^3 के गुणक कौन हैं ?

4. $\sqrt{ab}$ व $\sqrt{a}b$ में क्या भेद है ? यदि $a = 9, b = 4$ हो, तो $\sqrt{ab} \sim \sqrt{a}b$ का मूल्य निकालो।

5. यदि किसी स्थान के उत्तर को आध मील की दूरी 40 द्वारा प्रकट की जाय, तो उस स्थान के दक्षिण 11 गज़ की दूरी किस संख्या द्वारा प्रकट करेंगे ?

6. एक ऋणात्मक राशि को एक धनात्मक राशि के साथ योग करने से क्या फल होता है लिखो। इससे सिद्ध करो कि $+(-b) = -b$.

7. घटाने की परिभाषा क्या है ? इससे सिद्ध करो कि,

$$4 - 6 = -2 \text{ और } 5 - (-3) = 8.$$

8. नीचे दी हुई संख्याओं को इस क्रम में लिखो कि उत्तरोत्तर घटती जायँ (in descending order) : 2, 5, −3, 7, −8, −1, 9, −4, −12.

II

1. यदि $a=4$, $b=5$ हो, तो नीचे दी हुई राशियों का मूल्य बताओ :—

(i) $ab-a\times b$; (ii) $45-ab$; (iii) $74-7a$; (iv) $85-8b$.

2. a^n द्वारा क्या सूचित होता है ? a^n और n^a में क्या भेद है ? यदि $a=7$, $b=5$ हो, तो $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ का मूल्य क्या होगा ?

3. 'a' के साथ नीचे दी हुई राशियों का क्या सम्बन्ध है—

$$\sqrt[3]{a},\ \sqrt[5]{a},\ \sqrt[8]{a} \text{ और } \sqrt[n]{a}\ ?$$

यदि $a=8$, $b=7$, $c=6$, $d=5$ और $e=1$ हो, तो

$\sqrt{a^2-3d}\times\sqrt[3]{b^3-c^3-2e}$ का मूल्य बताओ ।

4. एक धनराशि अथवा एक ऋणराशि का विशुद्ध मूल्य किसे कहते हैं ? एक उदाहरण द्वारा समझाओ ।

5. जोड़ो : $3x^2y$, $-8x^2y$, $-19x^2y$ और $17x^2y$; यदि $x=4$ व $y=5$ हों, तो इनके योगफल का मूल्य बताओ ।

6. $16x^4$, $-8xy^3$, $24x^2y^2$, y^4 और $-32x^3y$ का योगफल लिखो ; यदि $x=4$, $y=5$ हो, तो योगफल का मूल्य संख्या में निकालो ।

7. $17b-12c-19a$ में से $4a-13b-25c$ घटाओ ।

8. हल करो : $3x-[4y+\{2z-(x-5y+3z)\}]-(3x-7y)$.

III

1. नीचे दिये हुए वक्तव्यों को बीजीय संकेतों द्वारा प्रकट करो :—

(i) a और b के योगफल को c द्वारा गुणन करने से जो गुणनफल प्राप्त होता है, वह x को y और z के गुणनफल द्वारा भाग करने पर जो भजनफल प्राप्त होता है, उसके बराबर है ।

(ii) x व y को जोड़कर उसका वर्ग उनके वर्ग-योग तथा दूने गुणनफल के योग के बराबर होता है ।

(iii) m से n को घटाकर अंतर के घनमूल को m व n के गुणनफल के घन द्वारा भाग करने पर जो भजनफल होता है वह x और y के वर्गों के योगफल से छोटा है ।

(iv) b से यदि a बड़ा हो, तो b के तिगुने से a का तिगुना बड़ा होगा ।

2. A, B, C, D, E, F, G विन्दु एक सीधी रेखा पर इस प्रकार स्थित हैं कि AB, BC, CD, DE, EF, FG की दूरी का क्रम 3, 4, 6, 8, 5 और 7 इंच है। यदि DC को 3 द्वारा सूचित करें, तो DB, DE, DF, DA और DG में से प्रत्येक को किन संख्याओं द्वारा सूचित करेंगे ?

3. एक ऋणात्मक राशि के साथ एक और ऋणात्मक राशि को योग करने से योगफल क्या होगा ? यदि $a=6$ और $b=4$ हो, तो $-a^3$, $-3a^2b$, $-3ab^2$, $-b^3$ के योगफल का मूल्य बताओ।

4. कई संख्याओं को लेकर सिद्ध करो कि यदि उन संख्याओं का क्रम बदला जाय तो उनका योगफल नहीं बदलता।

5. यदि $a=16$, $b=10$, $c=5$, $d=1$ हो, तो

$$(a-b)(5\sqrt{a-b})+\sqrt{(a-b)(c+d)}$$ का मूल्य निकालो।

6. यदि $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{5}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4.$$

7. योगफल बतलाओ : $3a^2+4bc-x^2+10$, $2x^2-5a^2-15+6bc$ और $21-9bc-4a^2-10x^2$.

8. हल करो : $a-[5b-\{a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)\}]$.

IV

1. यदि $x=9$ हो, तो

(1) $\sqrt{49}-\sqrt{4a}$ और (2) $\sqrt{49-\sqrt{4a}}$ का मूल्य निकालो।

2. कई विशेष अंकों के द्वारा दिखलाओ कि कुछ राशियों को जोड़ा जाय तो योगफल उन अंशों के योग के बराबर होगा जिनमें वे संख्यायें विभाजित की जा सकें।

3. यदि $a=2$, $b=3$ और $c=4$ हो, तो

$$\frac{a-b+c}{a+b-c}+\frac{b-c+a}{b+c-a}+\frac{c-a+b}{c+a-b}$$ का मूल्य निकालो।

4. बीजीय व्यंजक की परिभाषा लिखो। एकपदी व बहुपदी व्यंजकों में क्या भेद है ? $42abx^2$ एकपद व्यंजक है या बहुपद ? उदाहरणों के साथ भिन्न जातियों के बहुपद व्यंजकों के नाम लिखो।

5. यदि $x=2$, $y=3$, $a=6$ और $b=5$ हो, तो

$$\sqrt[3]{b(x+y)^2}+\sqrt[3]{(x+a)(b-2x)}+\sqrt[3]{x(b-y)^2}$$ का मूल्य निकालो।

6. एक रक़म A, B व C में इस प्रकार बाँट दी गई है कि B को A से a पाउंड अधिक और C को B से b पाउंड अधिक मिले ; यदि A को x पाउंड मिला हो तो कुल रक़म का मूल्य निकालो।

7. योगफल बतलाओ :

$$a^2-3ab-\tfrac{14}{21}b^3,\ 2b^2-\tfrac{2}{3}b^3+c^2,\ ab-\tfrac{1}{3}b^2+b^3 \text{ और } 2ab-\tfrac{1}{3}b^3.$$

8. हल करो :

$$\{2x^2-(y^2-xy)\}-\{y^2-(4x^2-y^2)\}+\{2y^2-(3xy-x^2)\}.$$

V

1. गुणनफल की मात्रा और घात किसे कहते हैं ? समघातिक व्यंजक किसे कहते हैं ? एक छः घातवाले और एक सात घातवाले त्रिपदी व्यंजक लिखो।

2. $a\times b-c\div d\times e+f\div gh$ का मूल्य निकालना हो तो कैसे आरम्भ करना होगा ?

3. गुणनखंड की परिभाषा लिखो। $2ab(a+b)$ के क्या क्या सरल गुणनखंड हैं ?

4. यदि $a=4$ और $x=2$ हो, तो

$$\frac{2ax^2}{(a-x)^2}-\frac{6\sqrt[3]{ax}}{a^3\sqrt{2a+4x}}-\frac{29x^2}{64a} \text{ का मूल्य निकालो।}$$

5. यदि $x=5$ हो, तो $(x^3-7x^2+6x+5)+(-3x+2x^3+4+5x^2)+(-11-4x^3+2x-7x^2)+(9x^2+2+5x^3-4x)$ का मूल्य निकालो।

6. सिद्ध करो कि $a-(b-c)=a-b+c$ यदि a, b से बड़ा और b, c से बड़ा हो और a, b, c तीनों धनात्मक राशियाँ हों, तो इस दिये हुए सूत्र को साधारणतः कैसे सिद्ध किया जायगा ?

7. हल करो : $2x-[(3x-9y)-\{(2x-3y)-(x+5y)\}]$.

8. किस हालत में यह कहा जाता है कि एक संख्या को दूसरी एक संख्या द्वारा गुणन किया गया है ? इसके अनुसार -8 व -4 का गुणनफल निकालो।

VI

1. किसी संख्या के घात और उसके घातमापक की परिभाषा लिखो, और यह उदाहरण द्वारा समझाओ।

2. यदि $a=16$, $b=10$, $x=5$ और $y=1$ हो, तो

$$(a-y)\sqrt{24bx+x^2}+\sqrt{(a-x)(b+y)} \text{ का मूल्य बताओ।}$$

3. सिद्ध करो :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),$$

(1) जब कि $a=3,\ b=4,\ c=5$;

(2) जब कि $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=\frac{7}{2}$.

4. जिन नियमों के अनुसार नीचे दिया हुआ सिद्धान्त प्राप्त होता है उनको लिखो :

$$a-b+c-d+e-f=(a+c+e)+(-b-d-f).$$

5. $40-(-15)=55$, इसको उदाहरण देकर सिद्ध करो ।

6. यदि $x=17,\ y=16,\ z=15$ हो, तो नीचे दिये हुए व्यंजकों का मूल्य बताओ : $7x^3-25\sqrt{yz}+z^4$, $19\sqrt{yz}-3z^4-12x^3$ और $2z^4+5x^3+7\sqrt{yz}$.

7. नीचे दिये हुए व्यंजक में बीजगणित की जो क्रियायें सूचित हैं उनको लिखो :

$$5a-[4b-\{3c-(2d-7e)\}].$$

8. यदि $a=4,\ b=3,\ c=2,\ d=1$ हो, तो

$[(a^3+b^3+c^3+d^3)\{a+b-(c-a)\}+a^2b+c^2d]\times\{a^2-(b^2+c^2)+d^2\}$ का मूल्य बताओ ।

VII

1. इन दो राशियों में क्या भेद है बतलाओ :

(1) $a+bc$ और $a+b\times c$; (2) a^4 और $4a$; (3) $3\sqrt{a}$ और $\sqrt[3]{a}$;

(4) $\sqrt{a+b}$ और $\sqrt{a}+b$; (5) $\sqrt{ab}$ और $\sqrt{a}\,b$.

2. यदि $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=0$ हो, तो नीचे दिये हुए व्यंजकों का मूल्य बताओ :

(1) $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a}{(a+b)(c+d)-\{(a-d)+(c-b)\}}$;

(2) $\sqrt[3]{b-a^3}+\sqrt[3]{4(c-a)}-\sqrt[4]{3(8a+5b+3c-2d)}$.

3. सिद्ध करो कि $(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3$, $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+6abc$ और $2a^3+3b^2(a+c)+2b^3+3c^2(a+b)+2c^3+3a^2(b+c)+6abc$ एक दूसरे के बराबर हैं, जब कि (i) $a=2,\ b=3,\ c=4$; और जब कि (ii) $a=7,\ b=4,\ c=1$.

4. हल करो :

(1) $1-[1-\{1-(1-\overline{1+x})\}]$;

(2) $3a-(b-2c)-\{a+c-(3a-b-2c)\}-(2a-3b+4c)$.

5. नीचे दिये हुए वक्तव्यों को बीजीय संकेत द्वारा प्रकट करो :

(1) दो संख्याओं का वर्गान्तर उनके जोड़ और अन्तर के गुणनफल के बराबर होता है।

(2) दो संख्याओं का योगवग उन दो संख्यांओं के वर्गयोग से उनके गुणनफल के दूने के बराबर बड़ा होता है।

6. यदि $a=39, b=52$ हो, तो $17a-5b-[7a-3b-\{4(a-b)-(2a+3b)\}]$ का मूल्य बताओ।

7. यदि $V=5a+4b-6c$, $X=-3a-9b+7c$, $Y=20a+7b-5c$ व $Z=13a-5b+9c$ हो, तो $V-(X+Y)+Z$ का मूल्य बताओ।

[मद्रास प्रवेशिका, 1883.]

8. $a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{5}d$, $-\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+d$, $\frac{1}{4}d-\frac{1}{5}b+c-a$, $\frac{1}{6}a-\frac{3}{5}d+b-\frac{5}{3}c$ और $8a-6b+3c-4d$ के योगफल से $\frac{13}{2}a-\frac{151}{30}b+\frac{9}{4}c-\frac{13}{4}d$ को घटाओ।

VIII

1. सिद्ध करो कि $a\times b=b\times a$, यदि a व b दो धनात्मक पूर्ण राशियाँ हों।

2. M बराबर है $a(m+n)$ के व N बराबर है $b(m-n)$ के, तो

$$\frac{M}{a}+\frac{N}{b} \text{ व } \frac{M}{a}-\frac{N}{b}$$ के मूल्य निकालो।

3. $c(a+b)=ca+cb$ इस तादात्म्य (identity) में

(i) यदि '$m+n$' c के लिए रक्खें तो $(m+n)(a+b)$ का मूल्य निकालो।

(ii) '$a+b$' c के लिए रक्खें तो $(a+b)^2$ का मूल्य बताओ।

4. हल करो :

(i) $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)$;

(ii) $\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}+\frac{x-y}{xy}$.

5. सिद्ध करो कि (i) $a^m\div a^n=a^{m-n}$, यदि m व n दो धनात्मक पूर्ण राशियाँ हों व $m>n$ हो ; (ii) $a\div b\div c=a\div c\div b=a\div bc$.

6. यदि $a=3xy-yz-zx$, $b=3yz-zx-xy$ और $c=3zx-xy-yz$ हो, तो $\frac{a+b+c}{xyz}$ का मूल्य बताओ।

7. $\frac{3}{2}a^5b^{10}c^{15}x^8y^6z^4+\frac{15}{4}a^{10}b^{15}c^5x^6y^4z^2+\frac{5}{12}a^{15}b^5c^{10}x^4y^2$ को $24a^3b^5c^7x^2y^4z^6$ से गुणा करो।

8. $\frac{3}{2}a^{10}b^{15}c^{20}x^{12}y^{10}z^8+\frac{15}{4}a^{15}b^{20}c^{10}x^{10}y^8z^{12}+\frac{9}{4}a^{20}b^{10}c^{15}x^8y^{12}z^{10}$ में $\frac{3}{4}a^{10}b^{10}c^{10}x^8y^8z^8$ का भाग दो।

चौथा अध्याय

सरल सूत्रावली और उसका प्रयोग

(Simple Formulæ and their Application)

53. परिभाषा : बीजीय संकेतों द्वारा साधारण रूप से प्रकट किये गये किसी सिद्धांत को बीजीय सूत्र (algebraical formula) या संक्षेप में केवल सूत्र कहते हैं। सूत्रों द्वारा संख्याओं के विषय में कोई सिद्धांत बहुत साधारण रूप में प्रकट कर सकते हैं।

54. सूत्र : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$$[\ (a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+2ab+b^2.\ ]$$

अर्थात् दो राशियों का योगवर्ग उनके वर्गयोग और उनके गुणनफल के दूने के योग के बराबर होता है।

उपसिद्धान्त। $a^2+b^2=(a^2+2ab+b^2)-2ab=(a+b)^2-2ab.$

उदाहरण 1. $2x+3y$ का वर्ग निकालो।

$$(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$$
$$=4x^2+12xy+9y^2.$$

उदाहरण 2. $5x+4$ का वर्ग निकालो।

$$(5x+4)^2=(5x)^2+2(5x)(4)+4^2=25x^2+40x+16.$$

उदाहरण 3. $4a^3+7b^4$ का वर्ग निकालो।

$$(4a^3+7b^4)^2=(4a^3)^2+2(4a^3)(7b^4)+(7b^4)^2$$
$$=16a^6+56a^3b^4+49b^8.$$

उदाहरण 4. $a+b+c$ का वर्ग निकालो।

$$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2 \qquad [\text{यदि } b+c \text{ को एक पद मान लें}]$$
$$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

उदाहरण 5. $a+b+c+d$ का वर्ग निकालो।

$(a+b+c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}^2$ [यदि $(a+b)$ का एक और $(c+d)$ को दूसरा पद मान लें]

$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2)+2(ac+ad+bc+bd)+(c^2+2cd+d^2)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

उदाहरण 6. हल करो :

$$(a+b-c)^2+2(a+b-c)(a-b+c)+(a-b+c)^2.$$

x को $(a+b-c)$ व y को $(a-b+c)$ मान लो ;

$$\text{व्यंजक}=x^2+2xy+y^2$$
$$=(x+y)^2=\{(a+b-c)+(a-b+c)\}^2$$
$$=(2a)^2=4a^2.$$

उदाहरण 7. $9x^2+30xy+25y^2$ का मूल्य निकालो, यदि $x=15$, $y=-9$ हो।

$$\text{दिया व्यंजक}=(3x)^2+2(3x)(5y)+(5y)^2=(3x+5y)^2.$$
$$3x+5y=3\times15+5\times(-9)=45-45=0.$$

$\therefore$ दिया व्यञ्जक $=0$.

प्रश्नमाला 20

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्ग निकालो :

1. $x+4$. 2. $3a+2$. 3. $x+2y$. 4. $2x+7y$.
5. $3a+4b$. 6. $5a+7b$. 7. $ay+3bx$. 8. a^2+2bc.
9. $3x^2+2y^2$. 10. $4x^2+y^3$. 11. $a+2b+3c$.
12. $ab+bc+ca$. 13. $2p+3q+4r$. 14. $x^2+y^2+z^2$.
15. $2x+3y+4z$. 16. $x^2+y^3+z^4$. 17. $x+y+2a+3b$.
18. $3a+4b+c+2d$. 19. $2a+x+4y+3z$. 20. $4m+3n+3p+2q$.

हल करो :

21. $(x+y)^2+2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.
22. $(x-y+z)^2+(y+z-x)^2+2(x-y+z)(y+z-x)$.
23. $(2a-3b+4c)^2+(2a+3b-4c)^2+2(2a-3b+4c)(2a+3b-4c)$.
24. $(5a-7b)^2+2(5a-7b)(9b-4a)+(9b-4a)^2$.
25. $(2x-5y-3z)^2+(6y+3z-x)^2+2(2x-5y-3z)(6y+3z-x)$.

मूल्य निकालो :

26. $9x^2+12x+4$, यदि $x=-1$ हो।

27. $16x^2+64x+64$, यदि $x=-2$ हो।

28. $25m^2+40mn+16n^2$, यदि $m=-18$ और $n=23$ हो।

29. $49a^2+56ab+16b^2$, यदि $a=-7$ व $b=13$ हो।

30. $64a^2+16ac+c^2$, यदि $a=6$ व $c=-49$ हो।

31. $81x^2+18xz+z^2$, यदि $x=7$ व $z=-67$ हो।

32. $36p^2+132pq+121q^2$, यदि $p=12$ व $q=-7$ हो।

33. यदि $m+\frac{1}{m}=4$ हो, तो सिद्ध करो कि $m^2+\left(\frac{1}{m}\right)^2=14$.

55. सूत्र : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$$\left[\,(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)=a^2-2ab+b^2.\,\right]$$

अर्थात् दो राशियों का अन्तर-वर्ग उनके वर्ग-योग में से उनके गुणनफल के दूने को घटाने से प्राप्त होता है।

टीका। वास्तव में यह सूत्र पूर्व सूत्र में शामिल है।

$$(a-b)^2=\{a+(-b)\}^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

उपसिद्धान्त 1. $a^2+b^2=(a^2-2ab+b^2)+2ab=(a-b)^2+2ab.$

उपसिद्धान्त 2. चूँकि $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ....(1)

और $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ....(2)

इसलिए $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$;

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$$

अब, (1) और (2) को जोड़ने पर, $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;

और (1) से (2) घटाने पर, $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

उदाहरण 1. $3a-4b$ का वर्ग निकालो।

$$(3a-4b)^2=(3a)^2-2(3a)(4b)+(4b)^2=9a^2-24ab+16b^2.$$

उदाहरण 2. $x-y-z$ का वर्ग निकालो।

$$(x-y-z)^2=\{x-(y+z)\}^2$$
$$=x^2-2x(y+z)+(y+z)^2$$
$$=x^2-2xy-2xz+y^2+2yz+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz.$$

उदाहरण 3. $2x-3y-4z$ का वर्ग निकालो।

$$(2x-3y-4z)^2=\{2x-(3y+4z)\}^2$$
$$=(2x)^2-2(2x)(3y+4z)+(3y+4z)^2$$
$$=4x^2-2(6xy+8xz)+\{(3y)^2+2(3y)(4z)+(4z)^2\}$$
$$=4x^2-12xy-16xz+9y^2+24yz+16z^2$$
$$=4x^2+9y^2+16z^2-12xy-16xz+24yz.$$

उदाहरण 4. $a-b-c+d$ का वग निकालो।

$$(a-b-c+d)^2=\{(a-b)-(c-d)\}^2$$
$$=(a-b)^2-2(a-b)(c-d)+(c-d)^2$$
$$=(a^2-2ab+b^2)-2(ac-ad-bc+bd)+(c^2-2cd+d^2)$$
$$=a^2-2ab+b^2-2ac+2ad+2bc-2bd+c^2-2cd+d^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac+2ad+2bc-2bd-2cd.$$

उदाहरण 5. हल करो :

$$(ax-by+cz)^2+(ax-by-cz)^2-2(ax-by+cz)(ax-by-cz).$$

फ़र्ज़ करो कि $m=(ax-by+cz)$ और $n=(ax-by-cz)$ है।

दिया हुआ व्यंजक $=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$

$$=\{(ax-by+cz)-(ax-by-cz)\}^2=(2cz)^2=4c^2z^2.$$

उदाहरण 6. मूल्य निकालो : $9a^2-48ab+64b^2$, यदि $a=15$ और $b=6$ हो।

दिया हुआ व्यंजक $=(3a)^2-2(3a)(8b)+(8b)^2=(3a-8b)^2$

$$=(45-48)^2=(-3)^2=9.$$

प्रश्नमाला 21

नीचे दिये व्यंजकों का वर्ग निकालो :

1. $x-3$.
2. $2x-5$.
3. $3x-5y$.
4. $ax-by$.
5. $8m-3n$.
6. $pm-qn$.

7. $p^2 - mn$.
8. $x^2y - xy^2$.
9. $x^3 - 2xz$.
10. $3a^3 - 5b^3$.
11. $-xyz - abc$.
12. $x^2yz - y^2zx$.
13. $a^2x^4 - b^2y^4$.
14. $a - 2b - 2c$.
15. $2x - 3y - 4z$.
16. $3m - 4n - 5q$.
17. $a^2 - 3b^2 - 5c^2$.
18. $x - y - a - b$.
19. $a - 2x - 3b - 4y$.
20. $90 - 1$.
21. $120 - 3$.
22. $500 - 2$.
23. $1000 - 7$.

हल करो :

24. $(a+3b)^2 - 2(a+3b)(a-3b) + (a-3b)^2$.
25. $(2a-4b+5c)^2 + (2a+4b+5c)^2 - 2(2a-4b+5c)(2a+4b+5c)$.
26. $(3a+5b+7c)^2 + (7c-4a+5b)^2 - 2(3a+5b+7c)(7c-4a+5b)$.
27. $(2x^2-y^2-5z^2)^2 - 2(2x^2-y^2-5z^2)(6z^2+2x^2-y^2)$
$+ (6z^2+2x^2-y^2)^2$.
28. $(ab-bc+ca)^2 + (ab+4bc+2ca)^2 - 2(ab-bc+ca)(ab+4bc+2ca)$

मूल्य निकालो :

29. $a^2b^2 - 12abc + 36c^2$, यदि $a=4$, $b=7$ व $c=5$ हो।
30. $x^2y^2 - 24xyz + 144z^2$, यदि $x=7$, $y=9$ व $z=6$ हो।
31. $25(x+y)^2 + z^2 - 10z(x+y)$, यदि $x=47$, $y=-22$ व $z=129$ हो।
32. $9c^2 - 42c(a+b) + 49(a+b)^2$, यदि $a=-37$, $b=57$ व $c=45$ हो।
33. $64(7p-5q)^2 - 96(7p-5q)r + 36r^2$,
यदि $p=28$, $q=32$ व $r=46$ हो।
34. यदि $c - \frac{1}{c} = 4$ हो, तो सिद्ध करो कि $c^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = 18$.

56. सूत्र : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\left[\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b)\\ &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}\right]$$

अर्थात् दो राशियों के जोड़ और अंतर का गुणनफल उनके वर्गान्तर के समान है।

उल्टे ढंग से (conversely) कहा जा सकता है, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

इसलिए $a^2 - b^2$ के रूप में प्रकट की जा सकनेवाली किसी भी राशि के दो गुणनखंड (factors) होते हैं, जिनमें से एक उन राशियों का योगफल और दूसरा उनका अंतरफल है।

[यदि कोई राशि अन्य दो या दो से अधिक राशियों के गुणनफल के बराबर हो, तो उसमें से प्रत्येक को पहली राशि का गुणनखंड कहते हैं।]

उदाहरण 1. गुणा करो : $3x+5y$ को $3x-5y$ से।

$$(3x+5y)(3x-5y)=(3x)^2-(5y)^2$$
$$=9x^2-25y^2.$$

उदाहरण 2 गुणा करो : $a+b-c$ को $a-b+c$ से।

$$(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$$
$$=a^2-b^2+2bc-c^2.$$

उदाहरण 3. गुणा करो : x^2+xy+y^2 को x^2-xy+y^2 से।

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=x^4+x^2y^2+y^4.$$

उदाहरण 4. हल करो : $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$.

दिया हुआ व्यंजक $=\{(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)\}$
$\times\{(a^2+ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)\}$

$$=(2a^2+2b^2)\times 2ab$$
$$=2(a^2+b^2)\times 2ab=4ab(a^2+b^2).$$

उदाहरण 5. $(9726854)^2-(9726849)^2$ का मूल्य बताओ।

दिया हुआ व्यंजक $=(9726854+9726849)(9726854-9726849)$

$$=19453703\times 5=97268515.$$

उदाहरण 6. $(a+b)^2-(c-d)^2$ के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}$

$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d).$$

उदाहरण 7. $16a^4-81x^4$ के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(4a^2)^2-(9x^2)^2$

$$=(4a^2+9x^2)(4a^2-9x^2).$$

और $4a^2-9x^2=(2a)^2-(3x)^2=(2a+3x)(2a-3x).$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=(4a^2+9x^2)(2a+3x)(2a-3x).$

प्रश्नमाला 22

गुणा करो :

1. $x+3$ व $x-3.$
2. $5x+13$ व $5x-13.$
3. $x+2a$ व $x-2a.$
4. $ax+by$ व $ax-by.$
5. $am+n^2$ व $am-n^2.$
6. $xy+yz$ व $xy-yz.$
7. x^2-2yz व $x^2+2yz.$
8. x^2y+xy^2 व $xy^2-x^2y.$
9. $x+1, x-1$ व $x^2+1.$
10. a^2+b^2, a^2-b^2 व $a^4+b^4.$
11. $a+b+c$ व $a+b-c.$
12. $a+b+c$ व $a-b-c.$
13. m^2+mn+n^2 व $m^2-mn+n^2.$
14. $x^2+2xy+2y^2$ व $x^2-2xy+2y^2.$
15. $ax-by+cz$ व $ax+by-cz.$
16. $-ax+by+cz$ व $ax+by+cz.$
17. $b^2m-c^2n+a^2p$ व $b^2m+c^2n-a^2p.$
18. $a^3-8b^3+27c^3$ व $a^3+8b^3-27c^3.$
19. $a^2x^2-2ax+2$ व $a^2x^2+2ax+2.$
20. $a^4x^4-a^2x^2+1$ व $a^4x^4+a^2x^2+1.$
21. $m^2+\sqrt{2}.mn+n^2$ व $m^2-\sqrt{2}.mn+n^2.$
22. $x^2-\sqrt{2}x+1, x^2+\sqrt{2}x+1$ व $x^4-1.$

हल करो :

23. $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2.$
24. $(a-2b+3c)^2-(a+2b-3c)^2.$
25. $(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2.$
26. $(x+y-a+b)^2-(x-y+a-b)^2.$
27. $(2a+3b-5c+7d)^2-(2a-3b+5c-7d)^2.$

मूल्य निकालो :

28. $2345\times2345-2343\times2343.$
29. $(53497)^2-(53487)^2.$
30. $498567\times498567-498562\times498562.$

गुणनखंड निकालो :

31. $25x^2-36.$
32. $9a^2-16c^2.$
33. $16m^2-49n^2.$

34. $4p^2-81q^2$. 35. $a^2x^2-64b^2$. 36. $36x^4-121y^4$.
37. $49-64d^2$. 38. $144c^2-25d^2$. 39. $(a+b)^2-c^2$.
40. $(a+2b)^2-25c^2$. 41. $4x^2-(3a-4b)^2$.
42. $a^2-(2b-3c)^2$. 43. a^4-81b^4.
44. $(x-y)^2-(a-b)^2$. 45. $81x^4-625y^4$.
46. $(4a+7b)^2-(3a-8b)^2$. 47. $(3x+5y)^2-(2x-7y)^2$.
48. $(a+2b-3c)^2-(a+b-c)^2$. 49. $(2m+3n-5p)^2-(2m+3p)^2$.
50. $(3x-4y+7z)^2-(2x-3y+5z)^2$.

57. सूत्र : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

अथवा, $=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

[$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$
$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

और अंतिम व्यंजक $=a^3+3ab(a+b)+b^3$
$=a^3+b^3+3ab(a+b)$.]

उपसिद्धान्त। $a^3+b^3=\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}-3ab(a+b)$
$=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

उदाहरण 1. $3a+5b$ का घन निकालो।

$$(3a+5b)^3=(3a)^3+3(3a)^2(5b)+3(3a)(5b)^2+(5b)^3$$
$$=27a^3+3(9a^2)(5b)+3(3a)(25b^2)+125b^3$$
$$=27a^3+135a^2b+225ab^2+125b^3.$$

उदाहरण 2. हल करो :

$$(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2(x-y).$$

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1876.]

मान लो कि a, '$x-y$' है व b, '$x+y$' है।

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=a^3+b^3+3a^2b+3b^2a$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=(a+b)^3=\{(x-y)+(x+y)\}^3$
$=(2x)^3=8x^3$.

उदाहरण 3. यदि $a+b=5$ व $ab=6$ हो, तो a^3+b^3 का मूल्य निकालो।

अब $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$$=5^3-3\times6\times5=125-90=35.$$

उदाहरण 4. यदि $x+\frac{1}{x}=p$ हो, तो दिखाओ कि $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=p^3-3p.$

चूँकि $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$$\therefore \quad x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

इसलिए उत्तर $=p^3-3p.$

उदाहरण 5. $p+q+r$ का घन निकालो।

$$(p+q+r)^3=\{(p+q)+r\}^3$$
$$=(p+q)^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3$$
$$=(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)+3(p^2+2pq+q^2)r+3(p+q)r^2+r^3$$
$$=p^3+q^3+r^3+3p^2q+3pq^2+3p^2r+3pr^2+3q^2r+3qr^2+6pqr.$$

उदाहरण 6. $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ का मूल्य निकालो, यदि $x=5$ व $y=-2$ हो।

दिया हुआ व्यंजक $=x^3+3x^2(3y)+3x(3y)^2+(3y)^3$

$$=(x+3y)^3=(5-6)^3=(-1)^3=-1.$$

प्रश्नमाला 23

निम्नलिखित व्यंजकों का घन निकालो :

1. $x+3.$ 2. $2x+1.$ 3. $3a+b.$ 4. $4x+3y.$
5. $x^2+2y.$ 6. $xy+yz.$ 7. $a^2b+c^2d.$ 8. $a+b+2c.$
9. $2x+3y+z.$ 10. $x^3+y^3.$

हल करो :

11. $(3m+5n)^3+3(3m+5n)^2(2m-5n)+3(3m+5n)(2m-5n)^2+(2m-5n)^3.$

12. $(3x-8y)^3+(9y-2x)^3+3(x+y)(3x-8y)(9y-2x)$.
13. $(3a-7b)^3+(10b-3a)^3+9b(3a-7b)(10b-3a)$.
14. $(5x-2)^3+(3-4x)^3+3(x+1)(5x-2)(3-4x)$.
15. $(3-7x)^3+(8x-1)^3+3(8x-1)(3-7x)(x+2)$.
16. $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$.

a^3+b^3 का मूल्य निकालो :

17. यदि $a+b=6$ व $ab=7$ हो।
18. यदि $a+b=7$ व $ab=8$ हो।
19. यदि $a+\frac{1}{a}=3$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^3+\left(\frac{1}{a}\right)^3=18$.
20. यदि $z+\frac{1}{z}=4$ हो, त $z^3+\left(\frac{1}{z}\right)^3$ का मूल्य निकालो।

निम्नलिखित व्यंजकों का मूल्य निकालो :

21. $x^3+6x^2+12x+8$, यदि $x=-2$ हो।
22. $x^3+12x^2+48x+64$, यदि $x=-5$ हो।
23. $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$, यदि $a=-3$ व $b=2$ हो।
24. $x^3+18x^2+108x+351$, यदि $x=-11$ हो।
25. यदि $x+y=5$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3+15xy=125$.
26. यदि $a^2+b^2=c^2$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^6+b^6+3a^2b^2c^2=c^6$.
27. यदि $p+q=2$ हो, तो सिद्ध करो कि $p^3+q^3+6pq=8$.

58. सूत्र : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

अथवा $=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

$$[\,(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$$
$$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

अंतिम व्यंजक $=a^3-3ab(a-b)-b^3$
$$=a^3-b^3-3ab(a-b).\,]$$

उपसिद्धान्त। $a^3-b^3=\{a^3-b^3-3ab(a-b)\}+3ab(a-b)$
$$=(a-b)^3+3ab(a-b).$$

उदाहरण 1. $3x-4y$ का घन निकालो।

$$(3x-4y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 - (4y)^3$$
$$= 27x^3 - 3(9x^2)(4y) + 3(3x)(16y^2) - 64y^3$$
$$= 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3.$$

उदाहरण 2. $a-b-c$ का घन निकालो।

$$(a-b-c)^3 = \{(a-b)-c\}^3$$
$$= (a-b)^3 - 3(a-b)^2c + 3(a-b)c^2 - c^3$$
$$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - 3(a^2 - 2ab + b^2)c + 3(a-b)c^2 - c^3$$
$$= a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 3b^2c - 3bc^2 + 6abc.$$

उदाहरण 3. $27x^3 - 54x^2 + 36x - 64$ का मूल्य निकालो, यदि $x = 2\frac{1}{3}$ हो।

दिया हुआ व्यंजक $= (3x)^3 - 3(9x^2).2 + 3(3x).4 - 8 - 56$

$= (3x-2)^3 - 56.$

इसलिए उत्तर $= (7-2)^3 - 56 = 125 - 56 = 69.$

प्रश्नमाला 24

निम्नलिखित व्यंजकों का घन निकालो :

1. $x-2.$ 2. $2x-1.$ 3. $2-3a.$ 4. $3-4a.$
5. $2a-3b.$ 6. $5m-4n.$ 7. $2x-5y.$ 8. $2a-b-c.$
9. $2x-3y-z.$ 10. $p^2-q^2-r^2.$

हल करो :

11. $(a+2b)^3 - 3(a+2b)^2(a-2b) + 3(a+2b)(a-2b)^2 - (a-2b)^3.$
12. $(3x-8y)^3 - (2x-7y)^3 - 3(3x-8y)(2x-7y)(x-y).$
13. $(5x-8)^3 - (3x-8)^3 - 6x(5x-8)(3x-8).$

निम्नलिखित व्यंजकों का मूल्य निकालो :

14. $m^3 - 12m^2n + 48mn^2 - 64n^3$, यदि $m=12$ व $n=3$ हो।
15. $27a^3 - 135a^2 + 225a - 125$, यदि $a=4$ हो।
16. $8 - 9a + 27a^2 - 27a^3$, यदि $a=3$ हो।

17. $216-144x+108x^2-27x^3$, यदि $x=3$ हो।

18. यदि $a-\frac{1}{a}=3$ हो, तो $a^3-\left(\frac{1}{a}\right)^3$ का मूल्य निकालो।

19. यदि $c-\frac{1}{c}=5$ हो, तो $c^3-\left(\frac{1}{c}\right)^3$ का मूल्य निकालो।

20. यदि $x-y=3$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3-y^3-9xy=27$.

21. यदि $p-2q=4$ हो, तो सिद्ध करो कि $p^3-8q^3-24pq=64$.

22. यदि $2a-3b=5$ हो, तो सिद्ध करो कि $8a^3-27b^3-90ab=125$.

59. सूत्र : $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

$$[\,(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$
$$=(a^3-a^2b+ab^2)+(a^2b-ab^2+b^3)$$
$$=a^3+b^3.\,]$$

टीका। उल्टे ढंग से $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. इसलिए a^3+b^3 के रूप के किसी व्यंजक के गुणनखंड सर्वदा निकलते हैं।

उदाहरण 1. x^4-x^2+1 को x^2+1 से गुणा करो।

यदि x^2 के लिए a, और 1 के लिए b लिखें,

तो $x^4-x^2+1=(x^2)^2-x^2.1+1^2=a^2-ab+b^2$.

इसलिए $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$$=a^3+b^3$$
$$=(x^2)^3+1^3=x^6+1.$$

उदाहरण 2. $9x^2-12x+16$ को $3x+4$ से गुणा करो।

यदि $3x$ के लिए a, और 4 के लिए b लिखें,

तो $9x^2-12x+16=(3x)^2-(3x).4+4^2$
$$=a^2-ab+b^2.$$

इसलिए $(3x+4)(9x^2-12x+16)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$$=a^3+b^3=(3x)^3+4^3$$
$$=27x^3+64.$$

उदाहरण 3. $16a^2-20ab+25b^2$ को $4a+5b$ से गुणा करो।

यदि $4a$ के लिए x, और $5b$ के लिए y लिखें,

तो $16a^2-20ab+25b^2=(4a)^2-(4a)(5b)+(5b)^2$
$=x^2-xy+y^2.$

इसलिए $(4a+5b)(16a^2-20ab+25b^2)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$=x^3+y^3=(4a)^3+(5b)^3$
$=64a^3+125b^3.$

उदाहरण 4. $a^3b^3+8c^3$ के गुणनखंड निकालो।

$a^3b^3+8c^3=(ab)^3+(2c)^3$
$=(ab+2c)\{(ab)^2-(ab)(2c)+(2c)^2\}$
$=(ab+2c)(a^2b^2-2abc+4c^2).$

प्रश्नमाला 25

गुणा करो :

1. x^2-x+1 को $x+1$ से।
2. $1-2x+4x^2$ को $1+2x$ से।
3. $25p^2-5p+1$ को $5p+1$ से।
4. $49a^2-28ab+16b^2$ को $7a+4b$ से।
5. $64x^2-24xy+9y^2$ को $8x+3y$ से।
6. $a^2b^2-4abc+16c^2$ को $ab+4c$ से।
7. $a^2x^2-5abx+25b^2$ को $ax+5b$ से।
8. $25a^2-45ab+81b^2$ को $5a+9b$ से।

गुणनखंड निकालो :

9. $a^3+1.$
10. $x^3+8.$
11. $8x^3+1.$
12. $27a^3+8.$
13. $8m^3+64.$
14. $64p^3+125.$
15. $8x^3+216y^3.$
16. $27a^3+343y^3.$
17. $216a^3x^3+y^3.$
18. $27a^3b^3+64x^3y^3.$
19. $729a^3b^3c^3+1000x^3y^3z^3.$
20. $1331a^3b^6x^9+729c^3y^6z^9.$

60. सूत्र : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

[$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$
$=(a^3+a^2b+ab^2)-(a^2b+ab^2+b^3)$
$=a^3-b^3.$]

टीका। उल्टे ढंग से $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, इसलिए a^3-b^3 के रूप में प्रकट होनेवाले किसी व्यंजक के गुणनखंड सर्वदा निकलते हैं।

उदाहरण 1. $4a^2b^4+2ab^2+1$ को $2ab^2-1$ से गुणा करो।

$$(2ab^2-1)(4a^2b^4+2ab^2+1)$$
$$=(2ab^2-1)\{(2ab^2)^2+(2ab^2).1+1^2\}$$
$$=(2ab^2)^3-1^3=8a^3b^6-1.$$

उदाहरण 2. $64x^6-a^3y^6$ के गुणनखंड निकालो।

$$64x^6-a^3y^6=(4x^2)^3-(ay^2)^3$$
$$=(4x^2-ay^2)\{(4x^2)^2+(4x^2)(ay^2)+(ay^2)^2\}$$
$$=(4x^2-ay^2)(16x^4+4ax^2y^2+a^2y^4).$$

प्रश्नमाला 26

गुणा करो :

1. $1+2x+4x^2$ को $1-2x$ से। 2. x^2+3x+9 को $x-3$ से।
3. $16a^2+4a+1$ को $4a-1$ से।
4. $x^4+2x^2yz+4y^2z^2$ को x^2-2yz से।
5. $9m^2+6mnq+4n^2q^2$ को $3m-2nq$ से।

गुणनखंड निकालो :

6. $125a^3-1$. 7. $343x^3-8y^6$. 8. $216k^3-125l^3$.
9. $1-512k^3$. 10. $729m^3-64a^3n^6$.

61. सूत्र : $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

$$[\,(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$$
$$=x^2+bx+ax+ab$$
$$=x^2+(a+b)x+ab.]$$

टीका। साफ जाहिर है कि नीचे दिये हुए सूत्र भी इसी सूत्र के भीतर शामिल हैं।

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ (x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab\\(2)\ (x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab\\(3)\ (x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab\end{array}\right\}$$

दृष्टान्त रूप में कहा जा सकता है :

$$(x-a)(x-b)=\{x+(-a)\}\{x+(-b)\}$$
$$=x^2+\{(-a)+(-b)\}x+\{(-a)\times(-b)\}$$
$$=x^2-(a+b)x+ab.$$

अन्य सूत्र को भी इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं।

इसलिए 61 वें नियम के सूत्र को और साफ तौर से नीचे दिये हुए रूप में प्रकट कर सकते हैं।

$(x+a)(x+b)=x^2+($ a व b का बीजीय योगफल $)\times x$
$+($ a व b का गुणनफल $)$

उदाहरण 1. $x+3$ और $x+4$ का गुणनफल लिखो।

चूँकि $3+4=7$
और $3\times4=12$, $\therefore$ गुणनणल $=x^2+7x+12.$

उदाहरण 2. $x-7$ और $x+4$ का गुणनफल लिखो।

चूँकि $-7+4=-3$
और $(-7)\times4=-28$, $\therefore$ गुणनफल $=x^2-3x-28.$

उदाहरण 3. $x+5$ और $x-9$ का गुणनफल लिखो।

चूँकि $5-9=-4$
और $5\times(-9)=-45$, $\therefore$ गुणनफल $=x^2-4x-45.$

उदाहरण 4. $x-2$ और $x+7$ का गुणनफल लिखो।

चूँकि $-2+7=5$
और $(-2)\times7=-14$, $\therefore$ गुणनफल $=x^2+5x-14.$

उदाहरण 5. $x-5$ और $x-8$ का गुणनफल लिखो।

चूँकि $-5-8=-13$
और $(-5)\times(-8)=40$, $\therefore$ गुणनफल $=x^2-13x+40.$

प्रश्नमाला 27

गुणनफल लिखो :

1. $x+1$ और $x+2$ का।
2. $x+2$ और $x+9$ का।
3. $x-5$ और $x+6$ का।
4. $x-3$ और $x-11$ का।

5. $a-11$ और $a+16$ का।
6. $m-7$ और $m+19$ का।
7. $p+13$ और $p-11$ का।
8. $p+12$ और $p-17$ का।
9. $x-4$ और $x+9$ का।
10. $x-5$ और $x-10$ का।
11. $x-12$ और $x+5$ का।
12. $k-13$ और $k+2$ का।
13. $a+5$ और $a+14$ का।
14. $m-14$ और $m+6$ का।
15. $x-5$ और $x-13$ का।
16. $x+7$ और $x+12$ का।
17. $a-3$ और $a-11$ का।
18. $x+4$ और $x-13$ का।
19. $m+5$ और $m-16$ का।
20. $x-8$ और $x-10$ का।
21. $a+6$ और $a-12$ का।
22. $m-7$ और $m+13$ का।
23. $x-10$ और $x-16$ का।
24. $x+5$ और $x-18$ का।
25. $x-16$ और $x+10$ का।

पाँचवाँ अध्याय

सरल समीकरण (Simple Equations)

62. परिभाषा : दो व्यंजकों की बराबरी प्रकट करने के लिए उनको बराबरी के चिह्न '=' के दोनों ओर लिखने से एक **समीकरण** बनता है, और समानता-चिह्न के दोनों ओर के व्यंजकों में से प्रत्येक को एक एक **पक्ष** कहते हैं।

'समीकरण' शब्द का इतने व्यापक अर्थ में प्रयोग नहीं किया जाता। जब एक बीजगणितीय व्यंजक दूसरे बीजगणितीय व्यंजक के बराबर होता है, और अक्षरों के भिन्न भिन्न मात्राओं से उनकी बराबरी में कोई अन्तर नहीं पड़ता तो ऐसे समीकरण को **तादात्म्य** (identity) कहते हैं; जैसे, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; a और b का मूल्य चाहे कुछ भी हो बायें और दायें पक्ष एक दूसरे के बराबर हैं। या केवल अक्षरों के किसी विशेष मूल्य के लिए, जैसे, $4x=8$ (जो तभी ठीक है जब $x=2$ हो)।

परन्तु यदि व्यंजकों के एक या एक से अधिक अक्षरों के किसी विशेष मूल्य या मूल्यों पर समीकरण के बायें और दायें पक्ष के व्यंजकों की बराबरी निर्भर हो तो ऐसे समीकरण को **कल्पित समीकरण** (equation of condition) कहते हैं।

जैसे, $(x+1)+(2x+3)=3x+4$ यह एक तादात्म्य है, कारण x का मान चाहे कुछ भी हो, हर हालत में बायाँ व दाहिना पक्ष परस्पर समान है; किन्तु $(x+1)+(x+3)$

$=3x+2$ यह एक कल्पित समीकरण (अथवा केवल 'समीकरण' भी कहते हैं) है ; कारण यदि x का मान 2 हो तभी बायाँ पक्ष दायें पक्ष के बराबर होगा।

समीकरण के जिन अक्षर या अक्षरों के, एक अथवा एक से अधिक विशेष मात्राओं पर समीकरण के बायें और दायें पक्षों का समत्व निर्भर हो उनको समीकरण के अव्यक्त या अनजान पद (unknown quantity) कहते हैं। साधारण रूप में अव्यक्त पदों को अंगरेज़ी वर्णमाला के शेषांश के अक्षरों (जैसे, x, y, z आदि) द्वारा सूचित करते हैं।

अव्यक्त पद की जिस मात्रा या मात्राओं पर समीकरण के दोनों पक्षों की बराबरी निर्भर हो, कहा जाता है कि ये मात्रायें समीकरण को सिद्ध (satisfy) करती हैं ; और इन मात्राओं को समीकरण के मूल (root अथवा solution) कहते हैं।

अव्यक्त पदों के जिन मूल्यों से समीकरण सिद्ध होता है उनके निकालने को समीकरण को हल करना कहते हैं।

जिस समीकरण में केवल एक ही अव्यक्त पद होता है, और उसका घात यदि एक ही हो, तो उसे **एकघात एकवर्ण समीकरण** (simple equation) कहते हैं।

63. स्वयंसिद्धियाँ : समीकरण को हल करना साधारण रूप से नीचे दिये हुए सिद्धांतों पर निर्भर है :

(1) समान राशियों में समान राशि जोड़ देने से योगफल समान होते हैं।

(2) समान राशियों से समान राशियाँ घटा देने से अन्तरफल समान होते हैं।

(3) समान राशियों को एक ही अथवा समान राशियों द्वारा गुणा करने से गुणनफल समान होते हैं।

(4) समान राशियों को एक ही अथवा समान राशियों द्वारा भाग करने से भजनफल समान होते हैं।

उपसिद्धान्त 1. स्वयंसिद्धि (1) व (2) से समीकरण को हल करने के लिए नीचे दिये हुए नियम निकलते हैं।

समीकरण के किसी पद को उसका चिह्न बदलकर एक पक्ष से दूसरे पक्ष को ले जा सकते हैं। इस क्रिया को पक्षान्तरानयन याने जगह बदलना (transposition) कहते हैं।

जैसे, यदि मान लिया जाय कि $x-a=b+c$; इस समता के दोनों पक्ष में a योग करने से

$$x-a+a=b+c+a \quad \ldots \quad [\text{स्वयंसिद्धि } 1]$$

अथवा $x=b+c+a$;

और ऊपर दिये हुए समीकरण के दोनों पक्षों से c घटाने पर

$$x-a-c=b+c-c \quad \cdots \qquad [\text{स्वयंसिद्धि } 2]$$
$$=b.$$

इसलिए पहली बार बायें पक्ष से $-a$ पक्ष बदलने पर $+a$ हो जाता है ; और दूसरी बार दायें पक्ष से $+c$ पक्ष बदलकर $-c$ हो जाता है।

इसी प्रकार यदि $x-a=b-c+d$ हो, तो $x-a-b+c-d=0$ होगा।

उपसिद्धान्त 2. यदि समीकरण के दोनों पक्षों के प्रत्येक पद का चिह्न बदल दिया जाय तो समत्व नष्ट नहीं होता।

कारण, यदि मान लिया जाय कि $x-a=b+c$;
तो तीसरी स्वयंसिद्धि के अनुसार,

$$(x-a)\times(-1)=(b+c)\times(-1) ;$$
अथवा $$-x+a=-b-c.$$

64. सहज उदाहरण : ऊपर दिये हुए नियमों के प्रयोग द्वारा समीकरणों के हल करने की पद्धति नीचे दिये हुए उदाहरणों में स्पष्ट रूप समझाई जा सकती है।

उदाहरण 1. हल करो : $18x=54$.

टीका। इस प्रश्न को दूसरी रीति से भी पढ़ सकते हैं ; जैसे, यदि $18x=54$ हो, तो x का मूल्य क्या होगा ?

चूँकि $18x=54$,
इसलिए दोनों पक्षों में 18 का भाग देने से

$$\frac{18x}{18}=\frac{54}{18} ; \text{ अथवा } x=3.$$

इसलिए x का मूल्य $=3$.

उदाहरण 2. हल करो : $3x+5=x+19$.

इसलिए पक्षान्तरानयन से $3x-x=19-5$; अथवा $2x=14$.

अब दोनों पक्षों को 2 द्वारा भाग करने से

$x=7$ प्राप्त होता है। [स्वयंसिद्धि 4]

उदाहरण 3. हल करो : $-11x+2(3-x)=32$.

कोष्ठक खोलने पर, $-11x+6-2x=32$,

अथवा $-13x+6=32$,

अथवा $-13x=32-6$, [पक्षान्तरानयन-द्वारा]

अथवा $-13x=26$.

अब दोनों पक्षों को (-1) द्वारा गुणा करने से

$$(-1)\times(-13x)=(-1)\times 26,$$

अथवा $13x=-26$;

दोनों पक्षों को 13 द्वारा भाग करने से

$$x=-\tfrac{26}{13}=-2.$$

इसलिए x का मूल्य $=-2$.

उदाहरण 4. हल करो : $(x+2)(3x+4)-6x=10+(3x+2)(x+1)$.

वाम पक्ष $=3x^2+10x+8-6x=3x^2+4x+8$;

दक्षिण पक्ष $=10+3x^2+5x+2=3x^2+5x+12$;

इसलिए $3x^3+4x+8=3x^2+5x+12$.

दोनों पक्षों से $3x^2$ घटाने से

$4x+8=5x+12$; [स्वयंसिद्धि 2]

इसलिए पक्षान्तरानयन द्वारा,

$4x-5x=12-8$; अथवा $-x=4$;

$\therefore\ x=-4$. [पूर्व नियम का उपसि०. 2]

इसलिए x का मूल्य $=-4$.

टीका। यह बात आसानी से प्रकट हो जायगी कि समीकरण के दोनों पक्षों में x के लिए उसका मूल्य (अर्थात् -4) प्रयोग करने से, प्रत्येक पक्ष का मूल्य 40 के बराबर होगा।

उदाहरण 5. यदि $\frac{x}{6}+5=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$ हो, तो x का मूल्य निकालो।

चूँकि $\frac{x}{6}+5=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$,

इसलिए दोनों पक्षों को 12 (अर्थात् हरों के लघुत्तम समापवर्त्य) द्वारा गुणा करने से,

$$12\left(\frac{x}{6}+5\right)=12\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right),$$

अथवा $2x+60=4x+3x=7x$;

इसलिए पक्षान्तरानयन द्वारा, $2x-7x=-60$,

अथवा $-5x=-60$;

इसलिए -5 द्वारा दोनों पक्षों को भाग करने से $x=12$.

इसलिए समीकरण का मूल $=12$.

प्रश्नमाला 28

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $4x = 16.$
2. $3x = -15.$
3. $7x = -28.$
4. $-5x = 25.$
5. $\frac{x}{5} = -1.$
6. $\frac{-x}{3} = 20.$
7. $3x + 5(2 - x) = -16.$
8. $5(1 - x) + 3(2 - x) = -29.$
9. $4(2 - x) + 2(3 - 2x) = 30.$
10. $7(3 - 2x) + 5(x - 1) = 34.$
11. $4x + 3 = 2x + 5.$
12. $3x + 2 = x + 6.$
13. $5x - 6 = 2x + 3.$
14. $15x - 9 = 11x - 25.$
15. $4(x - 3) = 2(x - 6).$
16. $2(x - 15) = 5(x - 11) + 4.$
17. $19 - 3x = 5x + 35.$
18. $3(x - 2) + 7(2x - 3) = 5(1 - 2x) - 59.$
19. $13x - 4(5x - 8) + 17 = 0.$
20. $14(x - 4) + 3(x + 5) = 6(7 - 2x) + 4.$
21. $8(2x - 7) - 9(3x - 14) = 15.$
22. $3x - 13(2x - 13) = 4x - 20.$
23. $49 + 13(5x + 27) = 8(5 + x) - 3x.$
24. $16 - 5(7x - 2) = 13(x - 2) + 4(13 - x).$
25. $8x + 5(x + 7) + 9(2x + 23) - 3(x + 6) = 0.$
26. $(x - 7)(4x - 29) = (2x - 5)(2x - 17) + 1.$
27. $(3x + 2)(2x - 6) = (4 - 3x)(1 - 2x) - 10.$
28. $(3x + 5)(6x - 7) = (3x + 2)(9x - 13) - (3x + 1)(3x - 1).$
29. $(x + 2)(2x + 5) = 2(x + 1)^2 + 13.$
30. $(x + 1)(4x - 7) - (x - 1)(x + 5) = 3(x + 2)^2 + 5.$
31. $\frac{x}{2} + 5 = \frac{x}{3} + 7.$
32. $\frac{x}{6} - \frac{x}{5} = \frac{x}{15} - \frac{x}{3} + 7.$
33. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2 - \frac{x}{6} + \frac{5x}{12}.$

छठा अध्याय

एकघात एकवर्ण समीकरण सम्बन्धी प्रश्नावली

(Problems leading to Simple Equation)

65. सांकेतिक वाक्य (Symbolical Expression) : समीकरण सम्बन्धी प्रश्नों का हल करने के लिए चिह्नों के प्रयोग द्वारा प्रश्न में दी हुई शर्तों को सांकेतिक वाक्य में प्रकट करने में कठिनाई होती है। इसलिए प्रश्नों को हल करने के पहले छात्रों को इस विषय का विशेष अभ्यास प्राप्त करना चाहिए। नीचे दिये हुए उदाहरणों द्वारा इस विषय का विशेष स्पष्टीकरण होगा।

उदाहरण 1. एक व्यक्ति की आमदनी यदि महीने में x रुपये हो तो आध महीने में उसको कितनी चवन्नियों की आमदनी होगी ?

चूँकि 1 रुपया = 4 चवन्नी

इसलिए x रुपया = $4x$ चवन्नी

इएलिए उस व्यक्ति को महीने में $4x$ चवन्नियों की आमदनी है

और आध महीने की आमदनी = $4x$ चवन्नियों का आधा अर्थात् $2x$ चवन्नियाँ।

उदाहरण 2. यदि एक कीड़ा किसी खूँटी पर x इंच प्रति मिनट चढ़ सके तो y घंटों में वह कितने फ़ुट चढ़ेगा ?

चूँकि एक इंच = एक फ़ुट का $\frac{1}{12}$ वाँ हिस्सा

इसलिए x इंच = एक फ़ुट का $\frac{x}{12}$ वाँ हिस्सा

इसलिए कीड़ा एक मिनट में $\frac{x}{12}$ फ़ुट चढ़ता है

$\therefore$ 60 मिनट में कीड़ा $\frac{x}{12} \times 60$ फ़ुट चढ़ता है

अर्थात् एक घंटे में कीड़ा $5x$ फ़ुट चढ़ता है

$\therefore$ y घंटों में कीड़ा $(5x \times y)$ फ़ुट चढ़ता है।

इसलिए फ़ुट की संख्या = $5xy$.

उदाहरण 3. घंटे में x मील चलकर एक व्यक्ति 10 मील रास्ता कितनी देर में तै करेगा ?

एक घंटे में x मील जाता है ;

$\therefore$ एक मील जाने का समय $= \frac{1}{x}$ घंटा

$\therefore$ 10 मील जाने का समय $= \frac{10}{x}$ घंटा

इसलिय समय $= \frac{10}{x}$ घंटा ।

उदाहरण 4. दो अंकवाली किसी एक संख्या का वायाँ अंक x और दाँया y हो तो संख्या को किस प्रकार सूचित करेंगे ?

वाईं ओर से आरम्भ करके अंकों का क्रम यदि 4 व 5 हो तो संख्या $= 10 \times 4 + 5$.

यदि 5 व 7 हो तो संख्या $= 10 \times 5 + 7$

यदि 8 व 4 हो तो संख्या $= 10 \times 8 + 4$ आदि ।

इसलिए यह स्पष्ट है कि वाईं ओर से आरम्भ करके यदि अंकों का क्रम x व y हो तो संख्या $= 10 \times x + y$, अर्थात् $10x + y$ है ।

प्रश्नमाला 29

1. दो संख्याओं का योगफल 15 है ; यदि उनमें से एक संख्या x हो, तो दूसरी क्या होगी ?

2. दो संख्याओं का अंतर 20 है ; उनमें से बड़ी संख्या यदि x हो तो दूसरी क्या होगी ?

3. दो संख्याओं का अंतरफल 25 है ; उनमें से छोटी संख्या यदि x हो तो बड़ी संख्या क्या होगी ?

4. y से 25 कितना बड़ा है ?

5. y से $2x$ कितना छोटा है ?

6. यदि 21 का एक गुणनखंड x है, तो दूसरा गुणनखंड क्या है ?

7. कौन सी संख्या 100 से $3x$ छोटी है ?

8. $4x$ में से कौन संख्या घटाने से $3y$ बाक़ी बचता है ?

9. एक व्यक्ति जो घंटे में y मील चल सकता है, x घंटे में कितने मील जा सकेगा ?

10. एक व्यक्ति जो घंटे में y मील चल सकता है, x मील रास्ता कितने समय में जा सकेगा ?

11. एक व्यक्ति की उम्र यदि x साल की हो तो 20 वर्ष के बाद उसकी अवस्था क्या होगी ? 3 साल पहले उसकी क्या उम्र थी ?

12. एक व्यक्ति x दिन में 60 मील चल सकता है, तो प्रतिदिन वह कितने मील चल सकता है ?

13. एक रेलगाड़ी x घंटे में 30 मील जा सकती है तो एक सेकंड में वह कितने फ़ुट जाती है ?

14. यदि मैं फ़ी हफ़्ता x आना खर्च करूं तो सालाना $5x$ रुपये की आमदनी से मैं कितना बचा सकूँगा ?

15. ऐसी पाँच लगातार संख्यायें लिखो जिनके बीच की संख्या x हो।

16. x ठीक मध्यम संख्या है; इस प्रकार तीन क्रमिक संख्याओं का योगफल निकालो।

17. $2m+1$ के ठीक बाद की विषम संख्या लिखो।

18. $2x$ के ठीक पहलेवाली सम संख्या लिखो।

19. यदि x मनुष्य एक काम को 10 दिन में कर सकते हैं, तो y मनुष्य उस काम को कितने दिन में कर सकेंगे ?

20. यदि एक कमरे की लम्बाई a गज़ और चौड़ाई b फ़ुट हो तो कमरे का क्षेत्रफल वर्ग फ़ुट मे निकालो।

21. 20 प्रश्न में यदि 4 फ़ुट की लम्बाई को इकाई मानें तो क्षेत्रफल वर्ग इकाई में निकालो।

22. एक व्यक्ति x मील रास्ता y घंटे में चल सकता है तो 20 मिनट में वह कितने मील चल सकेगा ?

23. एक व्यक्ति a घंटों में x मील रास्ता चल सकता है तो 16 मील रास्ता वह कितने समय में चल सकेगा ?

24. 20 वर्ष पहले एक व्यक्ति की उम्र $x-5$ साल की थी, तो अब उसकी कितनी उम्र है ? 30 साल के बान उसकी अवस्था कितनी होगी ?

25. यदि दो अंकवाली किसी संख्या की दाईं ओर का अंक x है और बाईं ओर का अंक y है, तो उस संख्या को कैसे प्रकट करेंगे ?

26. यदि तीन अंकवाली किसी संख्या की बाईं ओर से आरम्भ करके अंकों का क्रम x, y व z हो, तो उस संख्या को कैसे प्रकट करेंगे ?

27. 26 प्रश्न के अंकों को उल्टे क्रम में लिखने से जो संख्या बनती है उसको कैसे प्रकट करेंगे ?

66. समीकरण-सम्बन्धी सरल प्रश्नावली (Easy Problems) : इस अध्याय के विषय के साथ परिचित कराने के लिए नीचे कई उदाहरण दिये गये हैं। प्रत्येक उदाहरण में अव्यक्त अर्थात् अनज़ाने पद को x द्वारा सूचित किया जायगा।

उदाहरण 1. A व B एक साथ 540 रुपये की पूँजी लेकर साझे में तिजारत शुरू करते हैं ; इसमें A का हिस्सा B के हिस्से का दुगना है ; तो दोनों का हिस्सा अलग अलग निकालो।

मान लो कि B का हिस्सा x द्वारा सूचित होता है, तो A का हिस्सा अवश्य $2x$ होगा।

इसलिए सम्पूर्ण पूँजी $= x + 2x = 3x$

किन्तु कहा गया है कि सम्पूर्ण पूँजी 540 रुपये है।

इसलिए $3x = 540$ रुपये ;

$\therefore\ x = 180$ रुपये ;

अर्थात् B का हिस्सा $= 180$ रुपये ; $\therefore$ A का हिस्सा $= (2 \times 180)$ अर्थात् 360 रुपये है।

उदाहरण 2. 34 के एसे दो भाग करो कि उनमें 8 का अन्तर हो।

मान लो कि बड़ा भाग x द्वारा सूचित होता है, तो छोटा भाग $34 - x$ द्वारा सूचित होगा।

इसलिए प्रश्न की शर्त के मुताबिक $x - (34 - x) = 8$

अर्थात् $2x - 34 = 8$

अथवा $2x = 34 + 8 = 42$

$\therefore\ x = 21$

$\therefore$ बड़ा अंश 21 है, और छोटा अंश $34 - 21 = 13$ है।

उदाहरण 3. किस संख्या का $\frac{1}{3}$ भाग उसके ^{1} भाग से 4 अधिक है ?

मान लो कि वह संख्या x द्वारा सूचित होती है।

तो, प्रश्न की शर्त के अनुसार $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 4$; अथवा $5x - 3x = 60$

अथवा $2x = 60$, $\therefore\ x = 30$.

उदाहरण 4. 10 वर्ष पहले B की जो उम्र थी, 10 वर्ष के बाद A की उम्र उसकी दुगनी हो जायगी ; यदि इस समय A, B से 9 वर्ष बड़ा हो तो उन दोनों की अब कितनी उम्र है निकालो।

मान लो कि B की उम्र इस समय x द्वारा मालूम होती है ; तो इस समय A की उम्र $x+9$ द्वारा मालूम होगी।

तो 10 वर्ष के बाद A की उम्र $= x+\overline{9+10} = x+19$

और 10 वर्ष पहले B की उम्र $= x-10$ होगी

अब, प्रश्न की शर्त के अनुसार $x+19 = 2(x-10)$

अथवा $x+19 = 2x-20$

जगह बदलने से $2x - x = 20+19$ अथवा $x = 39$

अर्थात् इस समय B की उम्र 39 वर्ष है

$\therefore$ A की उम्र 48 वर्ष है।

प्रश्नमाला 30

1. 9 फ़ुट लम्बी एक सरल रेखा के ऐसे दो भाग करो कि एक भाग दूसरे भाग का दुगना हो। हर हिस्से की लम्बाई मालूम करो।

2. एक थैली में जितने रुपये हैं ठीक उतनी ही अठन्नियाँ हैं, और कुल रक़म 32 रुपये की है, तो थैली में कितनी अठन्नियाँ हैं ?

3. यदि दो संख्याओं का योगफल 50 हो और उनका अन्तरफल 30 हो, तो उन संख्याओं को निकालो।

4. एक ऐसी संख्या निकालो जो 96 और उस संख्या के अन्तरफल का पंचगुना है।

5. एक संख्या का अठगुना उस संख्या के आधे से 90 अधिक है; तो उस संख्या को निकालो।

6. एक संख्या से 40 घटाने पर, अन्तरफल उस संख्या के तिहाई अंश के समान होता है ; तो संख्या को निकालो।

7. वह संख्या निकालो जो कि 35 से जितनी बड़ी है और 67 से जितनी छोटी है उस बढ़ती और कमती का अंतर 22 है।

8. एक संख्या 16 से जितनी अधिक है, उसका चौगुना, 416 से वह संख्या जितनी छोटी है उसके समान है, तो उस संख्या को निकालो।

9. तीन लगातार पूर्ण संख्याओं का योगफल 129 है, तो उन तीन संख्याओं को निकालो।

10. ऐसी एक संख्या निकालो जिसको 7 द्वारा गुणा करने से, गुणनफल 132 से उतना ही अधिक हो जितना वह संख्या 132 से छोटी हो।

11. 90 के ऐसे दो हिस्से बनाओ कि एक हिस्से के तिगुने और दूसरे हिस्से के चौगुने का योगफल 335 हो।

12. दो संख्याओं का योगफल 39 है और एक संख्या का $\frac{1}{6}$ भाग, दूसरी संख्या के $\frac{1}{8}$ भाग के बराबर है, तो दोनों संख्यायें कितनी हैं ?

13. किस संख्या का चौथाई अंश उसके $\frac{1}{5}$ से 5 अधिक है, बताओ।

14. किस संख्या का $\frac{1}{6}$ अंश उसके $\frac{1}{8}$ से 3 अधिक है, बताओ।

15. 21 के ऐसे दो भाग बनाओ कि एक भाग का दसगुना दूसरे भाग के नौगुने से 1 अधिक हो।

16. एक मकान और एक बग़ीचे का मूल्य मिलकर £850 होता है, और बग़ीचे का मूल्य मकान के मूल्य का $\frac{5}{12}$ अंश है तो दोनों का अलग अलग मूल्य निकालो।

17. £420 को दो व्यक्तियों में ऐसे बाँट दो कि एक व्यक्ति को जितने शिलिंग मिलें, दूसरे को उतने ही अर्ध-क्राउन मिलें।

18. दो गडरिये भेड़ों को आपस में मूल्य के अनुसार बराबर बराबर बाँट लेने को राज़ी हो गये, *A* को 72 भेड़ें मिली, और *B*, *A* को £35 पाउंड देकर 92 भेड़ लेता है। प्रत्येक भेड़ का मूल्य यदि बराबर हो, तो एक भेड़ का मूल्य बताओ।

19. एक व्यक्ति की उम्र दूसरे व्यक्ति की उम्र से 10 वर्ष अधिक है, 15 वर्ष पहले बड़े व्यक्ति की उम्र छोटे की उम्र की दुगनी थी ; इस समय प्रत्येक व्यक्ति की क्या उम्र होगी ?

20. पिता की वर्तमान उम्र पुत्र की उम्र की तिगुनी है ; और 10 वर्ष के बाद पिता की उम्र पुत्र की उम्र की दुगनी हो जायगी ; प्रत्येक की वर्तमान उम्र कितनी है निकालो।

सातवाँ अध्याय

बिन्दु अंकित करना (Plotting of Points)

रेखा चित्र (Graphs)

67. भूमिका : दूसरे व तीसरे अध्याय में यह दिखलाया गया है कि बीजगणित के विषयों को चित्रों के उदाहरण द्वारा किस प्रकार सरलता के साथ और सुन्दर रूप में समझाया जा सकता है ; उन विषयों को पूरी तरह समझने में चित्र बहुत सहायता करता

है। चित्रों-द्वारा बीजगणित की राशियों का तादात्म्य के गठन और समीकरणों को हल करने की भूमिका के तौरपर इस अध्याय में केवल यही दिखलायेंगे कि बीजगणित की राशियाँ किस प्रकार रेखागणित के विन्दुओं द्वारा चित्रित की जा सकती हैं।

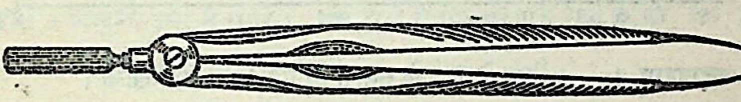
ऊपर दिये हुए रेखागणित-सम्बन्धी चित्र को रेखा-चित्र (graph) कहते हैं, और चित्रों की सहायता से बीजगणित की राशियों के प्रश्नों को हल करने की क्रिया को रेखाचित्रिय फल (graphical solution) कहते हैं।

68. काम में आनेवाले यन्त्र : विद्यार्थियों को सबसे पहले निम्नलिखित यन्त्रों को बहुत बारीकी से काम में लाना सीखना चाहिए।

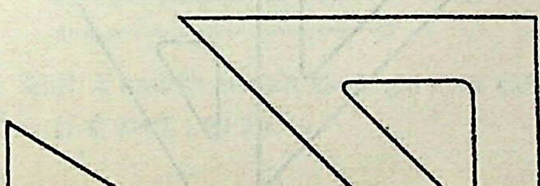
(क) चित्र खींचने की एक पेंसिल (a drawing pencil)

टीका। पेंसिल का सिरा महीन होना चाहिए ताकि उससे जो रेखा खींची जाय वह बहुत बारीक हो।

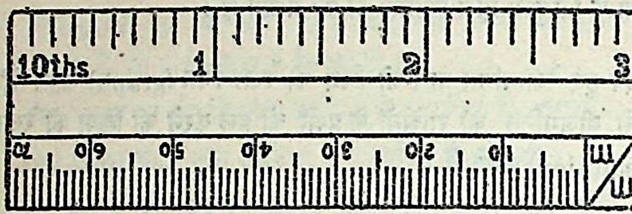
(ख) एक कम्पास (a pair of dividers)



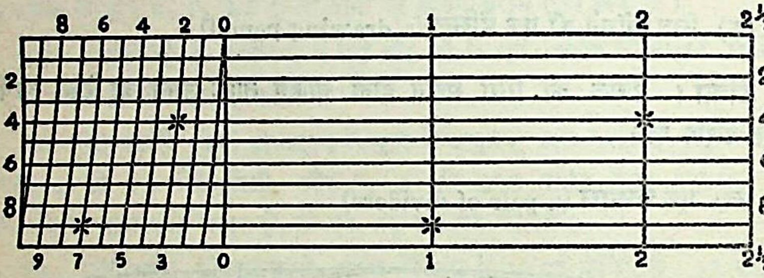
(ग) दो सम-कोणक (two set-squares).



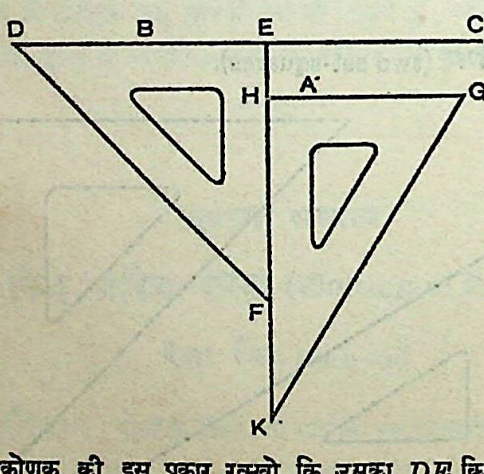
(घ) एक इंच को दस हिस्सों में नापनेवाले चिह्नोंसहित एक पटरी (a graduated scale showing tenths of an inch)।



(ङ) एक इंच को सौ हिस्सो में नापनेवाले चिह्नोंसहित एक पटरी (a diagonal scale for measuring hundredths of an inch).



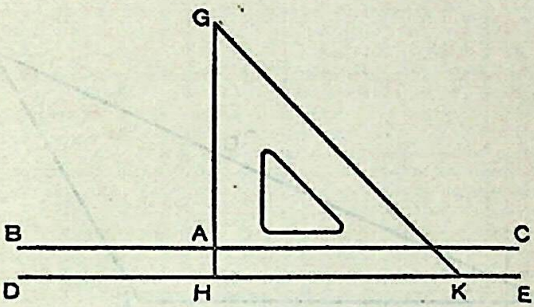
उदाहरण 1. A बिन्दु से BC के समानान्तर एक सीधी रेखा खींचो।



DEF समकोणक को इस प्रकार रक्खो कि उसका DE किनारा ठीक BC रेखा के साथ मिला हो; तब GHK समकोणक का HK किनारा DEF समकोणक के EF किनारे के

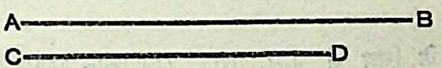
साथ मिलाकर GHK समकोणक को इस प्रकार हटाते रहो, कि उसका GH किनारा ठीक A विन्दु के ऊपर रहे ; ऐसी अवस्था में GH के बराबर एक रेखा खींचने पर वह BC के समानान्तर होगी (पिछला चित्र देखो)।

उदाहरण 2. BC सरल रेखा के A विन्दु से BC के ऊपर एक लम्ब खींचो।



पहले BC के समानान्तर एक DE रेखा खींचो (चित्र देखो)। अब GHK समकोणक को इस प्रकार रक्खो कि उसका HK किनारा DE के साथ मिला हो और उसका GH किनारा A विन्दु के ऊपर से गुजरे। अब HG से मिलाकर एक रेखा खींचो ; वह BC के ऊपर A विन्दु से लम्ब होगी।

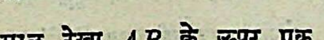
उदाहरण 3. AB व CD दो सीधी रेखाओं को लम्बाई निकालो।



इंच को सौ हिस्सों में नापनेवाले स्केल और कम्पास-द्वारा मालूम होता है कि AB की लम्बाई 2·24 इंच और CD की लम्बाई 1·69 इंच है।

प्रश्नमाला 31

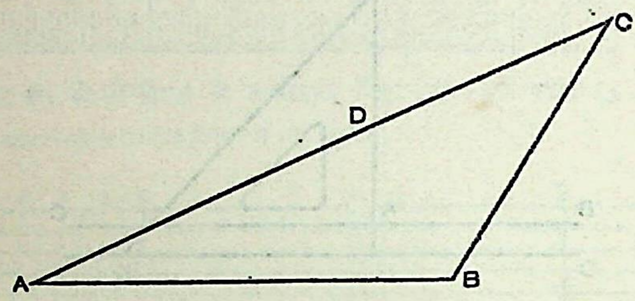
1. AB सीधी रेखा को उसकी दुगुनी लम्बाई तक बढ़ाओ।



2. किसी एक सरल रेखा AB के ऊपर एक बिन्दु D, AB का मध्य बिन्दु

मानकर लिया गया, किन्तु कम्पास-द्वारा मापने से AD, BD से थोड़ा छोटा पाया गया। इस ग़लती को कैसे सुधारेंगे ?

3. ABC एक त्रिभुज है और D, AC के ऊपर कोई एक विन्दु है (नीचे का चित्र देखो); D बिन्दु से AB की ओर CB के समानान्तर एक रेखा खींचो।



4. ऊपर के चित्र में, D विन्दु से AC के जिस ओर AB है उसके उल्टी ओर BC के समानान्तर एक सरल रेखा खींचो।

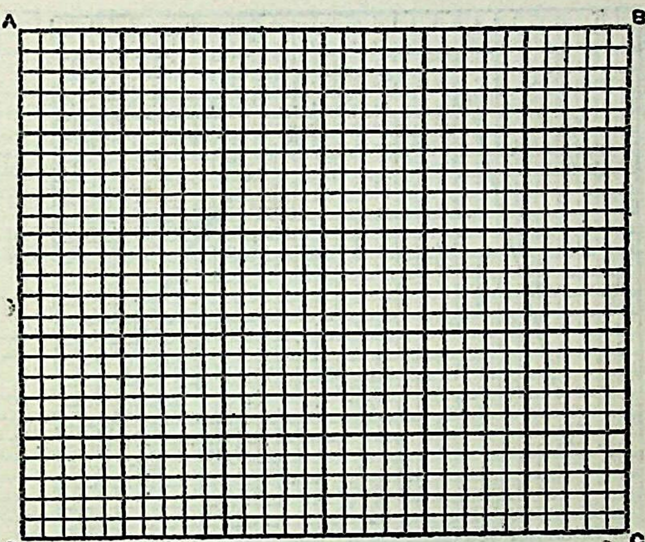
5. प्रश्न 3 के चित्र में B बिन्दु से AC के समानान्तर एक सरल रेखा खींचो।

6. किसी दिये हुए त्रिभुज के तीन शीर्ष बिन्दुओं से उनके सामने के बाहुओं पर लम्ब खींचो।

7. प्रश्न 3 के चित्र में AB, BC, CA तीन भुजाओं की और AD और DC की लम्बाई निकालो।

69. वर्गांकित काग़ज़ (Squared Paper) : वर्ग खींचे हुए काग़ज़ का नमूना आगे दिया गया है। इसमें बराबर दूरी पर दो तरह की समानान्तर सरल रेखायें खींची हुई हैं। एक तरह की रेखायें काग़ज़ की लम्बाई के और दूसरी तरह की रेखायें काग़ज़ की चौड़ाई के समानान्तर हैं। इससे स्पष्ट है कि पहली तरह की रेखायें दूसरी की रेखाओं पर लम्बवत् हैं। दोनों तरह की रेखायें लगातार एक इंच के दसवें हिस्से की दूरी पर खींची गई हैं, इसलिए बहुत से छोटे समान वर्ग बनते हैं। दोनों तरह की लकीरों में कुछ मोटी रेखायें दिखाई

पड़ती हैं, जो कि एक दूसरे से आध इंच की दूरी पर हैं। फलतः इन मोटी रेखाओं के द्वारा कुछ बड़े बड़े वर्ग बन जाते हैं, जिनमें से प्रत्येक के बाहु की लम्बाई आध इंच है। प्रत्यक्ष देखा जाता है कि प्रत्येक बड़े वर्ग में 25 छोटे वर्ग हैं।

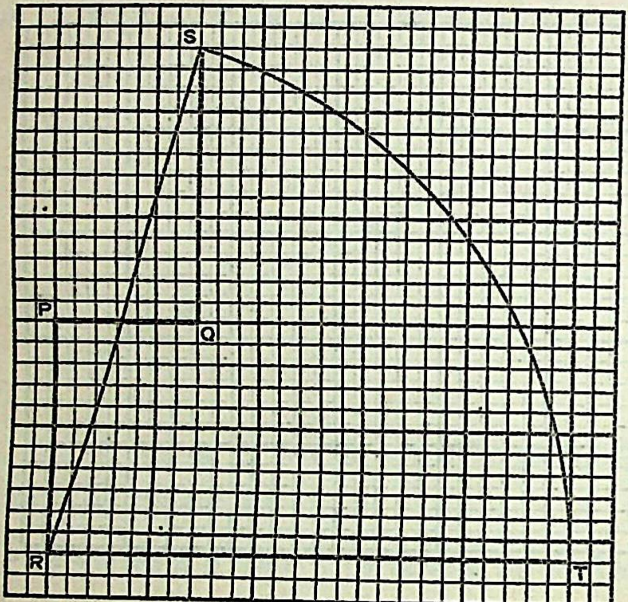


टीका 1. वर्गांकित कागज़ के नमूने में AB की समानान्तर रेखाओं को पूर्व-पश्चिम (east-west) रेखा और AD के समानान्तर रेखाओं को उत्तर-दक्षिण (north-south) रेखा कहा जा सकता है। उनको क्रमशः आड़ी (horizontal) व खड़ी (vertical) लकीर भी कह सकते हैं।

टीका 2. आसानी के लिए किसी छोटे वर्ग के बाहु की लम्बाई को 'a' द्वारा सूचित कर सकते हैं।

टीका 3. ऊपर दिये हुए कागज़ पर इस प्रकार की रेखायें खींची जा सकती हैं कि एक छोटे वर्ग के बाहु की लम्बाई एक सेन्टीमीटर का दसवाँ हिस्सा अर्थात् एक मिलीमीटर हो। इस हालत में प्रत्येक बड़े वर्ग के बाहु की लम्बाई आधा सेन्टीमीटर अर्थात् 5 मिलीमीटर होगी।

उदाहरण 1. चार स्टेशन P, Q, R, S इस प्रकार स्थित हैं कि Q, P से पूर्व की ओर 7 मील की दूरी पर है ; R, P से दक्षिण की ओर 11 मील की दूरी पर है ; और S, Q से उत्तर की ओर 13 मील की दूरी पर है। तो R से S की दूरी निकालो।



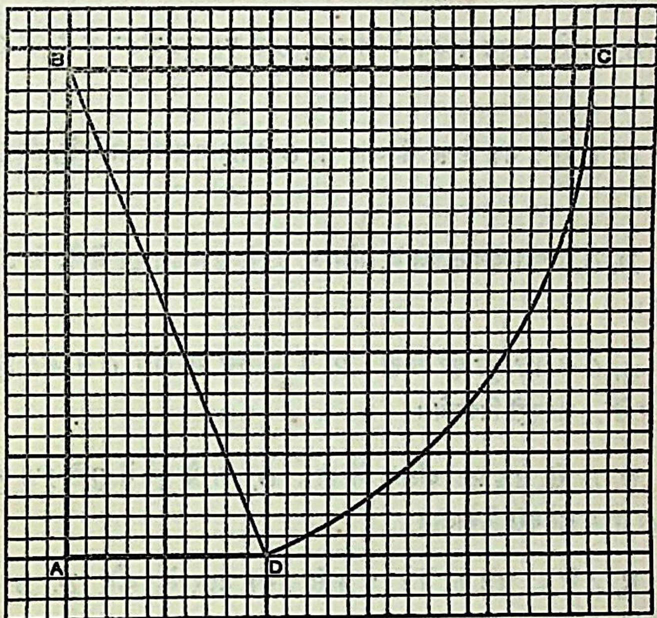
मान लो कि छोटे वर्ग के बाहु को लम्बाई a द्वारा सूचित की जाती है ; और a= एक मील हो, तो P, Q, R, S का स्थान ऊपर के चित्र के अनुसार होगा ; और $PQ = 7a$; $PR = 11a$; और $QS = 13a$.

अब R को केन्द्र मान कर और RS को त्रिज्या लेकर एक वृत्तचाप खींचो ताकि वह R बिन्दु से खींची हुई पूव-पश्चिम सरल रेखा को T बिन्दु पर काटे।

चूँकि $RT = 25a$; इसलिए $RS = 25a$.
इसलिए दूरी $= 25$ मील।

उदाहरण 2. एक सीधा खूँटा ऊपर को खड़ा किया गया है ; उसकी ऊँचाई 8 फुट है ; $8\frac{2}{3}$ फुट के एक डोरे का एक सिरा खूँटे के ऊपर के सिरे में बाँधकर

दूसरा सिरा इस प्रकार ज़मीन के साथ मिलाकर रक्खा गया कि रस्सी सीधी रहे। खूँटे के ज़मीन पर के सिरे से डोरे के नीचे के सिरे की दूरी निकालो।



फ़र्ज़ करो कि $3a$ (अर्थात् एक छोटे वर्ग के एक बाहु का तिगुना) एक फ़ुट की लम्बाई बताता है। तो 8 फ़ुट की लम्बाई $24a$ द्वारा और $8\frac{2}{3}$ फ़ुट की लम्बाई $26a$ द्वारा सूचित होगी। अब यदि AB खूँटा है, तो $AB = 24a$, B बिन्दु से खींची हुई आड़ी सीधी रेखा पर C एक ऐसा बिन्दु लो, कि $BC = 26a$. अब B को केन्द्र मान कर और BC को त्रिज्या लेकर एक वृत्तचाप खींचो, जो कि A बिन्दु से खींची हुई आड़ी रेखा को D बिन्दु में काटे। BD रेखा खींचो, तब BD ही उस डोरे को सूचित करता है।

अब $AD = 10a$ (अर्थात् $9a + a$) के बराबर हैं इसलिए उसकी लम्बाई $3\frac{1}{3}$ फ़ुट है।

प्रश्नमाला 32

1. *A*, *O* से पूर्व की ओर $5\frac{1}{3}$ इकाई की दूरी पर है, और *P*, *A* से उत्तर की ओर। 4 इकाई की दूरी पर है, तो *O* से दूरी निकालो।

2. *B*, *O* से 3 फ़ुट पश्चिम में और *Q*, *B* से $7\frac{1}{5}$ फ़ुट दक्षिण में है, तो *O* से *Q* की दूरी निकालो।

3. *C*, *O* से 2 गज़ उत्तर में और *R*, *C* से $6\frac{6}{7}$ गज़ पश्चिम में है, तो *O* से *R* की दूरी निकालो।

4. *D*, *O* से 2·1 इंच दक्षिण में, और *S*, *D* से 2·8 इंच पूर्व में है, तो *S* से *O* की दूरी निकालो।

5. *A*, *O* से 2·7 फ़ुट पूर्व में हो ; *P*, *A* के उत्तर में और *O* से 4·5 फ़ुट की दूरी पर हो, तो *P* से *A* की दूरी निकालो।

6. *Q*, *B* से 2·4 फ़ुट दक्षिण में हो ; *O*, *B* के पूर्व में *Q* से 2·5 फ़ुट की दूरी पर हो, तो *O* से *B* की दूरी निकालो।

7. *B*, *A* से $4\frac{4}{5}$ गज़ पूर्व में ; *C*, *A* से $\frac{3}{5}$ गज़ उत्तर में, और *D*, *B* से 2 गज़ उत्तर में हो ; तो *C* से *D* की दूरी निकालो।

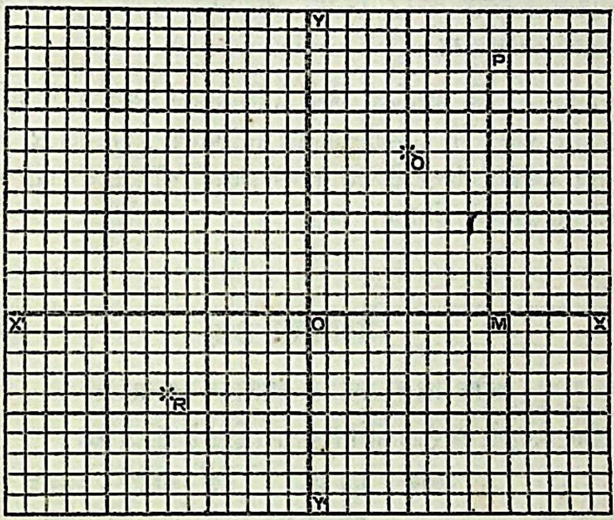
8. *B*, *A* से 25 फ़ुट उत्तर में ; *P*, *A* से 40 फ़ुट पश्चिम में ; और यदि *Q*, *B* से 20 फ़ुट पूर्व में हो तो *Q* से *P* की दूरी निकालो।

9. दो खड़े खूँटों की उंचाई क्रम से 14 और $3\frac{4}{5}$ फ़ुट है ; और वे एक दूसरे से $13\frac{3}{5}$ फ़ुट की दूरी पर गड़े हैं ; तो उनके ऊपरी सिरों की दूरी निकालो।

10. 30 फ़ुट लम्बी एक सीढ़ी का तला एक खड़ी दीवार से 10 फ़ुट की दूरी पर है ; दीवार से कितनी दूरी पर सीढ़ी का उपरी सिरा होगा ?

[प्रयोजन होने पर एक इंच के सौ हिस्से तक मापनेवाला स्केल काम में लाया जा सकता है।]

70. किसी समतल (Plane) पर यदि एक विशेष बिन्दू लिया जाय और उस बिन्दु से परस्पर लम्ब रूप में खींची हुई दो सरल रेखायें ली जायँ तो समतल पर किसी बिन्दु का स्थान उन दो रेखाओं की सहायता से प्रकट किया जा सकता है।



मान लो कि किसी विशेष समतल पर XOX' और YOY' दो दी हुई सरल रेखायें हैं जो एक दूसरे को लम्ब रूप में काटती हैं (ऊपर का चित्र देखो)। यदि इस समतल पर P कोई भी विन्दु हो तो इस P विन्दु का स्थान किस प्रकार मालूम किया जाय, यह बात विचारनी है।

XOX' पूर्व-पश्चिम रेखा और YOY' उत्तर-दक्षिण रेखा मान ली जा सकती है। P बिन्दु से YOY' के समानान्तर एक सरल रेखा खींचो, और मान लो कि वह XOX' रेखा को M बिन्दु पर काटती है। चित्र से स्पष्ट है, कि M, O बिन्दु के पूर्व में है और P, M बिन्दु के उत्तर में है। इसलिए OM व PM दो रेखाओं की लम्बाई की नाप यदि मालूम हो तो P बिन्दु का स्थान बताया जा सकता है।

ऊपर दिये वर्गांकित काग़ज़ पर छोटे वर्गों के बाहु की लम्बाई को इकाई मानकर

$OM = 9$ इकाई लम्बा और $MP = 12$ इकाई लम्बा है। इसलिए P बिन्दु का स्थान हम लोग निम्नलिखित ढंग से बता सकते हैं :

पूर्व में 9 इकाई की दूरी पर और उत्तर में 12 इकाई की दूरी पर।

टीका 1. Q यदि ऐसा एक बिन्दु हो जिसका स्थान 'पूर्व को 5 इकाई की दूरी पर और उत्तर को 8 इकाई की दूरी पर' बताया जाय तो इस बिन्दु का स्थान निकालने के लिए, O बिन्दु के पूर्व में 5 इकाई की दूरी पर एक बिन्दु लेकर, उसके बाद उस बिन्दु के उत्तर में 8 इकाई की दूरी पर जाना होगा।

टीका 2. R यदि एक ऐसा बिन्दु हो कि जिसका स्थान "O से पश्चिम में 7 इकाई की दूरी पर और दक्षिण में 4 इकाई की दूरी पर" बताया जाय तो R बिन्दु का स्थान निकालने के लिए हमको O बिन्दु से पश्चिम को 7 इकाई की दूरी तक और वहाँ से दक्षिण को 4 इकाई की दूरी तक जाना होगा।

प्रश्नमाला 33

[प्रत्येक प्रश्न को वर्गांकित काग़ज़ पर हल करना है।]

1. जिन बिन्दुओं का स्थान नीचे दिया गया है उन्हें अंकित करो :

(1)	5	इकाई	पूर्व में,	7	इकाई	उत्तर में
(2)	8	"	पश्चिम में,	5	"	उत्तर में
(3)	10	"	"	12	"	दक्षिण में
(4)	15	"	पूर्व में	6	"	"
(5)	8	"	पश्चिम में,	13	"	उत्तर में
(6)	14	"	पूर्व में,	15	"	दक्षिण में

2. दूसरे अध्याय से (अर्थात् धनात्मक व ऋणात्मक राशि सम्बन्धी अध्याय की टीका से) यह स्पष्ट है कि '6 इकाई पश्चिम' अथवा '-6 इकाई पूर्व' एक ही बात है; इसी प्रकार '8 इकाई दक्षिण' अथवा '-8 इकाई उत्तर' भी एक ही बात है, आदि आदि। इसके अनुसार जिन बिन्दुओं का स्थान नीचे दिया गया है उनका स्थान निकालो।

(1)	7	इकाई	पूर्व,	-8	इकाई	उत्तर में
(2)	-10	"	"	6	"	" "
(3)	-9	"	"	-13	"	" "

3. बिन्दुओं के स्थानों को बतलाने के निमित्त पूर्व व उत्तर शब्दों को काममें लाने की आवश्यकता नहीं है यदि यह हर हालत में मान लें कि पूर्व की ओर की दूरी को सर्वदा पहले लिखेंगे। वकौल इसके जिन बिन्दुओं का स्थान नीचे दिया गया है उनका स्थान निकालो।

(1) 8 इकाई, 9 इकाई; (2) 6 इकाई, −11 इकाई;
(3) −12 इकाई, 15 इकाई; (4) −10 इकाई, −14 इकाई।

4. हर जगह इकाई शब्द को भी छोड़कर, बिन्दु का स्थान और भी संक्षेप में बताया जा सकता है। वकौल इसके नीचे दिये हुए बिन्दुओं का स्थान दिखलाओ।

(1) 6, 4; (2) 13, 8; (3) −7, 6;
(4) 8, −6; (5) −10, −13; (6) −9, −15.

71. परिभाषा : पूर्व नियम में बतलाया गया है कि परस्पर लम्ब रूप में खींची हुई XOX' व YOY' दो रेखाओं की सहायता से (पूर्व नियम का चित्र देखो) समतल के किसी बिन्दु का स्थान बताया जा सकता है। इन दो स्थिर रेखाओं में से प्रत्येक को अक्ष (axis) कहते हैं। और XOX' व YOY' दोनों अक्ष जिस बिन्दु O पर एक दूसरे को काटते हैं, उसे मूलबिन्दु (origin) कहते हैं। XOX' को x- अक्षरेखा (axis of x) और YOY' को y- अक्षरेखा (axis of y) कहते हैं। और OM व MP इन दोनों की लम्बाई की नाप को P बिन्दु की भुज-कोटि (co-ordinates) कहते हैं, OM की लम्बाई को भुज (abscissa अथवा x-co-ordinate) और MP की लम्बाई को कोटि (ordinate अथवा y-co-ordinate) कहते हैं।

'(x, y) बिन्दु' अथवा 'x, y' का अर्थ है, "ऐसा एक बिन्दु जिसका भुज (abscissa) x-इकाई लम्बा और जिसकी कोटि (ordinate) y-इकाई लम्बी है।"

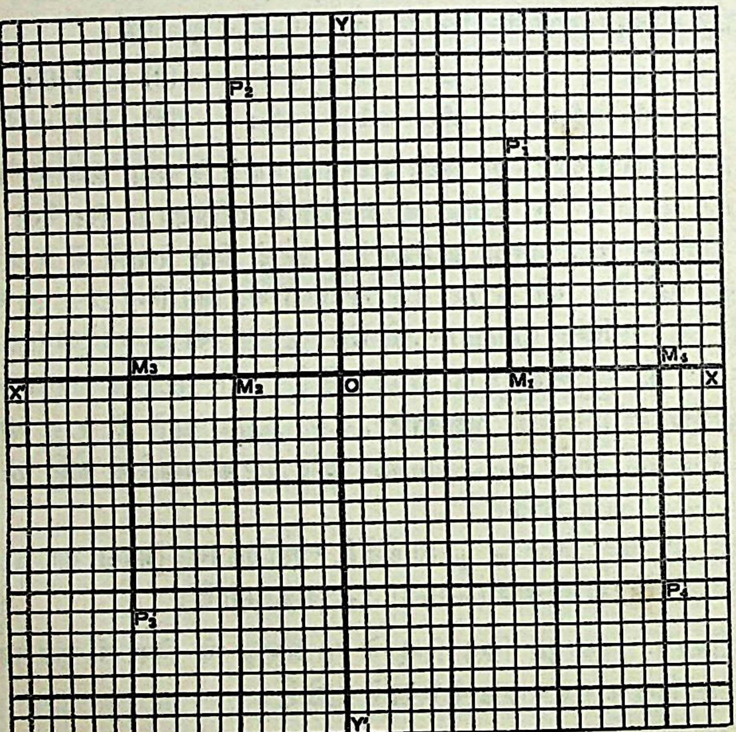
टीका 1. जब हम किसी बिन्दु के 'x और y' के विषय में कुछ कहते हैं तो वास्तव में उस बिन्दु के भुज व कोटि के विषय में कहते हैं।

टीका 2. यदि M, मूलबिन्दु O के दाहिनी ओर हो तो P बिन्दु के भुज को धनात्मक और यदि बाईं ओर हो, तो भुज को ऋणात्मक कहते हैं। इसी प्रकार यदि P बिन्दु XOX' के ऊपर हो तो P बिन्दु की कोटि को धनात्मक और P बिन्दु XOX' के नीचे हो तो P बिन्दु की कोटि को ऋणात्मक कहते हैं।

टीका 3. 'बिंदु अङ्कित करना' (to plot a point) का अर्थ है कि यदि बिन्दु के भुज-कोटि दिये हों तो उनके द्वारा बिन्दु का स्थान निकालना।

उदाहरण 1. नीचे दिये हुए चित्र में P_1, P_2, P_3, P_4 इन चार विन्दुओं के भुजकोटि लिखो। चित्र स्वयं अपनी व्याख्या करता है। छोटे वर्ग के वाहु की लम्बाई को इकाई मानकर—

(1) $OM_1 = 8$ इकाई, और M_1, O विन्दु की दाईं ओर है; और $M_1P_1 = 10$ इकाई, और P_1 विन्दु XOX' के ऊपर की ओर है, फलतः P_1 विन्दु के भुज व कोटि क्रमशः 8 व 10 हैं।



(2) $OM_2 = 5$ इकाई, और M_2, O की बाईं ओर है; और $M_2P_2 = 13$ इकाई, और P_2 विन्दु XOX' रेखा के ऊपर है। इसलिए P_2 विन्दु के भुज व कोटि क्रमशः -5 व 13 हैं।

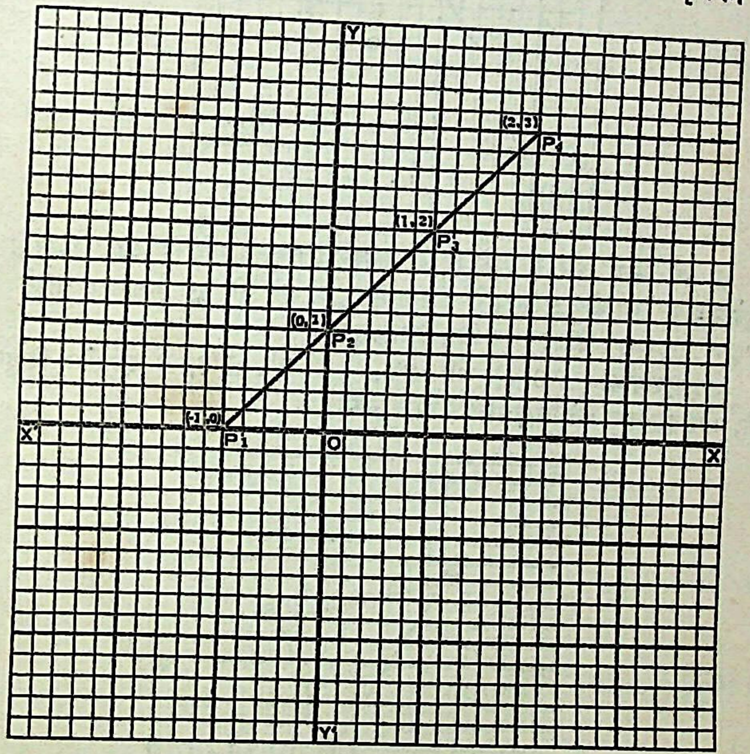
(3) $OM_3 = 10$ इकाई, और M_3, O की बाईं ओर है, $M_3P_3 = 11$ इकाई, और P_3, XOX' के नीचे है; $\therefore$ P_3 विन्दु के भुज व कोटि क्रमशः -10 व -11 हैं।

(4) $OM_4 = 15$ इकाई, और M_4, O के दाईं ओर है ; और $M_4P_4 = 10$ इकाई, और P_4, XOX' के नीचे है ; इसलिए P_4 विन्दु के भुज व कोटि क्रमशः 15 व -10 हैं।

उदाहरण 2. $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ और $(2, 3)$ विन्दुओं के स्थान दिखलाओ और दिखाओ कि वे एक सीधी रेखा में हैं।

छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई का पंचगुना इकाई मान लो ;

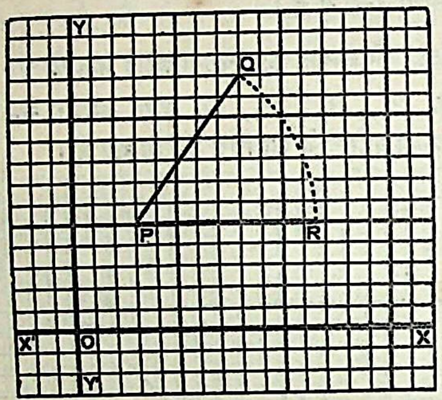
और मान लो कि P_1, P_2, P_3, P_4 द्वारा क्रमशः चार बिन्दु सूचित होते हैं। इस हालत में विन्दुओं के स्थान वही होंगे जो चित्र में दिये गये हैं। [चित्र देखो]



किसी पटरी के एक किनारे को उन चारों में से किसी दो बिन्दुओं से मिलाकर रखने से यह मालूम होगा कि और भी दो बिन्दु इसी पर हैं, इसलिए ये चारों बिन्दु एक सीधी रेखा में हैं।

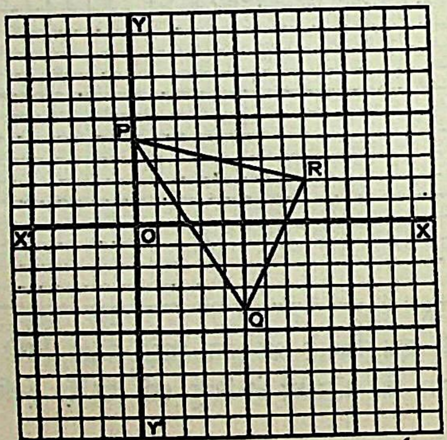
उदाहरण 3. $(3, 5)$ और $(8, 12)$ इन दो बिन्दुओं को अपने स्थान पर रक्खो और उनकी दूरी निकालो।

छोटे वर्गों के एक बाहु को इकाई मानकर दो बिन्दुओं को रक्खो ; फ़र्ज़ करो P और Q इन दो बिन्दुओं को सूचित करते हैं। तब बिन्दुओं के स्थान वही होंगे जो चित्र में दिये गये हैं। (चित्र देखो)



P को केन्द्र और PQ को त्रिज्या मानकर एक वृत्तचाप खींचो जो P बिन्दु से खींची हुई पूर्व-पश्चिम रेखा को R बिन्दु में काटता है। तो हम जो दूरी निकालना चाहते हैं वह $= PQ = PR = 8 \cdot 6$ इकाई। (चित्र से प्रत्यक्ष है)

उदाहरण 4. $P(0, 4)$ और $Q(5, -4)$ और $R(8, 2)$ इन तीन बिन्दुओं को रक्खो, और इस तरह बने त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो।



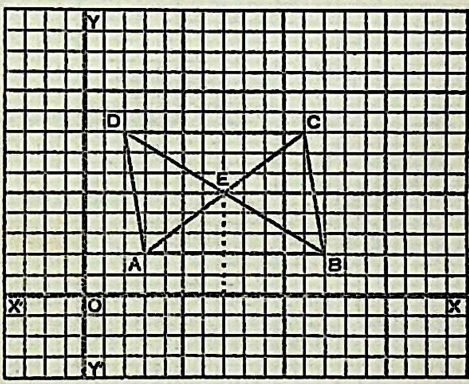
छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई को इकाई मानकर, P, Q और R के स्थान चित्र के मुताबिक होंगे। अब PQR त्रिभुज के अन्दर छोटे वर्गों को गिनो ; उसके बाद

जो जो वर्ग त्रिभुज के वाहु काटते हुए गये हैं उनमें से जिन वर्गों का आधा अथवा आधे से अधिक त्रिभुज के अन्दर हो उनको गिनो और दूसरों को छोड़ दो। कारण एक छोटा वर्ग क्षेत्रफल की इकाई वताता है, इसलिए सब वर्गों की संख्या त्रिभुज का क्षेत्रफल बतायगी।

ऊपर के नियम से गिनने पर PQR त्रिभुज के अन्दर के वर्गों की संख्या 27 पाई जाती है।

इसलिए PQR त्रिभुज का क्षेत्रफल = 27 इकाई (क्षेत्रफल की)।

उदाहरण 5. $A(3, 2)$; $B(12, 2)$; $C(11, 8)$ और $D(2, 8)$, इन चार विन्दुओं के स्थान वतलाओ। $ABCD$ चतुर्भुज का क्षेत्रफल और AC व BD परस्पर जिस बिन्दु पर मिलते हैं उसके भुजकोटि वतलाओ।



छोटे वर्गों के एक वाहु की लम्बाई को इकाई मान कर A, B, C, D का स्थान चित्र के मुताबिक होंगे।

उदाहरण 4 में वतलाये हुए नियम के अनुसार गिनने पर $ABCD$ चतुभुज के अन्दर के वर्गों की संख्या 54 पाई जाती है।

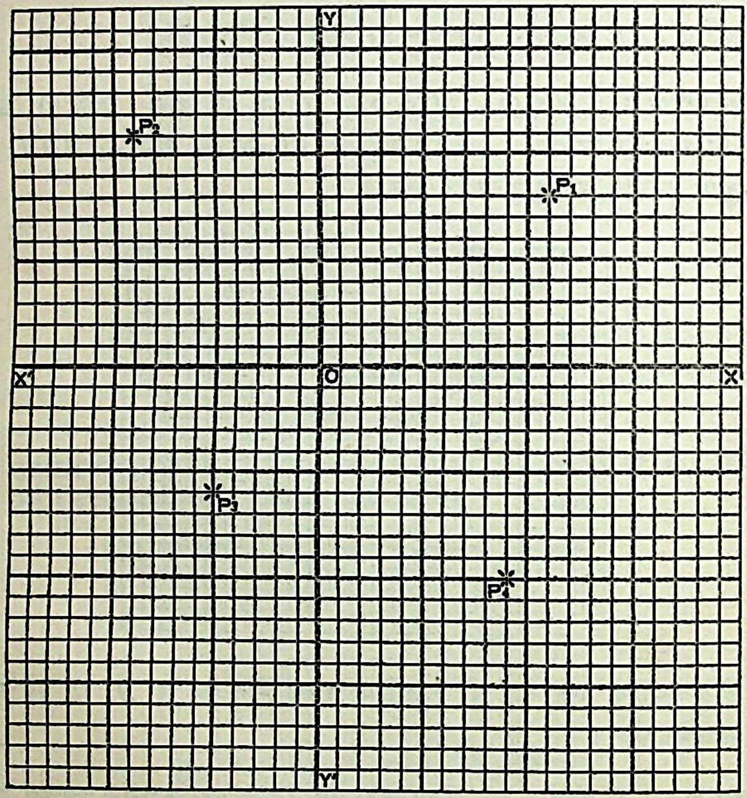
इसलिए क्षेत्रफल = 54 इकाई (क्षेत्रफल की)।

और चित्र से जान पड़ता है कि AC व BD के छेद बिन्दु E का भुज 7 इकाई व कोटि 5 इकाई है।

इसलिए E विन्दु के भुजकोटि (7, 5)।

प्रश्नमाला 34

1. नीचे दिये हुए चित्र में P_1, P_2, P_3, P_4 बिन्दुओं के भुजकोटि बतलाओ, जब कि (1) छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई को इकाई माना जाय, (2) छोटे वर्गों के एक बाहु की पंचगुनी लम्बाई को इकाई माना जाय।



2. छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई के तिगुने को इकाई मानकर ऊपर दिये हुए चित्र में P_1, P_2, P_3, P_4 बिन्दुओं के भुजकोटि क्या होंगे ?

3. (–4, –4), (7, 7) व (13, 13) बिन्दु को अंकित करके अपनी तसल्ली कर लो कि वे मूलबिन्दु (origin) से खींची हुई एक सीधी रेखा पर हैं।

4. (−8, 4) और (10, −5) दो बिन्दुओं को अंकित करो और अपनी तसल्ली कर लो कि इन दो बिन्दुओं को जोड़नेवाली सरल रेखा मूलबिन्दु से जाती है।

5. (8, 5) व (−4, −11) दो बिन्दुओं को अंकित करके उनकी दूरी निकालो।

6. (−7, 9) व (−12, 21) दो बिन्दुओं को अंकित करके उनकी दूरी निकालो।

7. (−11, 13) व (3, −35) दो बिन्दुओं को अंकित करके उनकी दूरी निकालो।

8. (0, 0) व (5, 5) बिन्दुओं को मिलानेवाली सरल रेखा खींचो, और उसको दोनों ओर बढ़ाओ, इस सरल रेखा के ऊपर के उस बिन्दुकी कोटि बतलाओ जिसका भुज 11 है ; और उस बिन्दु का भुज बतलाओ जिसकी कोटि −13 है।

9. (0, 7) और (12, 0) बिन्दुओं को मिलानेवाली सरल रेखा को दोनों ओर बढ़ाओ। इस रेखा के उस बिन्दुकी कोटि बतलाओ जिसका भुज −18 है ; और उस बिन्दुका भुज बतलाओ जिसकी कोटि −14 है।

10. (−4, 0) और (0, −8) बिन्दुओं को मिलानेवाली सरल रेखा को दोनों ओर बढ़ाओ ; इस रेखा के उस बिन्दु की कोटि बतलाओ जिसका भुज −10 है ; और उस बिन्दुका भुज बतलाओ जिसकी कोटि −24 है।

11. $A(3, 2)$, $B(3, 7)$ और $C(8, 5)$ तीन बिन्दुओं को अंकित करो और इस तरह बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बतलाओ।

12. $P(-2, 5)$, $Q(6, 5)$ और $R(8, 9)$ इन तीन बिन्दुओं को अंकित करो, और इस रूप से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बतलाओ।

13. $D(5, 2)$, $E(6, 8)$ और $F(7, 12)$ तीन बिन्दुओं को अंकित करो, और इस रूप से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बतलाओ।

14. (11, 2), (3, 2), (3, 7) और (11, 7) इन चार बिन्दुओं द्वारा जो चतुभज बनता है उसका क्षेत्रफल निकालो ; और उसके दो कर्ण जिस बिन्दु पर मिलते हैं, उसके भुजकोटि बतलाओ।

15. नीचे दिये हुए बिन्दुओं द्वारा जो चतुर्भुज बनते हैं उनके क्षेत्रफल बतलाओ :—

(1) (16, 6), (2, 3), (11, 14) व (5, 11) ;
(2) (3, 6), (5, 4), (17, 16) व (9, 18) ;
(3) (−12, 5), (−12, −10), (16, −10) व (16, 5) ;
(4) (0, 1), (10, 8), (2, 13) व (−2, 8).

16. ऐसा एक त्रिभुज खींचो जिसका आधार 12 सेन्टीमीटर और जिसके दो बाहु क्रम से 5 व 13 सेन्टीमीटर हों ; त्रिभुज का क्षेत्रफल, ऊँचाई और वृहत्तम बाहु का अभिमुख कोण कितना है बतलाओ।

17. ऐसा एक त्रिभुज अंकित करो जिसका आधार 6 सेन्टीमीटर और दो बाहु क्रमशः 3 व 5 सेन्टीमीटर हैं। उसकी ऊँचाई जहाँ तक हो सके सूक्ष्म रूप में निकालो।

18. नीचे दिये हुए बिन्दुओं को अंकित करो :—

(i) (6, 0), (6, 3), (6, 4), (6, 6), (6, 8) और (6, 10) ;

(ii) (−2, 7), (3, 7), (5, 7), (7, 7), (8, 7) और (10, 7).

सिद्ध करो कि ऊपर दिये हुए (i) के बिन्दुओं समरेखीय हैं, (ii) के बिन्दुओं भी समरेखीय हैं, और दिखलाओ कि ये दो रेखायें क्रम से कोट्यक्ष व भुजाक्ष रेखाओं के समानान्तर हैं ; दोनों रेखाओं के छेद-बिन्दु के भुजकोटि निकालो।

19. (3, 4), (4, 3), (5, 0), (−4, −3) व (4, −3) बिन्दुओं को अंकित करो। मूलबिन्दु से उनकी दूरी मापकर दिखाओ कि वे मूलबिन्दु को केन्द्र मानकर खींचे हुए एक वृत्त पर हैं।

20. $A(5, 2)$, $B(9, 2)$, $C(5, 8)$, $D(9, 8)$ और $E(7, 12)$ बिन्दुओं को अंकित करो ; $ABDEC$ पंचभुज का क्षेत्रफल और AD व BC परस्पर जिस बिन्दु पर मिलते हैं, उसके भुजकोटि बतलाओ।

विविध प्रश्नमाला II

I

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ इस तादात्म्य में a के बदले x और b के बदले $-y-z$ प्रयोग करके $(x-y-z)$ का वर्ग निकालो।

2. नीचे दिये हुए दो सूत्रों को सिद्ध करो :

(i) $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$;

(ii) $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$.

3. सिद्ध करो :

$$(y-z)(y+z-x) + (z-x)(z+x-y) + (x-y)(x+y-z) = 0.$$

4. सिद्ध करो :

$$(a-b)(a+1)(b+1)-a(b+1)^2+b(a+1)^2=(a-b)(a+b+2ab).$$

5. यदि $a=x+m$, $b=y+m$, $c=z+m$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$$

6. यदि $s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो :

$$(as+bc)(bs+ac)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

7. $(m+n)^3-27p^3$ को $m+n-3p$ से भाग करो।

8. यदि $(9x^2-17xy+13y^2)^2$ भाज्य हो और $49y^2(2x+5y)^2$ भागशेष हो और $3x^2-xy+16y^2$ भाजक हो तो भजनफल निकालो।

9. यदि $x+\frac{2}{y}=\frac{8}{3}$, $y+\frac{3}{x}=\frac{9}{2}$ हो, तो $x^3y^3+\frac{216}{x^3y^3}$ का मूल्य निकालो।

10. सिद्ध करो कि

$$(x-y+z)^3+(x+y-z)^3+6x(x-y+z)(x+y-z)=8x^3.$$

II

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $3(x-3)-2(x-2)+x-1=x+3+2(x+2)+3(x+1).$

2. $(x-3)(x-5)=(x-2)(x-7).$

3. $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5).$

नीचे दिये हुए समीकरणों से x का मूल्य निकालो :

4. $(a+b)(b-x)=b(a-x).$

5. $\frac{mnx-p}{mn}+\frac{npx-m}{np}+\frac{pmx-n}{pm}=\frac{2p}{mn}+\frac{2m}{np}+\frac{2n}{pm}.$

6. $\frac{2x+7}{7}-\frac{9x-8}{11}=\frac{x-11}{2}.$

7. $4x-\frac{x-1}{2}=x+\frac{2x-2}{5}+24.$

8. $x-\frac{x-2}{2}=5\frac{3}{4}-\frac{x+10}{5}+\frac{x-2}{4}.$

9. $\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-2}{3}+\frac{4x-3}{4}=\frac{1}{12}.$

10. $\frac{2}{3}(x-1)-\frac{5}{6}(2x-3)+\frac{3}{4}(1-2x)=\frac{1}{12}(4x-5).$

III

1. एक ऐसी संख्या बतलाओ जिसके साथ 2^9 योग करने से योगफल उस संख्या के चौगुने से 8 अधिक हो।

2. एक ऐसी संख्या बतलाओ जिसका सातवां हिस्सा उसके नवें हिस्से से 4 अधिक हो।

3. एक व्यक्ति अपनी माहवारी आमदनी का दसवाँ हिस्सा खर्च नहीं करता, और बाक़ी हिस्से का तिहाई हिस्सा फुटकर चीज़ें खरीदने में खर्च कर देता है, और रोज़ाना खर्च के लिए अपनी आमदनी का $\frac{3}{8}$ हिस्सा लगा देने के बाद महीने के अंत में उसके पास 300 रुपये बच रहते हैं, तो उसकी माहवारी आमदनी कितनी है?

4. एक व्यापारी अपनी पूँजी में से दो-पंचमांश चीनी के, और तिहाई हिस्सा पाट के कारबार में, और बकाये रुपये का आधा कपड़े के कारबार में लगाकर 300 पाउंड बचा लेता है; तो उस व्यापारी की कुल रक़म कितनी थी और उसने किस कारबार में कितना रुपया लगाया?

5. A की आयु B की आयु की दुगनी है और C की आयु से 4 वर्ष अधिक है। यदि इन तीनों की आयुओं का योगफल 96 वर्ष हो तो प्रत्येक की आयु बतलाओ।

6. दो थैलियों की रक़मों का जोड़ 54 पाउं० 12 शि० है, और एक थैली में पाउंडों की जो संख्या है, दूसरे में शिलिंगों की भी वही संख्या है; प्रत्येक थैली में कितनी रक़म थी?

7. एक वर्गांकित काग़ज़ पर नीचे दिये हुए बिन्दुओं को अंकित करो और दिखाओ कि वे एक आयत के चार शीर्ष हैं: $(1\frac{1}{2}, 2)$; $(-1\frac{1}{2}, 2)$; $(-1\frac{1}{2}, -2)$ और $(1\frac{1}{2}, -2)$; और दिखलाओ कि उस आयत के प्रत्येक कर्ण की लम्बाई 5 इकाई है।

8. O एक निश्चित स्थान है; A, O से 20 मील उत्तर में है; B, A से 4 मील पूरब में है; और C, B से 17 मील दक्षिण में है; तो दिखलाओ कि O से C की दूरी 5 मील है।

9. ऊपर दिये हुए उदाहरण में A, O से यदि 12 मील पश्चिम में, P, A से 5 मील उत्तर में, B, O से 12 मील पूर्व में, और Q, B से 5 मील दक्षिण में हो तो सिद्ध करो कि P से Q की दूरी 26 मील है।

10. एक वर्गांकित काग़ज़ पर नीचे दिये हुए बिन्दुओं को अंकित करो और दिखलाओ कि वे मूलबिन्दु से खींची हुई एक ही रेखा पर हैं; $(-5, -10)$, $(1, 2)$ और $(3, 6)$.

आठवाँ अध्याय

कठिन जोड़ व बाक़ी

(Harder Addition and Subtraction)

I. जोड़

72. तीसरे अध्याय में योग करने के नीचे दिये हुए नियमों का अर्थ बतलाया गया है।

(1) योगफल निकालने के समय जोड़ी जानेवाली राशियों को किसी भी क्रम में ले सकते हैं। जैसे $a+b+c=b+c+a=c+a+b$ आदि। [नियम 31]

इसको योग का क्रम-विनिमय नियम (Commutative Law) कहते हैं।

(2) योगफल निकालने के समय जुड़नेवाली राशियों में से कुछ अंशों को अलग अलग लेकर उनको कई हिस्से में बाँट कर योगफल को उन हिस्सों के योगफल के रूप में प्रकट कर सकते हैं, जैसे $a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c=b+(c+a)$ आदि। [नियम 32]

इसको योग का संकलन नियम (Associative Law) कहते हैं।

(3) संख्या गुणकवाले सजातीय पदों का योगफल भी एक सजातीय पद होता है; और, पदों के संख्या गुणकों का बीजीय योगफल इन पदों के योगफल का संख्या गुणक होता है। जैसे $5x$, $-2x$, $7x$ और $6x$ का योगफल $16x$ है, क्योंकि, $5+(-2)+7+6=16$.

इसको योग की पद-संयोगप्रणाली (process of collecting terms) कहते हैं।

सजातीय व विजातीय पदवाले बहुपद व्यंजकों का योगफल निकालने की साधारण रीति भी 33 वें नियम में बतलाई गई है।

ऊपर लिखे हुए नियम अब तक केवल सरल प्रश्नों में प्रयोग किये गये हैं। अब वे कठिन योग करने में भी प्रयोग किये जायँगे।

73. भिन्न गुणकवाले व्यंजकों (Fractional co-efficients) का योगफल निकालना : भिन्न गुणकवाले बहुपद व्यंजकों का योगफल निकालने के लिए प्रत्येक व्यंजक को सरल करके, व्यंजकों को एक के नीचे दूसरे को इस प्रकार रखना चाहिए कि व्यंजकों के सजातीय पद एक ही स्तम्भ में हों; उसके बाद सबसे नीचे एक सीधी रेखा खींचकर प्रत्येक स्तम्भ के पदों का जोड़ उस रेखा के नीचे लिखना होगा। योगफल के संख्यागुणकों को अंकगणित के नियमानुसार सरल करके लिखना होगा।

नीचे दिये उदाहरणों द्वारा जोड़ने की रीति स्पष्ट होगी।

उदाहरण 1. योगफल बतलाओ :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}-\frac{z}{7},\quad -\frac{9}{10}y+\frac{12}{7}z+\frac{7}{3}x+12a \text{ और } \frac{3}{7}z-\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y-2b.$$

पहला व्यंजक $= \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{7}z$

दूसरा व्यंजक $= \frac{7}{3}x - \frac{9}{10}y + \frac{12}{7}z + 12a$

तीसरा व्यंजक $= -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + \frac{3}{7}z \quad - 2b$

$\therefore$ योगफल $= 2x + \frac{1}{10}y + 2z + 12a - 2b$

[योगफल में, x का गुणक $= \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1+7-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$,

y का गुणक $= \frac{1}{5} - \frac{9}{10} + \frac{4}{5} = \frac{2-9+8}{10} = \frac{10-9}{10} = \frac{1}{10}$,

z का गुणक $= -\frac{1}{7} + \frac{12}{7} + \frac{3}{7} = \frac{-1+12+3}{7} = \frac{14}{7} = 2$,

a का गुणक $= 0 + 12 + 0 = 12$,

b का गुणक $= 0 + 0 - 2 = -2$.]

टीका। ध्यान रखना होगा कि पहले और तीसरे व्यंजकों में a वाले पदों के दो स्थान खाली रक्खे गये हैं। आसानी के लिए इन दोनों स्थानों को $0.a$ द्वारा भरा जा सकता है। इसी प्रकार पहले व दूसरे व्यंजकों में भी b वाले दो पदों के गुणक 0 माना जा सकता है।

उदाहरण 2. $\frac{6x-2y}{6}+\frac{4y-3z}{12}+\frac{2z-4x}{8},\ \frac{4x-3y}{12}+\frac{6y-4z}{8}+\frac{3z-6x}{6}$ व $\frac{2x-4y}{8}+\frac{3y-2z}{6}+\frac{4z-6x}{12}$ का योगफल निकालो।

पदसंयोगप्रणाली के अनुसार प्रत्येक व्यंजक को सरल करके पहले दिखलाये हुए नियम के अनुसार योगफल निकालना होगा, जैसे,

पहला व्यंजक $= (\frac{6}{6} - \frac{4}{8})x + (-\frac{2}{6} + \frac{4}{12})y + (-\frac{3}{12} + \frac{2}{8})z$

$= (1 - \frac{1}{2})x + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3})y + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4})z = \frac{1}{2}x$

दूसरा व्यंजक $= (\frac{4}{12} - \frac{6}{6})x + (-\frac{3}{12} + \frac{6}{8})y + (-\frac{4}{8} + \frac{3}{6})z$

$= (\frac{1}{3} - 1)x + (-\frac{1}{4} + \frac{3}{4})y + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})z = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y$

और तीसरा व्यंजक $= (\frac{2}{8} - \frac{6}{12})x + (-\frac{4}{8} + \frac{3}{6})y + (-\frac{2}{6} + \frac{4}{12})z$

$= (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})x + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})y + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3})z = -\frac{1}{4}x$

$\therefore$ योगफल $= -\frac{5}{12}x + \frac{1}{2}y$

[योगफल में x का गुणक $= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6-8-3}{12} = \frac{-5}{12}$,

y का गुणक $= 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.]

उदाहरण 3. $\frac{3}{7}x^3+\frac{5}{11}y^5-20a^2+\frac{49}{2}b^3$, $17a^2-\frac{27}{2}b^3-\frac{23}{7}x^3$, $-\frac{y^5}{11}+\frac{3}{2}b^3-3a^2$ और $-\frac{23}{2}b^3-\frac{4}{11}y^5+7a^2+\frac{20}{7}x^3$ के योगफल का मूल्य निकालो यदि $x=98$, $y=79$, $a=5$ व $b=4$ हो।

इस प्रश्न में व्यंजकों के योगफल से मूल्य निकालना आसान है :—

$$\begin{aligned}
\text{पहला व्यंजक} &= \tfrac{3}{7}x^3+\tfrac{5}{11}y^5-20a^2+\tfrac{49}{2}b^3\\
\text{दूसरा व्यंजक} &= -\tfrac{23}{7}x^3 \qquad\quad +17a^2-\tfrac{27}{2}b^3\\
\text{तीसरा व्यंजक} &= \qquad\quad -\tfrac{1}{11}y^5-\ 3a^2+\ \tfrac{3}{2}b^3\\
\text{चौथा व्यंजक} &= \tfrac{20}{7}x^3-\tfrac{4}{11}y^5+\ 7a^2-\tfrac{23}{2}b^3\\
\therefore\ \text{योगफल} &= \qquad\qquad\qquad a^2+\ \ b^3\\
&= 5^2+4^3=5\times5+4\times4\times4=25+64=89.
\end{aligned}$$

[योगफल में x^3 का गुणक $=\frac{3}{7}-\frac{23}{7}+0+\frac{20}{7}=\frac{3-23+0+20}{7}=\frac{0}{7}=0$,
y^5 का गुणक $=\frac{5}{11}+0-\frac{1}{11}-\frac{4}{11}=\frac{5+0-1-4}{11}=\frac{0}{11}=0$,
a^2 का गुणक $=-20+17-3+7=24-23=1$,
b^3 का गुणक $=\frac{49}{2}-\frac{27}{2}+\frac{3}{2}-\frac{23}{2}=\frac{49-27+3-23}{2}=\frac{52-50}{2}=\frac{2}{2}=1$.]

74. अक्षर गुणकवाले बहुपद व्यंजकों का योगफल निकालना :

यदि गुणक केवल अंक न हों तो उनको अक्षर-गुणक कहते हैं। जैसे, ax, $6bx$, $(c+d-e)x$,...... आदि में x के गुणक क्रम से a, $6b$, $(c+d-e)$ होने के कारण उनमें से प्रत्यक को अक्षर-गुणक कहते हैं।

x के सम्बन्ध में ax, $6bx$, $(c+d-e)x$...... आदि पदों में केवल उनके गुणक हो पृथक हैं; इस दृष्टि से ax, $6bx$, $(c+d-e)x$ पदों को सजातीय पद कह सकते हैं।

यदि ax और bx x-सहित दो सजातीय पद हों, तो उनका योगफल $=ax+bx=(a+b)x$.

इसलिए अक्षर-गुणकवाले दो सजातीय पदों का योगफल भी एक सजातीय पद है, और योगफल का आक्षरिक गुणक, दोनों पदों के अक्षर-गुणकों के योगफल के बराबर है। 47 वें नियम के 3 रे उपसिद्धान्त से मालूम होता है कि योग करने का यह नियम दो से अधिक पदों के लिए भी प्रयोग में आ सकता है।

इस कारण, गुणक चाहे अंक हों अथवा अक्षर हों सजातीय पदों को जोड़ने का नियम दोनों हालतों में एक ही है।

इससे विदित होता है कि बहुपद व्यंजकों के जोड़ने का नियम दोनों प्रकार के गुणकों के लिए एक ही होगा।

नीचे दिये उदाहरणों द्वारा जोड़ करने का ऊपर दिया हुआ नियम स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण 1. जोड़ो : $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$, $ax+by+cz$ और $x+y+z$.

इन तीन बहुपद व्यंजकों को एक के नीचे एक इस प्रकार लिखो कि उनके सजातीय पद ठीक एक ही खड़ी रेखा में हों; सबसे नीचे के व्यंजक के नीचे एक सरल रेखा खींचकर प्रत्येक स्तम्भ का योगफल उस रेखा के नीचे लिखने पर योगफल प्राप्त होगा।

पहला व्यंजक $=(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$

दूसरा व्यंजक $= \quad ax+ \quad by+ \quad cz$

तीसरा व्यंजक $= \quad x+ \quad y+ \quad z$

इसलिए योगफल $=(a+b+c+1)x+(a+b+c+1)y+(a+b+c+1)z$

[योगफल में x का गुणक $=(b+c)+a+1=a+b+c+1$,

y का गुणक $=(c+a)+b+1=a+b+c+1$,

z का गुणक $=(a+b)+c+1=a+b+c+1$.]

उदाहरण 2. जोड़ो : $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$, $(b-c)y+(a-b)x+(c-a)z$ और $(b-c)z+(c-a)x+(a-b)y$.

x, y व z के सम्बन्ध में तीनों व्यंजक सजातीय पदवाले हैं। इसलिए ऊपर के उदाहरण में दिखलाये हुए नियम के अनुसार योगफल निकाला जायगा। जैसे,

पहला व्यंजक $=(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$

दूसरा व्यंजक $=(a+b)x+(b-c)y+(c-a)z$

तीसरा व्यंजक $=(c-a)x+(a-b)y+(b-c)z$

इसलिए योगफल $=0$.

[योगफल में

x का गुणक $=(b-c)+(c-a)+(a-b)$

$=b-c+c-a+a-b=0$.

इसी प्रकार y और z के गुणक भी 0 होंगे।]

उदाहरण 3. $(ax-by)+(bx-cz)$, $(ay-bx)+(by-cz)$ और $(cz-ax)+(cz-by)$ के योगफल निकालो।

x, y व z के सम्बन्ध में तीनों व्यंजक सजातीय पदवाले हैं। इसलिए ऊपर बतलाये हुए नियम के अनुसार योगफल प्राप्त होगा। जैसे,

पहला व्यंजक $= \quad ax+bx-by-cz=(a+b)x- \quad by- \quad cz$
दूसरा व्यंजक $= -bx+ay+by-cz= \quad -bx+(a+b)y- \quad cz$
तीसरा व्यंजक $= -ax-by+2cz \quad = \quad -ax- \quad by+2cz$

$\therefore$ योगफल $= \qquad (a-b)y$

[योगफल में

x का गुणक $= \quad (a+b)-b-a= \quad a+b-b-a=0,$
y का गुणक $= -b+(a+b)-b=-b+a+b-b=a-b,$
z का गुणक $= -c-c+2c=0.$]

टीका 1. यदि कोष्टकवाले एक वहुपद व्यंजक को एक सजातीय वहुपद व्यंजक के साथ जोड़ना हो, तो कोष्टक न खोलकर योग करना अक्सर आसान होता है। [उदाहरण 2 देखो]

टीका 2. यदि आवश्यक हो तो उदाहरण 3 में दिखलाये हुए नियम के अनुसार जोड़े जानेवाले व्यंजकों को पदसंयोग प्रणाली के अनुसार सरल कर लेना चाहिए।

उदाहरण 4. $(a^2+b^2)x + (b^2+c^2)y + (c^2+a^2)z$, $(b^2 + c^2)m+(c^2+a^2)n$, $(c^2+a^2)p+(a^2+b^2)q$ और $(a^2+b^2)j+(b^2+c^2)k$ का योगफल निकालो।

ऊपर दिये हुए व्यंजक (b^2+c^2), (c^2+a^2) और (a^2+b^2) के सम्बन्ध में सजातीय हैं। इसलिए पूर्व नियम के अनुसार योगफल प्राप्त होगा।

पहला व्यंजक $=x(a^2+b^2)+y(b^2+c^2)+z(c^2+a^2)$
दूसरा व्यंजक $= \qquad m(b^2+c^2)+n(c^2+a^2)$
तीसरा व्यंजक $=q(a^2+b^2) \qquad +p(c^2+a^2)$
चौथा व्यंजक $=j(a^2+b^2)+k(b^2+c^2)$

इसलिए योगफल

$$=(x+q+j)(a^2+b^2)+(y+m+k)(b^2+c^2)+(z+n+p)(c^2+a^2)$$

[योगफल में

(a^2+b^2) का गुणक $=x+0+q+j=x+q+j,$

और (b^2+c^2) और (c^2+a^2) के गुणक क्रमानुसार $(y+m+k)$ और $(z+n+p)$.]

प्रश्नमाला 35

जोड़ो :

1. $2x^2-5xy+y^2$, $4y^2-7x^2-5x+2y$, $3xy-5+y-6y^2$ और $3-4y+3x$.

2. $abc+a^2b-b^2c^2$, $5a^2b-12b^2c^2-3abc$, $8b^2c^2-4a^2b+2abc$ और $2a^2b+5b^2c^2$.

3. $m^3n^2-3mnp+2m^2n^3+6m^2n^2$, $7mnp-10m^2n^2+5m^3n^2-m^2n^3$, $2m^2n^2-5mnp+3m^2n^3$ और $-7m^3n^2+m^2n^2-4m^2n^3$.

4. $12a^3b^2x-29b^3x^2a+37x^3a^2b+45a^2b^2x^2$, $25b^3x^2a-16a^2b^2x^2-18a^3b^2x-5x^3a^2b$, $32a^2b^2x^2-23x^3a^2b+20a^3b^2x-28b^3x^2a$ और $-9x^3a^2b-14a^3b^2x-60a^2b^2x^2+32b^3x^2a$.

5. $-15a^4b^4c^4+7c^4a^3b^5-24b^4c^3a^5+27a^4b^3c^5$, $19c^4a^3b^5-15a^4b^3c^5+23a^4b^4c^4-8b^4c^3a^5$, $29b^4c^3a^5+11a^4b^4c^4-9a^4b^3c^5-16c^4a^3b^5$ और $-3a^4b^3c^5-10c^4a^3b^5+3b^4c^3a^5-18a^4b^4c^4$.

6. $25a^3b^3-8b^3c^3-23c^3a^3+19a^2b^2c^2$, $16c^3a^3-14a^2b^2c^2-19a^3b^3-12b^3c^3$, $27a^2b^2c^2+13a^3b^3+17c^3a^3-20b^3c^3$, $29b^3c^3-6a^2b^2c^2-21a^3b^3-13c^3a^3$ और $10b^3c^3+3a^3b^3+4c^3a^3-27a^2b^2c^2$.

7. $5a^3-18b^3-53c^3-25abc$, $38c^3-37a^3-7abc+29b^3$, $26abc-17c^3+11b^3+43a^3$, $13b^3-18abc+4a^3+21c^3$ और $-14a^3+12c^3+21abc-34b^3$.

8. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}$, $\frac{3x}{4}+\frac{2y}{3}+\frac{3z}{5}$ और $\frac{3x}{4}+y+\frac{6z}{5}$.

9. $\frac{3x}{5}+\frac{4y}{7}+\frac{10z}{11}$, $\frac{2y}{7}+\frac{4z}{11}+\frac{x}{5}$ और $\frac{8z}{11}+\frac{6x}{5}+\frac{8y}{7}$.

10. $\frac{4x^2y}{15}+\frac{4y^2z}{13}+\frac{5z^2x}{17}$, $\frac{7y^2z}{13}+\frac{6z^2x}{17}+\frac{7x^2y}{15}$ और $\frac{6z^2x}{17}+\frac{4x^2y}{15}+\frac{2y^2z}{13}$.

11. $\frac{7a^2b}{19}+\frac{9b^2c}{17}+\frac{11ca^2}{21}+\frac{13ab^2}{35}$, $\frac{8b^2c}{17}+\frac{10c^2a}{21}+\frac{12a^2b}{19}+\frac{17bc^2}{35}$ और $\frac{22ab^2}{35}+\frac{18bc^2}{35}+\frac{10ca^2}{21}+\frac{11ac^2}{21}$.

12. $\frac{2}{3}abc^2 + \frac{3}{4}bca^2 + \frac{4}{7}b^2d$, $\frac{5}{9}cab^2 + \frac{1}{3}abc^2 + \frac{2}{11}a^2d$, $\frac{1}{4}bca^2 + \frac{4}{13}c^2d + \frac{4}{9}cab^2$ और $\frac{9}{11}a^2d + \frac{3}{7}b^2d + \frac{9}{13}c^2d$.

13. $\frac{x-2y}{2} + \frac{2y-3z}{6} + \frac{3z-4x}{12}$, $\frac{2x-3y}{6} + \frac{3y-4z}{12} + \frac{z-2x}{2}$ और $\frac{3x-4y}{12} + \frac{y-2z}{2} + \frac{2z-3x}{6}$.

14. $\frac{2x-3y}{6} + \frac{3y-5z}{15} + \frac{5z-7x}{35}$, $\frac{3x-5y}{15} + \frac{5y-7z}{35} + \frac{2z-3x}{6}$ और $\frac{5x-7y}{35} + \frac{2y-3z}{6} + \frac{3z-5x}{15}$.

15. $\frac{2b-3c}{bc} + \frac{3c-4a}{ca} + \frac{4a-2b}{ab}$, $\frac{2c-3a}{ca} + \frac{3a-4b}{ab} + \frac{4b-2c}{bc}$ और $\frac{2a-3b}{ab} + \frac{3b-4c}{bc} + \frac{4c-2a}{ca}$.

16. $\frac{bx-3ay}{ab} + \frac{2by-4az}{ab} + \frac{3bz-ax}{ab}$, $\frac{cx-4by}{bc} + \frac{3cy-5bz}{bc} + \frac{4cz-bx}{bc}$ और $\frac{ax-2cy}{ca} + \frac{4ay-3cz}{ca} + \frac{5az-cx}{ca}$.

17. $\frac{cy-ax}{caxy} + \frac{az-by}{abyz} + \frac{bx-cz}{bczx}$, $\frac{ay-bx}{abxy} + \frac{bz-cy}{bcyz} + \frac{cx-az}{cazx}$ और $\frac{by-cx}{bcxy} + \frac{cz-ay}{cayz} + \frac{ax-bz}{abzx}$.

यदि $a=5,\ b=4,\ x=8,\ y=7$ हो, तो निम्नलिखित व्यंजकों का मूल्य निकालो :

18. $(46a^4 + 38b^4 - 87abx^2 - 105y^4) + (47abx^2 + 85y^4 - 56a^4 - 58b^4) + (57y^4 + 75b^4 + 23a^4 + 63abx^2) + (-33b^4 + 8y^4 - 27abx^2 - 39a^4) + (26a^4 - 45y^4 - 22b^4 + 5abx^2)$

19. $(35xy^4 + 207ab^4 - 98bx^4 - 62ya^4 - 83abx^2y) + (68bx^4 + 102ya^4 - 65xy^4 - 87ab^4 + 53abx^2y) + (26abx^2y - 75ab^4 - 25ya^4 + 43bx^4 + 53xy^4) + (28ya^4 - 29xy^4 - 65abx^2y + 45ab^4 + 26bx^4) + (-89ab^4 - 43ya^4 + 69abx^2y + 6xy^4 - 39bx^4)$.

20. $(57a^4bx+25b^4xy-143x^4ya+37y^4ab-253a^2b^2x^2)+(63x^4ya-92y^4ab-63a^4bx+73a^2b^2x^2-85b^4xy)+(35y^4ab+132b^4xy+82a^2b^2x^2+36x^4ya+96a^4bx)+(-50a^2b^2x^2-78a^4bx+27y^4ab-17x^4ya-52b^4xy)+(61x^4ya-20b^4xy+148a^2b^2x^2-7y^4ab-12a^4bx)$.

जोड़ो :

21. $(a^2+b^2)(m+n)+(a^2-b^2)(p+q)+c^2l$, $(a^2-b^2)(m+n)+(a^2+b^2)(p+q)+c^2m$ और $nc^2+l(a^2+b^2)+k(a^2-b^2)$.

22. $(x+y)^2a+(y+z)^2b+(z+x)^2c$, $(x-y)^2a+(y-z)^2b+(z-x)^2c$ और $2(x^2-y^2)a+2(y^2-z^2)b+2(z^2-x^2)c$.

23. $ab(a-b)$, $bc(b-c)$, $ca(c-a)$ और $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$.

नीचे दिये हुए प्रश्नों के खाली स्थान भरो :

24. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\{\quad\}-\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

25. $(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2=\{\quad\}-(ax^2+by^2+cz^2)$.

II. बाक़ी

75. 35 वें नियम में बतलाया गया है कि, 'किसी सरल राशि 'a' को घटाना' अथवा '$-a$ सरल राशि को जोड़ना' दोनों एक हैं। जैसे, $x-a=x+(-a)$। इसी प्रकार किसी बहुपद व्यंजक को घटाना अथवा उस व्यंजक में दिये हुए पदों का चिह्न बदल-कर जोड़ना दोनों एक ही है। एक बहुपद व्यंजक को दूसरे एक बहुपद व्यंजक से घटाने की रीति 38 वें नियम में बतलाई गई है। अब तक वह रीति सरल प्रश्नों के लिए काम में लाई गई थी। अब वह कठिन प्रश्नों के काम में भी लाई जायगी।

उदाहरण 1. $(b+c)y+(c+a)z+(a+b)x$ से $ax+by+cz$ घटाओ।

x, y व z सम्बन्धी सजातीय पदों को सजाकर 38 वें नियम में बतलाई हुई रीति के अनुसार अन्तरफल निकाला जायगा।

$$\begin{array}{rlll} \text{वियोज्य} = & (a+b)x + & (b+c)y + & (c+a)z \\ \text{वियोजक} = & ax + & by + & cz \\ \hline \therefore \text{अन्तरफल} = & bx + & cy + & az \end{array}$$

[अन्तरफल में x का गुणक $=a+b-a=b$, इसी प्रकार y व z के गुणक क्रमशः c और a हैं।]

उदाहरण 2. $(b+c)^2yz+(c+a)^2zx+(a+b)^2xy$ से $(b-c)^2yz+(c-a)^2zx+(a-b)^2xy$ घटाओ।

$$\text{वियोज्य} = (b+c)^2yz+(c+a)^2zx+(a+b)^2xy$$
$$\text{वियोजक} = (b-c)^2yz+(c-a)^2zx+(a-b)^2xy$$
$$\therefore\ \text{अन्तरफल} = 4bcyz + 4cazx + 4abxy$$

[अन्तरफल में yz का गुणक $=(b+c)^2-(b-c)^2=b^2+2bc+c^2-(b^2-2bc+c^2)=b^2+2bc+c^2-b^2+2bc-c^2=4bc.$

इसी प्रकार, zx और xy के गुणक भी क्रमशः $4ca$ और $4ab$ हैं।]

उदाहरण 3. नीचे दिये हुए तादात्म्य का खाली स्थान भरो :

$$(2a+3b)x+(3b+4c)y+(4c+2a)z = (a+b)x+(b+c)y+(c+a)z+\{\quad\}.$$

स्पष्ट है कि $(2a+3b)x+(3b+4c)y+(4c+2a)z$ से $(a+b)x+(b+c)y+(c+a)z$ घटाने पर उत्तर प्राप्त होगा। पहले व दूसरे उदाहरणों में दिखलाये हुए नियमों के अनुसार घटाने से अन्तरफल $(a+2b)x+(2b+3c)y+(3c+a)z$ निकलता है।

उदाहरण 4. $2\cdot5ax-3\cdot\dot{7}by-8\cdot3\dot{2}z$ को $3\frac{3}{4}ax+2\frac{4}{9}by+6\frac{83}{90}z$ से घटाओ।

$$\text{वियोज्य} = 3\tfrac{3}{4}ax+2\tfrac{4}{9}by+6\tfrac{83}{90}z$$
$$\text{वियोजक} = 2\cdot5ax-3\cdot\dot{7}by-8\cdot3\dot{2}z$$
$$\therefore\ \text{अन्तरफल} = \tfrac{5}{4}ax+\tfrac{56}{9}by+\tfrac{686}{45}z$$

[अन्तरफल में ax का गुणक $=3\frac{3}{4}-2\cdot5=\frac{15}{4}-\frac{5}{2}=\frac{15-10}{4}=\frac{5}{4}$,

by का गुणक $=2\frac{4}{9}-(-3\cdot\dot{7})=2\frac{4}{9}+3\cdot\dot{7}=\frac{22}{9}+\frac{34}{9}=\frac{56}{9}$,

और z का गुणक $=6\frac{83}{90}-(-8\cdot3\dot{2})=6\frac{83}{90}+8\cdot3\dot{2}=\frac{623}{90}+\frac{749}{90}$

$=\frac{623+749}{90}=\frac{1372}{90}=\frac{686}{45}$.]

टीका। घटाने में भी भिन्नगुणकों को अंकगणित के नियमों के अनुसार जोड़ने के ढंग पर सरल कर लेना अच्छा है। [चौथा उदाहरण देखो]

[कोष्ठकवाले बहुपद व्यंजकों को घटाने के समय कोष्ठक न खोलना चाहिए (1—3 उदाहरणों को देखो)।]

प्रश्नमाला 36

घटाओ :

1. $-7x^5+6x^4y-8x^3y^2-13x^2y^3+9y^4$ को $3x^5-5x^4y+2x^3y^2-7x^2y^3+6y^4$ से।

2. $3m^3nx-10n^3xm+14x^3mn-20m^2n^2x-27n^2x^2m$ को $5m^3nx-17n^3xm+26x^3mn-13m^2n^2x-19n^2x^2m$ से।

3. $37x^6-28x^5y+43x^4y^2-54x^3y^3-67x^2y^4+84xy^5-93y^6$ को $48x^6-31x^5y-7x^4y^2-39x^3y^3-41x^2y^4+65xy^5-53y^6$ से।

4. $-2yzbc^2+4yz^2bc-2ax^4-9y^2zbc+3a^2x^3$ को $3ax^4-5a^2x^3+6yzbc^2-7y^2zbc+8yz^2bc$ से।

5. $19x^3z^5y-15x^3y^5z+27+11xyz^4-12x^2y^2z^2-19xy^3z^5$ को $25-16x^3y^5z-17xy^3z^5+21x^3z^5y-6x^2y^2z^2+8xyz^4$ से।

6. $43x^3y^4z^2-23x^3y^2z^4+25x^4y^3z^2-66x^2y^4z^3+26x^2y^3z^4+35x^4y^2z^3$ को $29x^4y^3z^2-37x^3y^4z^2+54x^2y^3z^4-45x^3y^2z^4-67x^4y^2z^3+89x^2y^4z^3$ से।

7. $-29x^4y^3z^5+75x^5y^4z^3+13x^3y^5z^4+53x^3y^4z^5-94x^5y^3z^4-86x^4y^5z^3$ को $41x^3y^4z^5-87x^3y^5z^4-28x^4y^5z^3+63x^4y^3z^5-55x^5y^3z^3+37x^5y^4z^3$ से।

8. $3x^2-5xy+6y^2+7yz$ के साथ कितना जोड़ा जाय कि योगफल $-x^2-y^2-yz$ हो ?

9. $-5x^3+13x^2y^2-a^2bx+5bxy^2+7xyab$ के साथ कितना जोड़ा जाय कि $x^3+x^2y^2+a^2bx-2bxy^2-2xyab$ योगफल हो ?

10. $5x^4-6x^3y+7x^2y^2-8xy^3-19y^4$ इस व्यंजक में कितना जोड़ा जाय कि योगफल $3x^4+5x^2y^2-12y^4$ हो ?

11. $-5x^5-3x^4y+6x^3y^2+17x^2y^3+13xy^4-21y^5$ इस व्यंजक में कितना जोड़ा जाय कि योगफल $-7x^5-4x^3y^2+13x^2y^3+29y^5$ हो ?

12. $2a^2+5ab-6b^2$ से कितना घटाया जाय कि अन्तरफल a^2+2b^2 हो ?

13. $5x^2-6xy+4y^2-8x-10y+15$ से कितना घटाया जाय कि अन्तरफल $x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$ हो ?

14. $3a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 8b^3$ में से कितना घटाया जाय कि अन्तरफल $a^3 - 2ab^2 + 7b^3$ हो ?

15. $-8x^3y + 4x^2y^2 - 11xy^3 + 12x^2 - 13y + 27$ से कितना घटाया जाय कि अन्तरफल $4x^3y - 3x^2y^2 - 11xy^3 + 20x^2 - 30y + 56$ हो ?

16. किस व्यंजक से $3a^2 - 7ab - 8bc + 9b^2$ घटाया जाय कि अन्तरफल $2a^2 + 3ab + 3bc + 2b^2$ हो ?

17. किस व्यंजक से $-3x^3 + 5y^2 - 7xy + 8x - 9$ घटाया जाय कि अन्तरफल $x^3 - 8y^2 + 2xy - 11x + 7$ हो ?

18. किस व्यंजक से $-7a^3 - 8b^2c - 13ac^2 + 3b^3$ घटाया जाय कि अन्तरफल $4a^3 - 3b^2c + 7ac^2 - 8b^3$ हो ?

19. किस व्यंजक से $21x^3 - 37xy^2 + 42y^3 - 18x^2 + 19xy - 39$ घटाया जाय कि अन्तरफल $-25x^3 + 15xy^2 - 87y^3 + 7x^2 - 43xy + 24$ हो ?

घटाओ :

20. $\frac{13}{24}x + \frac{313}{168}y + \frac{201}{175}z$ से $\frac{1}{13}x + \frac{87}{83}y + \frac{107}{87}z$ को।

21. $-\frac{1}{20}ax + \frac{3}{7}y + \cdot\dot{8}mz$ से $-\cdot35ax + \frac{13}{66}y + \cdot1\dot{7}mz$ को।

22. $32\cdot39c^2by + 2\cdot37a^2cx - 62\cdot73c^3z$ से
$1\cdot17a^2cx + 2\cdot31c^2by - 63\cdot18c^3z$ को।

23. $3\cdot3lx + \frac{35}{44}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y - \frac{3}{7}nz - \frac{8}{25}b^{\frac{8}{5}}c^{\frac{5}{12}}z - 2\cdot5my - \frac{65}{38}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}x$ से
$\frac{32}{15}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}x + \frac{25}{23}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y + \frac{21}{36}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{5}{12}}z + 2\cdot3lx + 3\cdot5my + \frac{32}{7}nz$ को।

24. निम्नलिखित प्रश्नों के खाली स्थानों की पूर्ति करो :

(i) $3\cdot2x + 5\cdot3y + 5\cdot4z - (\qquad) = 2x + 3y + 6z$;

(ii) $17x + 23y + \frac{121}{31}z = 52x - 1\cdot7y + \frac{40}{7}z - (\qquad)$;

(iii) $1\cdot\dot{2}a + 15\cdot52l^2 + 16m^2 + 14p$
$= (\qquad) - (2\cdot\dot{2}a + 3\cdot52l^2 + 4m^2 + 16p)$.

घटाओ :

25. $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)$ को
$bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$ से।

26. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ को
$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ से।

27. $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ को
$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ से।

28. $(1+a+a^2)x+(1+b+b^2)y+(1+c+c^2)z$ को
$(1+a)^2x+(1+b)^2y+(1+c)^2z$ से।

29. एक मनुष्य एक साल में $(ax+by+cz)$ रुपये माहवारी कमाता है, और साल भर में $(10ax+13cz)$ रुपये खर्च करता है; तो वर्ष के अन्त में उसके पास कितना रुपया बच रहेगा?

30. यदि $(50x+71y+18z)$ भेड़ों में से $(13x+12y)$ और $(15y+8z)$ भेड़ें बेच दी जायं, तो कितनी भेड़ें बाक़ी रहेंगी?

नवाँ अध्याय

कठिन गुणन

(Harder Multiplication)

76. तीसरे अध्याय में गुणा करने के निम्नलिखित नियम समझाये गये थे :—

(1) $a\times b=b\times a$; [नियम 42]

$abc=bca=cab$, आदि; [नियम 43]

अर्थात् गुणनखंड चाहे किसी क्रम में लिखे जायँ गुणनफल हर हालत में एक ही निकलता है। इसको गुणन का क्रम-विनिमय नियम (Commutative Law) कहते हैं।

(2) $(ab)\times c=a\times(bc)=b\times(ac)=a\times b\times c$; [नियम 43]

अर्थात् गुणनफल के गुणनखंडों को चाहे किसी तरतीब में रख सकते हैं।

इसको गुणन का संकलन नियम (Associative Law) कहते हैं।

(3) $a(b+c)=ab+ac$; [नियम 47]

इसको गुणन का विकलन नियम (Distributive Law) कहते हैं।

(4) यदि m व n दो धनात्मक पूर्ण राशियाँ (positive integer) हों तो

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

इसको गुणन का घातांक नियम (Index Law) कहते हैं।

इस अध्याय में बहुपद व्यंजकों के गुणा करने के नियम और कठिन गुणन के उदाहरण दिये जायँगे।

77. सिद्ध करना होगा कि :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

$c+d$ को x मानकर

$$(a+b)(c+d) = (a+b)x = x(a+b) = xa + xb \quad [\text{नियम } 47]$$
$$= ax + bx = a(c+d) + b(c+d)$$
$$= ac + ad + bc + bd.$$

उपसिद्धान्त। चूंकि $a-b = a+(-b)$ और $c-d = c+(-d)$,

इसलिए $(a-b)(c-d) = \{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$
$$= ac + a(-d) + (-b)c + (-b)(-d)$$
$$= ac - ad - bc + bd.$$

78. सिद्ध करना होगा कि :

$$(a+b+c+d+\cdots)(m+n+p+q+\cdots)$$
$$= a(m+n+p+q+\cdots) + b(m+n+p+q+\cdots)$$
$$+ c(m+n+p+q+\cdots) + d(m+n+p+q+\cdots) + \cdots \text{ आदि।}$$

मान लो कि x, $m+n+p+q+\cdots$ के बराबर है ;

इसलिए $(a+b+c+d+\cdots)(m+n+p+q+\cdots) = (a+b+c+d+\cdots)x$
$$= ax + bx + cx + dx + \cdots$$
$$= a(m+n+p+q+\cdots) + b(m+n+p+q+\cdots) + c(m+n+p+q+\cdots)$$
$$+ d(m+n+p+q+\cdots) + \cdots \text{ आदि।}$$

इसी प्रकार यदि दो बहुपद व्यंजकों का गुणनफल निकालना हो तो उनमें से किसी व्यंजक के प्रत्येक पद को दूसरे व्यंजक के प्रत्येक पद द्वारा गुणन करके जो पद प्राप्त हों उनका बीजगणितीय योगफल लिया जाता है।

उदाहरण 1. गुणा करो : $2a+3b$ को $4a+5b$ से।

$$(4a+5b)(2a+3b) = (4a)(2a) + (4a)(3b) + (5b)(2a) + (5b)(3b)$$
$$= 8a^2 + 12ab + 10ab + 15b^2$$
$$= 8a^2 + 22ab + 15b^2.$$

उदाहरण 2. गुणा करो : $3x-7y$ को $2x-5y$ से।

$$(2x-5y)(3x-7y)=(2x)(3x)+(2x)(-7y)+(-5y)(3x)+(-5y)(-7y)$$
$$=6x^2-14xy-15xy+35y^2$$
$$=6x^2-29xy+35y^2.$$

प्रश्नमाला 37

गुणा करो :

1. $2a+3b$ को $a+b$ से।
2. $2m-3n$ को $m-n$ से।
3. $a+b+c$ को $a+b+c$ से।
4. $a-b+c$ को $a-b+c$ से।
5. $a-b-c$ को $a-b-c$ से।
6. $a-2b-3c$ को $2a-b-c$ से।
7. $2x-3y-4z$ को $x-y-z$ से।
8. $-5x+2a-3b$ को $-x-a+b$ से।
9. $x^2+y^2+z^2$ को $x-y-z$ से।
10. $xy+yz+zx$ को $xy-yz-zx$ से।

79. किसी बहुपद व्यंजक के पदों को इस प्रकार सजाना, कि किसी विशेष अक्षर (जो कि अधिकांश पदों में वर्तमान हो) के घातमापक उत्तरोत्तर बढ़ते अथवा उत्तरोत्तर घटते जायँ।

यदि किसी व्यंजक के पदों में दिये हुए किसी विशेष अक्षर के घातमापक भिन्न भिन्न हों, तो उन पदों को हम इस प्रकार लिखें कि उस विशेष अक्षर का सबसे बड़े घातवाला पद सबसे पहले हो, और उससे कम घातवाला पद उसकी दाईं ओर हो, और उससे कम घातवाला पद दूसरे पद की दाईं ओर हो, और जिस पद में वह अक्षर न हो (अर्थात् उस अक्षर के सम्बन्ध में जो पद स्थिर (constant) हो उसको अंत में लिखें तो कहा जाता है कि यह व्यंजक उस विशेष अक्षर के घातों के अवरोहक्रम में लिखा गया है। और यदि यह व्यंजक उल्टे प्रकार से लिखा जाय (अर्थात् पहले स्थिर पद, उसके बाद सबसे छोटे घातवाला पद, आदि, और अंत में सब से बड़े घातवाला पद) तो कहा जाता है कि व्यंजक को उस विशेष अक्षर के घातों के आरोहक्रम में लिखा गया है। जैसे, $a^5x^3+3a^4xy-5a^3x^6y^2+4a^2x^4y^3-2ax^2y^4+x^5y^5$ व्यंजक a के घातों के अवरोहक्रम में अथवा y के घातों के आरोहक्रम में लिखा गया है। किन्तु इसको $-5a^3x^6y^2+x^5y^5+4a^2x^4y^3+a^5x^3-2ax^2y^4+3a^4xy$ इस प्रकार लिखने से कहा जायगा कि यह व्यंजक x के घातों के अवरोहक्रम में लिखा गया है।

80. यदि किसी व्यंजक को दूसरे एक व्यंजक द्वारा गुणा करना हो तो गुण्य व्यंजक और गुणक व्यंजक में दिये हुए किसी एक साधारण अक्षर के घातों के अवरोह अथवा आरोहक्रम में दोनों को लिखकर आगे बतलाये हुए नियम के अनुसार गुणन करना होता है।

उदाहरण 1. a^2-b^2-ab को $ab-b^2+a^2$ द्वारा गुणा करो।

$$\text{गुण्य} = a^2 - ab - b^2$$
$$\text{गुणक} = a^2 + ab - b^2$$

$$\begin{aligned} a^2 \text{ द्वारा गुणन} &= a^4 - a^3b - a^2b^2 \\ +ab \text{ द्वारा गुणन} &= \quad + a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\ -b^2 \text{ द्वारा गुणन} &= \quad\quad - a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \therefore \text{ पूरा गुणनफल} &= a^4 \quad - 3a^2b^2 \quad + b^4 \end{aligned}$$

टीका। उपरोक्त उदाहरण की क्रिया की व्याख्या इस प्रकार लिखी जा सकती है।

गुण्य व गुणक दोनों को a के घातों के अवरोहक्रम के अनुसार सजाकर गुण्य के नीचे गुणक को लिखा गया है, और गुणक के नीचे रेखा खींची गई है। उसके बाद बाईं ओर से आरम्भ करके गुणक के प्रत्येक पद द्वारा गुण्य को गुणा करके जो गुणनफल प्राप्त हुआ है उसको एक एक पंक्ति में एक के नीचे एक को इस प्रकार लिखा गया है कि भिन्न भिन्न पंक्तियों के सजातीय पद ठीक एक ही स्तम्भ में हैं। सबसे नीचेवाली पंक्ति के नीचे एक सरल रेखा खींचकर भिन्न भिन्न स्तम्भों के सजातीय पदों का बीजीय योगफल उनके नीचे लिखकर गुणनफल प्राप्त होता है।

उदाहरण 2. $2a^2-3x^2-5ax$ को $-3x^2+2a^2+5ax$ द्वारा गुणा करो।

गुण्य व गुणक दोनों को x के घातों के आरोहक्रम के अनुसार लिखने से,

$$\text{गुण्य} = 2a^2 - 5ax - 3x^2$$
$$\text{गुणक} = 2a^2 + 5ax - 3x^2$$

$$\begin{aligned} 2a^2 \text{ द्वारा गुणा करने से} &= 4a^4 - 10a^3x - 6a^2x^2 \\ +5ax \text{ द्वारा गुणा करने से} &= \quad + 10a^3x - 25a^2x^2 - 15ax^3 \\ -3x^2 \text{ द्वारा गुणा करने से} &= \quad\quad - 6a^2x^2 + 15ax^3 + 9x^4 \\ \therefore \text{ पूरा गुणनफल} &= 4a^4 \quad - 37a^2x^2 \quad + 9x^4 \end{aligned}$$

उदाहरण 3. $2a^3b-5ab^3-a^4+3a^2b^2$ को
$2a^4-3a^3b+4ab^3-5a^2b^2$ से गुणा करो।

[गुण्य व गुणक दोनों को a के घातों के अवरोहक्रम के अनुसार लिखो।]

$$
\begin{array}{l}
\text{गुण्य} = -a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 - 5ab^3 \\
\text{गुणक} = 2a^4 - 3a^3b - 5a^2b^2 + 4ab^3 \\
\hline
-2a^8 + 4a^7b + 6a^6b^2 - 10a^5b^3 \\
\quad + 3a^7b - 6a^6b^2 - 9a^5b^3 + 15a^4b^4 \\
\quad\quad + 5a^6b^2 - 10a^5b^3 - 15a^4b^4 + 25a^3b^5 \\
\quad\quad\quad - 4a^5b^3 + 8a^4b^4 + 12a^3b^5 - 20a^2b^6 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ गुणनफल $= -2a^8 + 7a^7b + 5a^6b^2 - 33a^5b^3 + 8a^4b^4 + 37a^3b^5 - 20a^2b^6$

टीका। ऊपर दिये हुए उदाहरण में गुण्य व गुणक दोनों चौथे घातवाले समघातिक व्यंजक हैं और गुणनफल आठवें घातवाला समघातिक व्यंजक है। इसी प्रकार दिखाया जा सकता है कि यदि गुण्य व गुणक दोनों समघातिक व्यंजक हों तो गुणनफल भी समघातिक व्यंजक होगा और गुणनफल का मान (degree of the product) दोनों व्यंजकों के मानों का योगफल होगा। गुण्य व गुणक दोनों यदि समघातिक व्यंजक हों तो गुणनफल ठीक है या नहीं यह जानने के लिए, यह नियम अत्यन्त उपयोगी है। कारण यदि गुणनफल समघातिक न हो तो समझना चाहिए कि यह अशुद्ध है।

उदाहरण 4. गुणा करो : $mx^2 - nx - p$ को $x^2 + px - 1$ से।

$$
\begin{array}{l}
\text{गुण्य} = mx^2 - nx - p \\
\text{गुणक} = x^2 + px - 1 \\
\hline
mx^4 - nx^3 - px^2 \\
\quad + pmx^3 - pnx^2 - p^2x \\
\quad\quad - mx^2 + nx + p \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ गुणनफल $= mx^4 - (n - pm)x^3 - (p + pn + m)x^2 + (n - p^2)x + p$

उदाहरण 5. गुणा करो : $\frac{11}{8}ax^3 + \frac{7}{13}b^2x^2y + 3{\cdot}5cxy^2 + 1{\cdot}05g^2y^3$ को $2lx^2 + 3{\cdot}5mxy + 1{\cdot}5ny^2$ से।

[**टीका।** यदि गुण्य व गुणक में साधारण व दशमलव दोनों प्रकार के भिन्न गुणक वर्तमान हों तो सब भिन्नों को एक ही प्रकार का भिन्न बनाकर गुणन करना आसान है। इस प्रश्न में $\frac{7}{13}$ को दशमलव बनाने से दशमलव बिन्दु के बाद बहुत से अंक होंगे, इस कारण सब भिन्नों को साधारण भिन्न बनाया गया है।]

$$\text{गुण्य} = \tfrac{11}{5}ax^3 + \tfrac{7}{10}b^2x^2y + \tfrac{7}{2}cxy^2 + \tfrac{21}{20}g^2y^3$$

$$\text{गुणक} = 2lx^2 + \tfrac{7}{2}mxy + \tfrac{3}{2}ny^2$$

$$\begin{array}{l} \tfrac{22}{5}alx^5 + \tfrac{14}{10}b^2lx^4y + 7clx^3y^2 + \tfrac{21}{10}g^2lx^2y^3 \\ \quad + \tfrac{77}{10}amx^4y + \tfrac{49}{20}b^2mx^3y^2 + \tfrac{49}{4}cmx^2y^3 + \tfrac{147}{40}g^2mxy^4 \\ \quad\quad + \tfrac{33}{10}anx^3y^2 + \tfrac{21}{20}b^2nx^2y^3 + \tfrac{21}{4}cnxy^4 + \tfrac{63}{40}g^2ny^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{गुणनफल} = \tfrac{22}{5}alx^5 + (\tfrac{14}{10}b^2l + \tfrac{77}{10}am)x^4y + (7cl + \tfrac{49}{20}b^2m + \tfrac{33}{10}an)x^3y^2 \\ \quad + (\tfrac{21}{10}g^2l + \tfrac{49}{4}cm + \tfrac{21}{20}b^2n)x^2y^3 + (\tfrac{147}{40}g^2m + \tfrac{21}{4}cn)xy^4 + \tfrac{63}{40}g^2ny^5. \end{array}$$

उदाहरण 6. गुणा करो : $a^2 - ab + b^2$, $a^2 + ab + b^2$ और $a^4 - a^2b^2 + b^4$.

(i)

$$\begin{array}{l} a^2 - ab + b^2 \\ a^2 + ab + b^2 \\ \hline a^4 - a^3b + a^2b^2 \\ \quad + a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\ \quad\quad + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ \hline a^4 \quad + a^2b^2 \quad + b^4 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{l} a^4 + a^2b^2 + b^4 \\ a^4 - a^2b^2 + b^4 \\ \hline a^8 + a^6b^2 + a^4b^4 \\ \quad - a^6b^2 - a^4b^4 - a^2b^6 \\ \quad\quad + a^4b^4 + a^2b^6 + b^8 \\ \hline a^8 \quad + a^4b^4 \quad + b^8 \end{array}$$

इसलिए, गुणनफल $= a^8 + a^4b^4 + b^8$.

टीका। तीन अथवा तीन से अधिक व्यंजकों को एक के बाद दूसरे को गुणन करने से जो गुणनफल प्राप्त होता है उसको लगातार गुणनफल (continued product) कहते हैं। कई व्यंजकों का लगातार गुणनफल निकालना हो तो उनमें से किसी दो व्यंजकों के गुणनफल को और एक व्यंजक द्वारा गुणन करके जो गुणनफल प्राप्त हो, उसको फिर एक और व्यंजक द्वारा गुणा करते हुए चलना चाहिए। लगातार गुणन में गुण्य व्यंजकों को जिस क्रम से आसान समझा जाय उस क्रम से लिखकर गुणा करना चाहिए।

81. विश्लिष्ट गुणकप्रणाली (Method of Detached Co-efficients) : यदि गुण्य व गुणक दोनों व्यंजकों के पद एक ही अक्षर के भिन्न भिन्न घातवाले हों, अथवा दोनों दो अक्षरों के समघातिक व्यंजक हों तो पदों के अक्षरवाले अंश से अंकगुणकों को पृथक करके और अपने अपने उचित स्थान में रखके उन गुणकों के द्वारा गुणन संक्षेप में

और आसानी के साथ किया जा सकता है। दोनों व्यंजकों में दिये हुए साधारण अक्षर का यदि किसी भी घातवाला पद वर्तमान न हो तो उस पद के गुणक को 0 मानना होगा।

नीचे दिये हुए उदाहरणों द्वारा यह नियम स्पष्टरूप से मालूम होगा।

उदाहरण 1. गुणा करो : x^2-4x+4 को $x-2$ से।

$$\begin{array}{rrrr}
x^2 - & 4x & + 4 & \\
x - & 2 & & \\
\hline
1 - & 4 & + 4 & \\
 - & 2 & + 8 & -8 \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore$ गुणनफल $=x^3-6x^2+12x-8.$

उदाहरण 2. गुणा करो : $3x^3-2x+4$ को $x+5$ से।

$$\begin{array}{rrrrr}
3x^3 + & 0.x^2 - & 2x + & 4 & \\
x + & 5 & & & \\
\hline
3 & +0 & -2 & +4 & \\
 & +15 & +0 & -10 & +20 \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore$ गुणनफल $=3x^4+15x^3-2x^2-6x+20.$

प्रश्नमाला 38

गुणा करो :

1. $25b^2+30ab+9a^2$ को $3a-5b$ से।
2. $2a-3b+4c$ को $2a+3b-4c$ से।
3. x^2-x+2 को x^2+x+2 से।
4. $a^2-2ab+b^2$ को $a^2+2ab+b^2$ से।
5. x^4+x^2+1 को x^4-x^2+1 से।
6. $y^3-x^2y^2+x^3$ को $x^3+x^2y^2+y^3$ से।
7. $m^4-m^2n^2+n^4$ को m^2+n^2 से।
8. $p^2q^2+p^4+q^4$ को $-q^2+p^2$ से।
9. $a^3+5ab^2-6a^2b$ को $5b^2+a^2+6ab$ से।
10. x^3-3x^2+3x-1 को x^2+3x+1 से।
11. $2ax^3+a^4+3a^2x^2+x^4+2a^3x$ को a^2+x^2-2ax से।
12. $a^3+3a^2b+b^3+3ab^2$ को $3ab^2-b^3+a^3-3a^2b$ से।
13. $x^2-11+x^4-4x+2x^3$ को $3+x^2-2x$ से।

14. $1+2x+x^4+2x^3+3x^2$ को $1+x^3-2x$ से।

15. $b^4+a^2b^2+a^3b+a^4+ab^3$ को $a^2b^2-a^3b+b^4-ab^3+a^4$ से।

16. $x^2-xy-xz+y^2-yz+z^2$ को $x+y+z$ से।

17. $a^3+b^2+c^2-bc-ca-ab$ को $a+b+c$ से।

18. $5a^2b+4b^3+2a^3-3ab^2$ को $2ab^3-3a^2b+a^3-5b^3$ से।

19. ax^2+bx-c को $px-q$ से। 20. mx^2-nx-r को $nx-r$ से।

21. ax^2-bx+c को x^2-bx-c से।

22. ax^3-bx^2+cx-d को bx^2-cx+d से।

23. $px^2-(q-r)x+s$ को mx^2-nx-s से।

24. $ax^2+2hxy+by^2$ को $lx+my+n$ से।

25. $l^2x^2+m^2xy+n^2y^2+2g^2x+2f^2y+c^2$ को px^2+qx+r से।

26. $\frac{7}{5}x^3+\frac{2}{5}x^2y+\frac{8}{5}xy^2+\frac{3}{7}y^3$ को $\frac{9}{7}x^2+\frac{5}{3}xy+\frac{7}{3}y^2$ से।

27. $\frac{3}{7}x^4+\frac{5}{7}x^3y+\frac{9}{7}x^2y^2+\frac{1}{7}xy^3+\frac{11}{7}y^4$ को $\frac{7}{3}x^2+\frac{7}{11}y^2$ से।

28. $1\cdot5x^5+2\cdot3x^9+1\cdot23x^4+3\cdot25x^2+5$ को $\cdot27x^3+1\cdot39x+9$ से।

29. $\cdot057a^3+1\cdot025a^2b+2\cdot021ab^2+2\cdot8b^3$ को $7a^2+2ab+9b^2$ से।

30. $2\cdot3x^3+3\cdot15x^2y+1\cdot17xy^2+2\cdot07y^3$ को $lx^2+mxy+ny^2$ से।

31. $\frac{5}{3}ax^3+\frac{7}{3}bx^2y+\frac{9}{4}cxy^2+2dy^3$ को $\frac{3}{5}ax^2-\frac{8}{7}bxy+\frac{4}{5}cy^2$ से।

32. $1\cdot5am^3-1\cdot2bm^2n+1\cdot3cmn^2-1\cdot6dn^3$ को

$1\cdot5am^3+1\cdot2bm^2n+1\cdot3cmn^2+1\cdot6dn^3$ से।

लगातार गुणनफल निकालो :

33. $2a+3b$, $2a-3b$ और $4a^2+9b^2$ का।

34. $5ax+6by$, $5ax-6by$ और $25a^2x^2+36b^2y^2$ का।

35. $x^8+x^4y^4+y^8$, x^2+y^2, $x+y$ और $x-y$ का।

36. $x^2+3xy+5y^2$, $x^2-3xy+5y^2$ और $x^4-x^2y^2+25y^4$ का।

37. $a^{12}x^{12}+a^6b^6x^6y^6+b^{12}y^{12}$, $a^4x^4+a^2b^2x^2y^2+b^4y^4$, $ax+by$ और $ax-by$ का।

m व n के सब प्रकार मूल्यों के लिए यदि $a^m \times a^n = a^{m+n}$ हो, तो सिद्ध करो :

38. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a.$ $\left[a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a\right]$ 39. $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} = x.$

40. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a.$ $\left[a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a.\right]$

41. $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}.$ $\left[\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = a^1 = a ;\right.$

$\left.\therefore \; a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}.\right]$

42. $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$. 43. $z^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{z^3}$. 44. $c^{\frac{3}{5}}\times c^{\frac{4}{5}}\times c^{\frac{8}{5}}=c^3$.

45. $y^2\times y^{\frac{3}{2}}\times y^{\frac{7}{2}}=y^7$. 46. $x^{-2}\times x^5=x^3$. $[x^{-2}\times x^5=x^{-2+5}=x^3.]$

47. $z^{\frac{3}{2}}\times z^{-\frac{1}{2}}=z$. 48. $a^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{a^{-3}}$.

$\left[\left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2=a^{-\frac{3}{2}}\times a^{-\frac{3}{2}}=a^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=a^{-3};\quad \therefore\ a^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{a^{-3}}\right]$

49. $b^{-\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{b^{-5}}$. 50. $x^{-\frac{5}{3}}\times x^{-\frac{4}{3}}=x^{-3}$.

निम्नलिखित राशियों का गुणनफल लिखो :

51. $-3x^{\frac{1}{2}}$ और $2x^{\frac{3}{2}}$. 52. $5y^{\frac{3}{2}}$ और $-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}$.

53. $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ और $3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}$. 54. $-5xy^{\frac{3}{4}}$ और $-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

55. $4a^{-2}b^3$ और $-\frac{3}{4}a^3b^{-5}$. 56. $\frac{3}{5}a^{\frac{3}{5}}y^3$ और $-\frac{5}{3}a^{\frac{2}{5}}y^{-4}$.

57. $-4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{4}}$ और $-3a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{5}{4}}$. 58. $-5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{5}}z^{\frac{4}{3}}$ और $-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}z^{-\frac{1}{3}}$.

59. $-6a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{3}{4}}c^{-\frac{2}{7}}$ और $5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{4}}c^{-\frac{5}{7}}$.

60. $-4a^{\frac{5}{6}}x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{4}{5}}$ और $-19a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{6}{5}}$.

गुणा करो :

61. $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ को $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ से। 62. $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ को $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ से।

63. $3x^{\frac{2}{3}}-4y^{\frac{1}{3}}$ को $3x^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{1}{3}}$ से।

64. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ से।

65. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ को $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$ से।

66. $a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}}$ को $a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}}$ से।

67. $2x^{\frac{4}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-3y^{\frac{4}{3}}$ को $2x^{\frac{4}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-3y^{\frac{4}{3}}$ से।

68. $a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}+ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{3}}$ को $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}$ से।

69. $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ को $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ से।

70. $a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b+b^{\frac{3}{2}}$ को $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}$ से।

71. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ को $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ से।

72. $a^{2n}-a^nx^n+x^{2n}$ को a^n+x^n से।

73. $a^{-3}-4a^{-2}b+4a^{-1}b^2-b^3$ को $a^{-2}-2a^{-1}b+b^2$ से।

74. $x^{-3}+3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+2y^3$ को $x^{-3}-3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+2y^3$ से।

75. $2a^{-5}+3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}-5b^{-3}$ को $2a^{-5}+3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+5b^{-3}$ से।

विश्लिष्ट गुणक-प्रणाली-द्वारा गुणा करो :

76. $2x^2+3x+9$ को $3x+5$ से। 77. $x^2-2x-15$ को $2x-3$ से।

78. $3x^3+5x+6$ को x^2+3x+2 से।

79. x^3+px+r को $px+q$ से।

80. $\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2+5$ को $\frac{3}{5}x^2+x+2$ से।

दसवां अध्याय

कठिन भाग

(Harder Division)

82. तीसरे अध्याय में दिये हुए भाग करने के साधारण नियम नीचे दिये रूप में लिखे जा सकते हैं।

(i) $a\div b=a\times\frac{1}{b}$;

(ii) $a\div b\div c=a\div bc$;

(iii) $a\div b\times c=a\times c\div b$;

और (iv) यदि m व n दोनों धनात्मक पूर्ण राशियाँ हों और $m>n$ हो तो $a^m\div a^n=a^{m-n}$;

इस नियम को भाग का घातांक नियम (Index Rule) कहते हैं।

50 वें से 52 वें नियम तक एकपद अथवा बहुपद व्यंजकों को एकपद व्यंजक द्वारा भाग करने की रीति और उसके चिह्न-सम्बन्धी नियम बतलाये गये हैं। इस अध्याय में एक बहुपद व्यंजक को दूसरे एक बहुपद व्यंजक द्वारा भाग करने की रीति पर विचार किया जायगा।

83. एक बहुपद व्यंजक को दूसरे एक बहुपद व्यंजक द्वारा भाग करना।

पहले एक उदाहरण लें, जैसे,

चूँकि $(2a^2+3ab+4b^2)(a+3b)=2a^2(a+3b)+3ab(a+3b)+4b^2(a+3b)$
$=2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3$,

इसलिए $(2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3)\div(a+3b)=2a^2+3ab+4b^2$.

अब, यदि भाज्य व भाजक दिये हों तो भजनफल कैसे निकाला जा सकता है इस पर विचार किया जायगा। ऊपर दिये हुए उदाहरण से मालूम होता है कि,

(i) भाज्य व भाजक दोनों उनमें दिये हुए एक साधारण अक्षर 'a' के घातों के अवरोहक्रम में लिखे गये हैं।

(ii) भजनफल का पहला पद, जैसे $2a^2=2a^3\div a$

अर्थात् = (भाज्य का पहला पद) ÷ (भाजक का पहला पद)।

(iii) भाज्य से $2a^2(a+3b)$ घटाने पर $3a^2b+13ab^2+12b^3$ बाक़ी बचता है, और भजनफल का दूसरा पद, जैसे $3ab=3a^2b\div a$, अर्थात् = (उक्त अंतरफल का पहला पद) ÷ (भाजक का पहला पद)।

(iv) इस अंतरफल से $3ab(a+3b)$ घटाने पर $4ab^2+12b^3$ अंतरफल होता है, और भजनफल का तीसरा पद, अर्थात् $4b^2=4ab^2\div a$.

अर्थात् = (इस अंतरफल का पहला पद) ÷ (भाजक का पहला पद)।

(v) इस अंतर से $4b^2(a+3b)$ घटाने पर कुछ बाक़ी नहीं बचता ; इसलिए भाग पूरा चला गया।

ऊपर दी हुई रीति को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l|l}
a+3b & 2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3 & 2a^2+3ab+4b^2 \\
 & \underline{2a^3+6a^2b} & \\
 & \quad 3a^2b+13ab^2+12b^3 & \\
 & \quad \underline{3a^2b+\ \ 9ab^2} & \\
 & \qquad 4ab^2+12b^3 & \\
 & \qquad \underline{4ab^2+12b^3} &
\end{array}$$

इसलिए इससे भाग करने का निम्नलिखित नियम निकलता है।

भाज्य व भाजक में दिये हुए किसी साधारण अक्षर के घातों के अवरोहक्रम के अनुसार इन दोनों को लिखकर अंकगणित के नियम के अनुसार इनको एक पंक्ति में लिखो।

भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद द्वारा भाग करके जो पद प्राप्त हो, उसे भजनफल के पहले पद के रूप में लिखो। भजनफल के इस पहले पद द्वारा भाजक को गुणा करके भाज्य से घटाओ, और पहले बतलाये हुए साधारण अक्षर के घातों के अवरोहक्रम में इस अंतरफल को लिखो।

अब इस अंतरफल को एक नया भाज्य मानकर और उक्त नियमानुसार इसके पहले पद को भाजक के पहले पद द्वारा भाग करके जो पद प्राप्त हो उसको भजनफल का दूसरा पद लिखो।

भजनफल के दूसरे पद द्वारा भाजक को फिर गुणा करके इस नये भाज्य से घटाओ। इस अन्तरफल को नया भाज्य मानकर उपर बतलाई हुई क्रिया काम में लाओ और जब तक कोई शेषफल न रहे, तब तक इस क्रिया को जारी रक्खो।

टीका। यह स्पष्ट है कि उपर दिये हुए नियमों के अनुसार ठीक भजनफल प्राप्त होता है; कारण, जो भिन्न भिन्न राशियां भाज्य मे एक के बाद एक घटाई जाती हैं वे भजनफल के एक एक पद और सम्पूर्ण भाजक के गुणनफल हैं, और इसलिए उनका योगफल, सम्पूर्ण भजनफल और सम्पूर्ण भाजक के गुणनफल के बराबर है, और यह योगफल भाज्य के बराबर है; इसलिए स्पष्ट है कि दिया हुआ भाज्य, भजनफल और भाजक के गुणनफल के बराबर होगा; और ऐसा होना ही ठीक है।

उदाहरण 1. $x^4 - 4x^2 + 12x - 9$ को $x^2 - 2x + 3$ द्वारा भाग करो।

इस प्रश्न में, भाज्य व भाजक दोनों x के घातों के अवरोहक्रम में लिखे गये हैं; इसलिए निम्नलिखित रूप में भाग दिया जा सकता है।

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2 - 2x + 3 & x^4 \qquad\quad - 4x^2 + 12x - 9 & x^2 + 2x - 3 \\
 & x^4 - 2x^3 + 3x^2 & \\
 & \quad 2x^3 - 7x^2 + 12x - 9 & \\
 & \quad 2x^3 - 4x^2 + \ 6x & \\
 & \qquad\ - 3x^2 + \ 6x - 9 & \\
 & \qquad\ - 3x^2 + \ 6x - 9 &
\end{array}
$$

इसलिए भजनफल $= x^2 + 2x - 3.$

टीका। भाज्य में x^3 वाला पद नहीं है, इस कारण इसका स्थान खाली रक्खा गया है; और x^2 वाला पद x^4 से कुछ दूरी में लिखा गया है। यद्यपि इस प्रकार लिखना ज़रूरी नहीं है, तथापि एक सजातीय पद को दूसरे सजातीय पद के नीचे लिखने के लिए ऐसा किया गया है। यह बात ध्यान देने योग्य है। जैसे, उपर दिये हुए उदाहरण में भाज्य के दूसरे पद $4x^2$ को यदि x^4 के बाद ही लिखते तो $-2x^3$ को $-4x^2$ के नीचे और $3x^2$ का $12x$ के नीचे लिखना पड़ता और ऐसा लिखने से नये विद्यार्थियों के लिए या तो घटाने में तकलीफ होती, या सरलता न रहती।

उदाहरण 2. भाग करो: $16x^4 + 36x^2 + 81$ को $4x^2 + 6x + 9$ से।

$$
\begin{array}{r|l|l}
4x^2 + 6x + 9 & 16x^4 \qquad\qquad + 36x^2 \qquad\quad + 81 & 4x^2 - 6x + 9 \\
 & 16x^4 + 24x^3 + 36x^2 & \\
 & \quad - 24x^3 \qquad\qquad\qquad\quad + 81 & \\
 & \quad - 24x^3 - 36x^2 - 54x & \\
 & \qquad\qquad 36x^2 + 54x + 81 & \\
 & \qquad\qquad 36x^2 + 54x + 81 &
\end{array}
$$

इसलिए भजनफल $= 4x^2 - 6x + 9.$

उदाहरण 3. $x^6-4x^4-2x^3+3x^2+8x-12$ को x^2-4 से भाग करो।

भाज्य व भाजक को उनमें दिये हुए किसी साधारण अक्षर के घातों के अवरोहक्रम में न लिखकर घातों के आरोहक्रम में लिखकर भी भाग दिया जा सकता है। केवल ध्यान रखना चाहिए कि दोनों व्यंजक एक ही रूप में लिखा जायं (या तो घातों के आरोहक्रम में या अवरोहक्रम में)। इस उदाहरण में भाज्य व भाजक दोनों को घातों के आरोहक्रम में लिखकर भाग दिया गया है।

$$\begin{array}{r|l|l}
-4+x^2 & -12+8x+3x^2-2x^3-4x^4+x^6 & 3-2x+x^4 \\
 & \underline{-12\qquad\quad +3x^2} & \\
 & 8x\qquad -2x^3-4x^4+x^6 & \\
 & \underline{8x\qquad -2x^3} & \\
 & -4x^4+x^6 & \\
 & \underline{-4x^4+x^6} &
\end{array}$$

इसलिए भजनफल $=3-2x+x^4$.

उदाहरण 4. भाग करो : $a^2b^2-2abc^2-a^2c^2-b^2c^2$ को $ab+ac-bc$ से।

भाज्य व भाजक को a के घातों के अवरोहक्रम में लिखने पर भाज्य व भाजक क्रमशः $(b^2-c^2)a^2+2bc^2.a-b^2c^2$ और $(b+c)a-bc$ होते हैं। इसलिए भाज्य एक त्रिपद व्यंजक और भाजक एक द्विपद व्यंजक है।

$$\begin{array}{r|l|l}
(b+c)a-bc & (b^2-c^2)a^2+2bc^2.a-b^2c^2 & (b-c)a+bc \\
 & \underline{(b^2-c^2)a^2-(b^2c-bc^2)a} & \\
 & (b^2c+bc^2)a-b^2c^2 & \\
 & \underline{(b^2c+bc^2)a-b^2c^2} &
\end{array}$$

इसलिए भजनफल $=ab-ac+bc$.

उदाहरण 5. $a^3+b^3-c^3+3abc$ को $a+b-c$ द्वारा भाग करो।

भाज्य व भाजक को a के घातों के अवरोहक्रम में लिखने पर भाज्य व भाजक क्रम से $a^3+3bc.a+(b^3-c^3)$ और $a+(b-c)$ होते हैं। इसलिए भाज्य एक त्रिपद व्यंजक व भाजक एक द्विपद व्यंजक है।

$$\begin{array}{r|l|l}
a+(b-c) & a^3\qquad\qquad +3bc.a+(b^3-c^3) & a^2-(b-c)a+(b^2+bc+c^2) \\
 & \underline{a^3+(b-c)a^2} & \\
 & -(b-c)a^2+3bc.a+(b^3-c^3) & \\
 & \underline{-(b-c)a^2-(b-c)^2.a} & \\
 & (b^2+bc+c^2)a+(b^3-c^3) & \\
 & \underline{(b^2+bc+c^2)a+(b^3-c^3)} &
\end{array}$$

इसलिए भजनफल $=a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc$.

उदाहरण 6. भाग करो : $(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3$ को $a^2-ab-ac+bc$ से ।

भाज्य व भाजक को a के घातों के अवरोहक्रम में लिखने से

भाज्य $=(b-c)a^3-b^3a+c^3a+b^3c-bc^3$

$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$, इसलिए एक त्रिपद व्यंजक है ।

और भाजक $=a^2-(b+c)a+bc$, अतएव एक त्रिपद व्यंजक है ।

$$
\begin{array}{r|l|l}
a^2-(b+c)a+bc & (b-c)a^3-(b^3-c^3)a\;+bc(b^2-c^2) & (b-c)a+(b^2-c^2) \\
 & \underline{(b-c)a^3-(b^2-c^2)a^2+bc(b-c)a} & \\
 & (b^2-c^2)a^2-(b^3+b^2c-bc^2-c^3)a+bc(b^2-c^2) & \\
 & \underline{(b^2-c^2)a^2-(b^3+b^2c-bc^2-c^3)a+bc(b^2-c^2)} &
\end{array}
$$

इसलिए भजनफल $=ab-ac+b^2-c^2$.

टीका । ध्यान रखना होगा कि वे सब व्यंजक जो a के भिन्न घातों के गुणकरूप में कोष्ठों के अन्दर रक्खे गये हैं, वे b के घातों के अवरोहक्रम में लिखे गये हैं । इस प्रकार से भाग करना सरल होता है ; गल्ती की सम्भावना कम रहती है ।

प्रश्नमाला 39

भाग करो :

1. $x^2-9x+14$ को $x-7$ से ।
2. $3x^2-17x+10$ को $3x-2$ से ।
3. $12x^2-8x-32$ को $4x-8$ से ।
4. $55x^2-67x-14$ को $11x+2$ से ।
5. $2a^2-7ab+6b^2$ को $a-2b$ से ।
6. $x^4+x^2y^2+y^4$ को x^2+xy+y^2 से ।
7. $4x^2-9a^2$ को $2x+3a$ से ।
8. x^3+a^3 को $x+a$ से ।
9. $a^3-a^2b-7ab^2+3b^3$ को $a-3b$ से ।
10. $\frac{1}{2}x^3+\frac{23}{10}x^2+\frac{42}{5}x+18$ को $\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{5}x+6$ से ।
11. $\frac{3}{2}x^3-\frac{15}{8}x^2+\frac{67}{48}x-\frac{5}{12}$ को $\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{16}x+\frac{5}{12}$ से ।
12. $\frac{1}{8}a^3y^3-\frac{5}{32}a^2y^2b+\frac{67}{432}ayb^2-\frac{5}{108}b^3$ को $\frac{a^2}{12}y^2-\frac{ab}{16}y+\frac{5}{108}b^2$ से ।
13. $\frac{7}{2}a^3m^3+\frac{161}{10}a^2m^2n+\frac{294}{5}amn^2+126n^3$ को $\frac{7}{3}a^2m^2+\frac{28}{5}amn+42n^2$ से ।
14. $\frac{4}{9}x^4-x^2y^2+\frac{8}{3}xy^3-\frac{16}{9}y^4$ को $\frac{2}{3}x^2-\frac{xy}{3}+\frac{4}{3}y^2$ से ।

15. $\frac{1}{7}y^5 - \frac{3}{7}xy^4 + \frac{3}{21}x^2y^3 + \frac{5}{21}x^3y^2 - \frac{1}{3}x^4y + \frac{2}{21}x^5$ को
$\frac{1}{21}y^2 - \frac{1}{7}xy + \frac{1}{21}x^2$ से।

16. $\frac{13}{12}mn^3 + \frac{1}{6}m^2n^2 + \frac{m^4}{2} - \frac{1}{12}m^3n + \frac{1}{3}n^4$ को $\frac{1}{3}mn + \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{24}n^2$ से।

17. $\frac{2}{3}a^2y^3 + \frac{1}{4}y^5 + \frac{a^5}{12} - \frac{3}{4}a^3y^2 - \frac{1}{6}ay^4 - \frac{1}{12}a^4y$ को
$\frac{1}{6}ay - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{12}a^2$ से।

18. यदि $x+y+z=-3a$, तो $(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$ को $a^2+a(x+y)+xy$ से भाग करके, भजनफल निकालो।

भाग करो :

19. $\frac{1}{3}[(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3]$ को $(x-y)(y-z)$ से।
20. $x^6-2a^3x^3+a^6$ को $x^2-2ax+a^2$ से।
21. $2x^3y^3+y^6+x^6$ को $2xy+x^2+y^2$ से।
22. $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$ को $x+c$ से।
23. $x^3+(b-c-a)x^2+(ca-ab-bc)x+abc$ को $x^2+(b-a)x-ab$ से।
24. $a^3+a^2b+a^2c-abc-b^2c-bc^2$ को a^2-bc से।
25. $a^2(b+c)-b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc$ को $a-b+c$ से।
26. $a^2(b+c)+b^2(a-c)+c^2(a-b)+abc$ को $a+b+c$ से।
27. $x^3-2ax^2+(a^2-ab-b^2)x+a^2b+ab^2$ को $x-a-b$ से।
28. $a^3+b^3+c^3-3abc$ को $a+b+c$ से।
29. $x^3+y^3-1+3xy$ को $x+y-1$ से।
30. $x^3-8y^3-27z^3-18xyz$ को $x-2y-3z$ से।
31. $x^3-y^3+z^3+3xyz$ को $x-y+z$ से।
32. $8x^3-27y^3-z^3-18xyz$ को $4x^2+9y^2+z^2+6xy+2xz-3yz$ से।
33. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ को $a-b$ से।
34. $(x^2-bx+cx)a-bc(x+a)+(x-b+c)x^2$ को $(x+a)(x-b)$ से।
35. $c(ab-x^2)+(a-b)(x-c)x+x(x^2-ab)$ को $(x-b)(x-c)$ से।
36. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ को $ab+bc-ac-b^2$ से।
37. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ को
$a^2b-bc^2-ac^2+a^2c$ से।
38. $xy^3+2y^3z-xy^2z+xyz^2-x^3y-2yz^3+x^3z-xz^3$ को
$y+z-x$ से।
39 $b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)$ को $(a+b)(x+a)$ से।

40. $(a-b)^2c^2+(a-b)c^3-(c^2-a^2)b^2+(c-a)b^3$ को
$(a-b)c^2-(c-a)b^2$ से।

[दिये हुए व्यंजकों को c के घातों के अवरोहक्रम में सजाकर लिखो।]

41. $(ax+by)^3+(ax-by)^3-(ay-bx)^3+(ay+bx)^3$ को
$(a+b)^2x^2-3ab(x^2-y^2)$ से। [क० ए०, 1888.]

[भाज्य व भाजक को सरल करके दोनों को x के घातों के अवरोहक्रम में लिखो।]

42. $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$ को
$1+xy+yz+zx$ से। [क० ए०, 1878.]

[दिये हुए व्यंजकों को x के घातों के अवरोहक्रम में लिखो।]

43. $(4x^3-3a^2x)^2+(4y^3-3a^2y)^2-a^6$ को $x^2+y^2-a^2$ से।
[ब० ए०, 1884.]

m व n के कोई मूल्य के लिए यदि $a^m \div a^n = a^{m-n}$ हो, तो सिद्ध करो कि

44. $a^0=1.$ [$a^0=a^{m-m}=a^m \div a^m=1.$]

45. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$ [$a^{-n}=a^{0-n}=a^0 \div a^n=1 \div a^n.$]

46. $x^{\frac{5}{3}} \div x^{\frac{2}{3}}=x.$

47. $x^{-\frac{3}{4}} \div x^{-\frac{7}{4}}=x.$

भाग करो :

48. $a^2b^{\frac{2}{3}}$ को $a^{-1}b^{-\frac{1}{3}}$ से।

49. $a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{5}{2}}$ को $a^{-3}b^{\frac{3}{2}}c^2$ से।

50. $15xyz$ को $-5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{5}}z^{\frac{4}{5}}$ से।

51. $9x^{\frac{4}{3}}-16y^{\frac{2}{3}}$ को $3x^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{1}{3}}$ से।

52. $a+b$ को $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ से।

53. $a^3+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+b^3$ को $a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}}$ से।

54. $4x^{\frac{8}{3}}-37x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}+9y^{\frac{8}{3}}$ को $2x^{\frac{4}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-3y^{\frac{4}{3}}$ से।

55. $a-b^2$ को $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}$ से।

56. $4a^{-10}+12a^{-\frac{15}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+9a^{-5}b^{-3}-25b^{-6}$ को
$2a^{-5}+3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}-5b^{-3}$ से।

57. $9x^{-\frac{5}{2}}-25x^{-\frac{5}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+70x^{-\frac{5}{8}}y^{-\frac{9}{8}}-49y^{-\frac{3}{2}}$ को
$3x^{-\frac{5}{4}}+5x^{-\frac{5}{8}}y^{-\frac{3}{8}}-7y^{-\frac{3}{4}}$ से।

58. a^3-b^2 को $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$ से।

59. $x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$ को $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ से।

84. असम्पूर्ण भाग (Inexact Division) : कभी कभी भाज्य का भाजक द्वारा पूरा पूरा भाग नहीं किया जा सकता। जैसे 83 वें नियम के दूसरे उदाहरण में भाज्य यदि $16x^4+36x^2+6x+86$ होता तो दूसरा अंतरफल $36x^2+60x+86$ होता और अंत का अंतरफल $6x+5$ होता। $6x+5$ को $4x^2+6x+9$ द्वारा भाग नहीं कर सकते। इस कारण भाग-क्रिया अधूरी रह जाती, और अंकगणित की रीति से भजनफल को नीचे दिये हुए रूप में लिखना पड़ता। जैसे,

$$\frac{16x^4+36x^2+6x+86}{4x^2+6x+9}=4x^2-6x+9+\frac{6x+5}{4x^2+6x+9}.$$

उपर दिये हुए तादात्म्य की दाईं ओर के अंश को **पूर्ण भजनफल** (complete quotient) कहते हैं। भाज्य के अंतिम अंश को जिसे भाजक द्वारा भाग नहीं कर सकते **भागशेष** (remainder) कहते हैं। इसलिए यदि D, d, Q और R क्रमशः भाज्य, भाजक, भजनफल व भागशेष हों, तो स्पष्ट है कि,

$$D=d\times Q+R.$$

85. विश्लिष्ट गुणक रीति से भाग (Method of Detached co-efficients) : यदि भाज्य व भाजक दोनों एक ही अक्षरवाले व्यंजक हों, अथवा दोनों एक अक्षरों के समघातिक व्यंजक हों, तो उनमें दिये हुए पदों के गुणकों को अक्षरों से पृथक करके और उनके उचित स्थानों पर (अर्थात् घातों के अवरोहक्रम अथवा आरोहक्रमानुसार) लिखकर भाग किया जा सकता है, और इससे "दीर्घ" भाग करने की जो कठिनाइयाँ हैं वे भी कम हो जायंगी। जैसे,

उदाहरण 1. $6x^4+13x^3+39x^2+37x+45$ को $3x^2+2x+9$ से भाग करो।

```
3+2+9 )6+13+39+37+45( 2+3+5
       6+ 4+18
       ----------------
         + 9+21+37
         + 9+ 6+27
       ----------------
              15+10+45
              15+10+45
              --------
```

इसलिए भजनफल $=2x^2+3x+5.$

साधारण नियमानुसार

$$
\begin{array}{l}
3x^2+2x+9\,\big)\,6x^4+13x^3+39x^2+37x+45\,\big(\,2x^2+3x+5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x^4+\;\;4x^3+18x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 9x^3+21x^2+37x \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{9x^3+\;\;6x^2+27x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 15x^2+10x+45 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{15x^2+10x+45}
\end{array}
$$

इसलिए भजनफल $=2x^2+3x+5$.

उदाहरण 2. x^3-27 को x^2+3x+9 से भाग करो।

टीका। यदि भाज्य अथवा भाजक में x का कोई घातवाला पद वर्तमान न हो, तो उस पद के गुणक को शून्य (0) मानकर उसको उचित स्थान में लिखना चाहिए।

$$
\begin{array}{l}
1+3+9\,\big)\,1+0+0-27\,\big(\,1-3 \\
\qquad\quad\;\; \underline{1+3+9} \\
\qquad\qquad\;\; -3-9-27 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{-3-9-27}
\end{array}
$$

$\therefore$ भजनफल $=x-3$

प्रश्नमाला 40

विश्लिष्ट गुणक रीति के अनुसार भजनफल निकालो :

1. $2m^3-9m^2n+13mn^2-6n^3$ को $2m-3n$ से।
2. $a^4-3a^3b+3ab^3-b^4$ को a^2-b^2 से।
3. $2x^4-3x^3y-3xy^3-2y^4$ को x^2+y^2 से।
4. $2a^4-36a^2x^2-16ax^3$ को $2a^2+8ax$ से।
5. $3+2x+4x^2+5x^3-4x^4+2x^5$ को $1+2x^2$ से।
6. $x^4-4x^2+12x-9$ का x^2+2x-3 से।
7. $4a^4-9a^2b^2+24ab^3-16b^4$ को $2a^2-3ab+4b^2$ से।
8. $a^4+4a^2x^2+16x^4$ को $a^2+2ax+4x^2$ से।
9. a^4+4b^4 को $a^2+2ab+2b^2$ से।
10. $2x^5-7x^4-2x^3+18x^2-3x-8$ को x^3-2x^2+1 से।
11. x^4-81 को $x-3$ से।   12. a^5-32 को $a-2$ से।
13. $3-9x+2x^2+5x^3-7x^4+2x^5$ को $1-3x+x^2$ से।

14. $82x^2+40-45x^3-18x^4-67x$ को $6x^2+8-7x$ से।

15. $64-x^6$ को $2-x$ से। 16. $1+x^6-2x^3$ को x^2+1-2x से।

17. $13ab^3+2a^2b^2+6a^4-a^3b+4b^4$ को $4ab+b^2+3a^2$ से।

18. $a^3b-15b^4-8a^2b^2+a^4+19ab^3$ को a^2+3b^2-2ab से।

19. x^6-a^6 को $x^3-2x^2a+2xa^2-a^3$ से।

20. $8a^2b^3+3b^5+a^5-9a^3b^2-2ab^4-a^4b$ को $2ab-3b^2+a^2$ से।

21. $y^6+x^6-2x^3y^3$ को x^2+y^2-2xy से।

पूर्ण भजनफल निकालो :

22. $\dfrac{x^2+11x+35}{x+5}$. 23. $\dfrac{x^3+\frac{1}{27}y^3}{x-\frac{1}{3}y}$.

24. x^3+px^2+qx+r को x^2+px+q द्वारा भाग करने से भागशेष कितना होगा?

25. भजनफल के चार पद तक लिखकर $1+2x+4x^2$ को $3-x$ द्वारा भाग करो।

86. कुछ आवश्यकीय सिद्धान्त :

विद्यार्थी जानते ही हैं कि,

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

$$\text{और } x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2)$$

इसलिए x^4-a^4 [जो कि $=x^3(x-a)+a(x^3-a^3)$]

$$=(x-a)\{x^3+a(x^2+xa+a^2)\}$$

$$=(x-a)(x^3+x^2a+xa^2+a^3).$$

इसी प्रकार x^5-a^5 [जो कि $=x^4(x-a)+a(x^4-a^4)$]

$$=(x-a)\{x^4+a(x^3+x^2a+xa^2+a^3)\}$$

$$=(x-a)(x^4+xa^3+x^2a^2+xa^3+a^4).$$

इसी प्रकार से दिखाया जा सकता है कि x^6-a^6, x^7-a^7, x^8-a^8 आदि व्यंजकों में से प्रत्येक का $(x-a)$ एक गुणनखंड (factor) है ; इसलिए साधारण रूप से कहा जा सकता है कि यदि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या (positive integer) हो, तो x^n-a^n का एक गुणनखंड $x-a$ होगा।

इसलिए यह सिद्ध होता है कि यदि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या हो, तो x^n-a^n का $x-a$ द्वारा पूर्णरूप से भाग हो सकता है (exactly divisible)।

चूँकि $x^n + a^n = (x^n - a^n) + 2a^n$, और $x^n - a^n$ का $x - a$ द्वारा भाग हो सकता है; किन्तु $2a^n$ को $x - a$ द्वारा भाग नहीं कर सकते; इसलिए सिद्ध हुआ कि $x^n + a^n$ का $x - a$ द्वारा भाग नहीं कर सकते।

इस कारण यदि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या हो,
तो $x^n - a^n$ को हर हालत में $x - a$ द्वारा भाग कर सकते हैं।
किन्तु $x^n + a^n$ को किसी हालत में $x - a$ द्वारा भाग नहीं कर सकते। } ... (क)

उपसिद्धान्त 1. यदि n केवल धनात्मक पूर्ण समसंख्या (even integer) हो, तो $x^n - a^n$ को $x + a$ द्वारा भाग किया जा सकता है।

कारण, यदि n एक धनात्मक पूर्ण समसंख्या हो, तो $(-a)^n = a^n$; * इस कारण $x^n - a^n = x^n - (-a)^n$;

n यदि धनात्मक पूर्ण समसंख्या हो, तो $(-a)^n = -a^n$; * इस कारण $x^n - a^n = x^n + (-a)^n$; और $x + a = x - (-a)$.

अब (क) से मालूम पड़ता है कि $x - (-a)$ द्वारा $x^n - (-a)^n$ को भाग कर सकते हैं; किन्तु $x^n + (-a)^n$ को नहीं कर सकते। इसलिए n यदि धनात्मक पूर्ण समसंख्या हो तो $x^n - a^n$ को $x + a$ द्वारा भाग कर सकते हैं। किन्तु n यदि विषम संख्या हो तो इस प्रकार भाग नहीं कर सकते।

उपसिद्धान्त 2. यदि n एक पूर्ण विषम संख्या हो तो $x + a$ द्वारा $x^n + a^n$ को पूर्णरूप से भाग कर सकते हैं।

क्योंकि n यदि विषम संख्या हो तो $(-a)^n = -a^n$; इसलिए $x^n + a^n = x^n - (-a)^n$;
n समसंख्या हो तो $(-a)^n = a^n$; इसलिए $x^n + a^n = x^n + (-a)^n$;
और $x + a = x - (-a)$.

अब (क) से मालूम पड़ता है कि $x - (-a)$ द्वारा $x^n - (-a)^n$ का भाग कर सकते हैं। किन्तु $x^n + (-a)^n$ को भाग नहीं कर सकते।

इसलिए n यदि विषम संख्या हो, तो $x^n + a^n$ को $x + a$ द्वारा भाग कर सकते हैं; किन्तु n यदि सम हो, तो $x^n + a^n$ को $x + a$ द्वारा भाग नहीं कर सकते।

---

* गुणन के चिह्न सम्बन्धीय नियम को बार बार प्रयोग करके यह सिद्ध होता है; जैसे $(-a)^2 = a^2$, इसलिए $(-a)^3 = (-a) \times (-a)^2 = (-a) \times a^2 = -a^3$; $(-a)^4 = (-a) \times (-a)^3 = (-a)(-a^3) = a^4$; $(-a)^5 = (-a) \times (-a)^4 = (-a) \times a^4 = -a^5$, आदि। अर्थात् $(-a)$ के भिन्न भिन्न घातमापकों में से प्रत्येक यदि समसंख्या हो तो घात धनात्मक होता है, और यदि घातमापक विषम संख्यायें हों तो घात ऋणात्मक होगा।

इसलिए निम्नलिखित सिद्धान्त प्राप्त होते हैं ; *

$x-a$ द्वारा x^n-a^n को हर हालत में भाग कर सकते हैं ;

किन्तु, x^n+a^n को किसी हालत में भाग नहीं कर सकते ।

$x+a$ द्वारा x^n-a^n को भाग कर सकते हैं, जब n एक पूर्ण धनात्मक सम संख्या हो, और x^n+a^n को $x+a$ द्वारा भाग कर सकते हैं जब n एक पूर्ण धनात्मक विषम संख्या हो ।

प्रश्नमाला 41

भाग करके दिखाओ कि निम्नलिखित व्यंजकों को $x+a$ द्वारा भाग कर सकते हैं :

1. x^3+a^3. 2. x^4-a^4. 3. x^5+a^5.
4. x^6-a^6. 5. x^7+a^7. 6. x^8-a^8.

भाग करके दिखाओ कि निम्नलिखित व्यंजक $x+a$ द्वारा विभाजित नहीं हो सकते :

7. x^3-a^3. 8. x^4+a^4. 9. x^5-a^5.
10. x^6+a^6. 11. x^7-a^7. 12. x^8+a^8.

भजनफल लिखो :

13. x^4-1 को $x-1$ से । 14. x^4-y^4 को $x+y$ से ।
15. x^5-1 को $x-1$ से । 16. x^5+y^5 को $x+y$ से ।
17. x^6-1 को $x-1$ से । 18. x^6-y^6 को $x+y$ से ।
19. x^7-1 को $x-1$ से । 20. x^7+y^7 को $x+y$ से ।

ग्यारहवाँ अध्याय

बीजगणितीय सूत्र और उनको रेखागणित द्वारा प्रकट करना

(Formulæ and their geometrical representation)

87. विद्यार्थियों की आसानी के लिए चौथे अध्याय में बतलाये हुए सूत्र एक बार और दिये जा रहे हैं। बीजगणित की बहुत सी क्रियाओं को सरलता और सूक्ष्मता के साथ करने के लिए इन सूत्रों को पूरी तरह समझना बहुत ज़रूरी है ; इसलिए प्रयोग करने के लिए बार बार देखने के बदले उन्हें याद कर लेना उचित है ।

---

* तेईसवें अध्याय में ये पूर्ण रूप से सिद्ध किये जायँगे ।

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(iv) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

(v) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

(vi) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

(vii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$.

(viii) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

(ix) $(x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$.

(x) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$.

88. सूत्रों का प्रयोग :

उदाहरण 1. 999×999 और 9988×10012 का गुणनफल निकालो।

अब $999 \times 999 = 999^2$

$= (1000-1)^2$

$= 1000^2 - 2 \times 1000 \times 1 + 1^2$ ... [सूत्र (ii)]

$= 1000000 - 2000 + 1$

$= 998001$.

और $9988 \times 10012 = 10012 \times 9988$

$= (10000+12)(10000-12)$

$= 10000^2 - 12^2$ ... ... [सूत्र (iii)]

$= 100000000 - 144$

$= 99999856$.

उदाहरण 2. मूल्य निकालो : $2931^3 + 1069^3 + 12000 \times 2931 \times 1069$.

यदि $a = 2931$ और $b = 1069$ मान लें तो दिया हुआ व्यंजक

$= a^3 + b^3 + 12000ab$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

[कारण, $a+b = 2931 + 1069 = 4000$.]

$= (a+b)^3$ ... ... [सूत्र (iv)]

$= (4000)^3$

$= 4000 \times 4000 \times 4000$

$= 64000000000$.

टीका। इनके सिवा चौथे अध्याय के उदाहरणों को देखो।

89. किसी बीजीय राशि को दो वर्गों के अन्तर के रूप में प्रकट करना (to express an algebraic quantity as the difference of two squares) :

चूंकि $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

और $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$,

इसलिए (पहले तादात्म्य से दूसरे को घटाने पर)

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2\ ;$$

अथवा $ab=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$

∴ दो राशियों का गुणनफल = (दो राशियों के योगफल का आधा)^2 − (दो राशियों के अन्तरफल का आधा)^2 ।

उदाहरण 1. $(x+y+2z)(x+y)$ को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में प्रकट करो।

$$(x+y+2z)(x+y)=\left\{\frac{(x+y+2z)+(x+y)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(x+y+2z)-(x+y)}{2}\right\}^2$$

$$=\left[\frac{2x+2y+2z}{2}\right]^2-\left[\frac{x+y+2z-x-y}{2}\right]^2$$

$$=(x+y+z)^2-z^2.$$

उदाहरण 2. $(x+1)(2x+3)(x+5)$ को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में प्रकट करो।

दिया हुआ व्यंजक $=\{(x+1)(2x+3)\}(x+5)=(2x^2+5x+3)(x+5)$

$$=\left\{\frac{(2x^2+5x+3)+(x+5)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(2x^2+5x+3)-(x+5)}{2}\right\}^2$$

$$=(x^2+3x+4)^2-(x^2+2x-1)^2.$$

उदाहरण 3. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)$ को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में प्रकट करो।

दिया हुआ व्यंजक $=\{(x+a)(x+4a)\}\{(x+2a)(x+3a)\}$

$$=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)$$

$$=\left\{\frac{(x^2+5ax+4a^2)+(x^2+5ax+6a^2)}{2}\right\}^2$$

$$-\left\{\frac{(x^2+5ax+6a^2)-(x^2+5ax+4a^2)}{2}\right\}^2$$

$$=(x^2+5ax+5a^2)^2-(a^2)^2.$$

उदाहरण 4. $(x+2a)(x+4a)(x+6a)(x+8a)+7a^4$ को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में लिखो।

दिया हुआ व्यंजक $=\{(x+2a)(x+8a)\}\{(x+4a)(x+6a)\}+7a^4$

$$=(x^2+10ax+16a^2)(x^2+10ax+24a^2)+7a^4$$

$$=\left\{\frac{(x^2+10ax+16a^2)+(x^2+10ax+24a^2)}{2}\right\}^2$$

$$-\left\{\frac{(x^2+10ax+24a^2)-(x^2+10ax+16a^2)}{2}\right\}^2+7a^4$$

$$=(x^2+10ax+20a^2)^2-(4a^2)^2+7a^4$$

$$=(x^2+10ax+20a^2)^2-16a^4+7a^4$$

$$=(x^2+10ax+20a^2)^2-(3a^2)^2$$

प्रश्नमाला 42

[87 वें नियम के सूत्रों की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों को हल करो।]

वर्ग निकालो :

1. $5x+9y$. 2. $16a-13b$. 3. $x+100$. 4. $y+500$.
5. $a+999$. 6. $y+10001$. 7. 988. 8. 1012.
9. 100·5. 10. 99·6.

घन निकालो :

11. $2x+5$. 12. 105. 13. 99·5. 14. 800·6.

15. सिद्ध करो कि $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

इससे a^2+b^2 का मूल्य निकालो जब कि

(i) $a=5004$, $b=4996$; (ii) $a=1012$, $b=988$.

16. सिद्ध करो कि $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

इससे निम्नलिखित व्यंजकों को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में लिखो :

(i) $4(x+2y)(2x+y)$; (ii) $(6x+10y)(4x+6y)$;
(iii) $(x+98)(x+102)$; (iv) 505×495 ;
(v) $(2x+100{\cdot}4)(2x+99{\cdot}6)$.

निम्नलिखित व्यजकों का गुणनफल निकालो :

17. $(a+x)(a-x)(a^2+x^2)$. 18. $(2a+3)(2a-3)(4a^2+9)$.
19. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

20. $98 \times 102 \times 10004$.
21. $96 \times 104 \times 10016$.
22. $(2a+x)(4a^2+4ax+x^2)$.
23. $(a-2)(a+2)(a^2+4a+4)(a^2-4a+4)$.
24. $(x+4)(x^2-4x+16)$.
25. $(2y-3)(4y^2+6y+9)$.
26. $(x+2)(x^2+2x+4)(x-2)(x^2-2x+4)$.
27. $(2x+105)(2x+15)$.
28. $(6x-25)(6x+43)$.
29. $(6x-25)(6x-43)$.

हल करो :

30. $(2a+x+y)^2+2(2a+x+y)(8a-x-y)+(8a-x-y)^2$.
31. $(17a+20x+19y)^2-2(19x+18y+17a)(20x+19y+17a)+(19x+18y+17a)^2$.
32. $(16a+x+y)^3+(4a-x-y)^3+3(16a+x+y)^2(4a-x-y)+3(16a+x+y)(4a-x-y)^2$.
33. $(121a+x+y)^3-(116a+x+y)^3-15a(121a+x+y)(116a+x+y)$.
34. $(5a-8x)^3+(6a+8x)^3+33a(5a-8x)(6a+8x)$.
35. $(2x+3y-16z)^3+3(3x-3y+16z)^2(2x+3y-16z)+(3x-3y+16z)^3+3(3x-3y+16z)(2x+3y-16z)^2-120x^3$.

गुणनखंड निकालो :

36. x^2+5x+6.
37. $5y^2+65y+200$.
38. a^4+4b^4.
39. $(x+y)^2+15(x+y)+36$.
40. $(5a+8b+2)^2-(4a+6)^2$.
41. $8x^3+125y^3$.
42. $(8a+13x)^3-64$.
43. $(15a+3b)^2-4$.
44. $5x^3-5x^2y-30xy^2$.

मूल्य निकालो :

45. $(16a+2b)^2-2(13a+2b)(16a+2b)+(13a+2b)^2$, यदि $a=5$ व $b=7891$ हो।
46. $(91x+5y)^3-3(91x+5y)^2(87x+5y)+3(91x+5y)(87x+5y)^2-(87x+5y)^3$, यदि $x=2$ व $y=83$ हो।
47. $(589963)^2-2\times589963\times589863+(589863)^2$.
48. $90{\cdot}002\times89{\cdot}998$.
49. 9238^2-9233^2.
50. $49856\times49856\times49856-3\times49856\times49855-49855\times49855\times49855$.

51. $(x+2)(2x+1)(5x+2)-3x^4$ को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में लिख कर गुणनखंड निकालो।

52. सिद्ध करो कि $(ax+b)(bx+a)\{abx^2-(a^2+b^2)x-ab\}$ को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में लिखा जा सकता है।

53. $(5x+1)(2x+5)(3x+5)(4x+3)$ को दो वर्गों के अन्तरफल के रूप में लिखो।

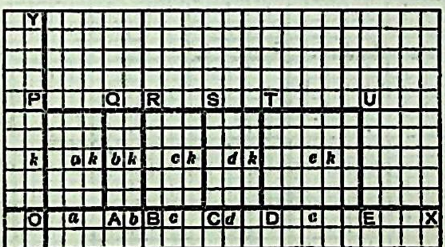
54. $(7x+3a)(7x+5a)(7x+9a)(7x+11a)+61a^4$ को दो वर्गों के योगफल के रूप में लिखो।

90. बीजगणित के सूत्रों को रेखागणित द्वारा हल करना : अब वर्गांकित कागज़ के उपर रेखागणित के चित्रों द्वारा कुछ सूत्रों को हल किया जायगा।

(1) रेखागणित की सहायता से प्रमाण करना होगा कि

$$(a+b+c+d+e)k=ak+bk+ck+dk+ek$$

मान लो कि वर्गांकित कागज़ के उपर O मूल बिन्दु और OX, OY अक्षरेखायें हैं।



मान लो कि OX अक्षरेखा के उपर A, B, C, D, E बिन्दु इस प्रकार लिये गये हैं कि $OA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CD=d$ और $DE=e$; और OY अक्षरेखा पर P बिन्दु ऐसा लिया गया है कि $OP=k$. $OPUE$ आयत (rectangle) को सम्पूर्ण करो। A, B, C, D, E बिन्दुओं से OP के समानान्तर AQ, BR, CS, DT, EU रेखायें खींचो, ताकि वे PU रेखा के साथ क्रमश: Q, R, S, T, U बिन्दुओं में मिलें। इसलिए $OPQA$, $AQRB$, $BRSC$, $CSTD$, $DTUE$ सब क्षेत्र आयत हैं।

अब, आयत PE = आयत PA + आयत QB + आयत RC

+ आयत SD + आयत TE......(1)

किन्तु आयत $PE = OE.OP = (OA + AB + BC + CD + DE).OP$

$= (a+b+c+d+e).k$;

और आयत $PA = OA.OP = ak$;

आयत $QB = AB.AQ = AB.OP = bk$;

आयत $RC = BC.BR = BC.OP = ck$;

आयत $SD = CD.CS = CD.OP = dk$;

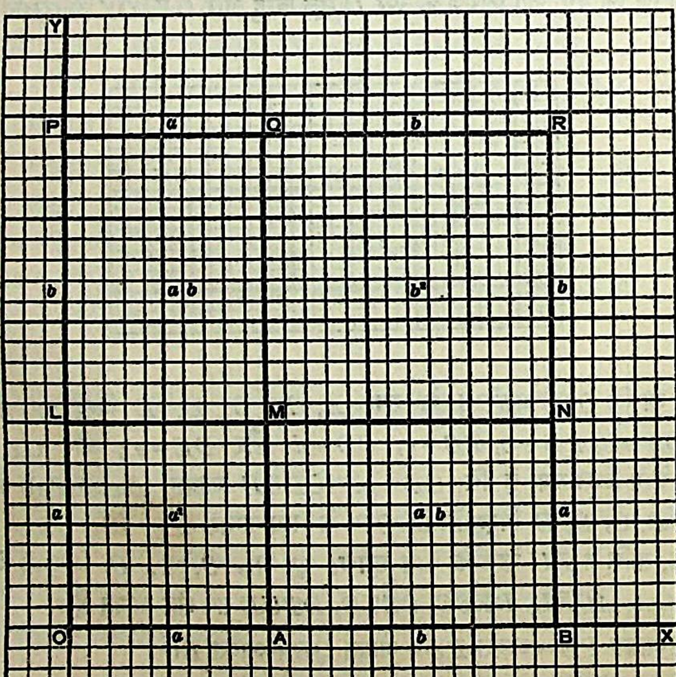
आयत $TE = DE.DT = DE.OP = ek$.

इसलिए (1) से $(a+b+c+d+e)k = ak + bk + ck + dk + ek$.

(2) रेखागणित द्वारा सिद्ध करना होगा कि

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

वर्ग खींचे हुए कागज़ के उपर O को मूलबिन्दु और OX; OY दो परस्पर लम्ब रेखाओं को अक्षरेखायें मान लो।



मान लो कि OX रेखा पर A व B दो विन्दु ऐसे लिये गये हैं कि $OA=a$ और $AB=b$; फिर फर्ज़ करो कि OY रेखा पर L व P दो विन्दु ऐसे लिये गये हैं कि $OL=a$, और $LP=b$; तो $OB=OP=a+b$; $OPRB$ वर्ग को सम्पूर्ण करो, अव A विन्दु से OY के समानान्तर AQ रेखा और L विन्दु से OX के समानान्तर LMN रेखा खींचो। फर्ज़ करो AQ, PR रेखा के साथ Q विन्दु में और LMN रेखा AQ व BR रेखाओं के साथ क्रम से M और N विन्दुओं में मिलते हैं।

तो स्पष्ट प्रकट है कि

$$\text{क्षेत्र } OR = \text{क्षेत्र } OM + \text{क्षेत्र } AN + \text{क्षेत्र } LQ + \text{क्षेत्र } MR \ldots (1)$$

अब, $$\text{क्षेत्र } OR = OB.OP = OB.OB = OB^2 = (a+b)^2;$$

और, $$\text{क्षेत्र } OM = OA.OL = OA.OA = a^2;$$

$$\text{क्षेत्र } AN = AM.AB = OL.AB = ab;$$

$$\text{क्षेत्र } LQ = LM.LP = PQ.LP = ab;$$

$$\text{क्षेत्र } MR = MN.MQ = QR.LP = b.b = b^2.$$

इसलिए (1) से $$(a+b)^2 = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2.$$

(3) रेखागणित द्वारा सिद्ध करना होगा कि

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

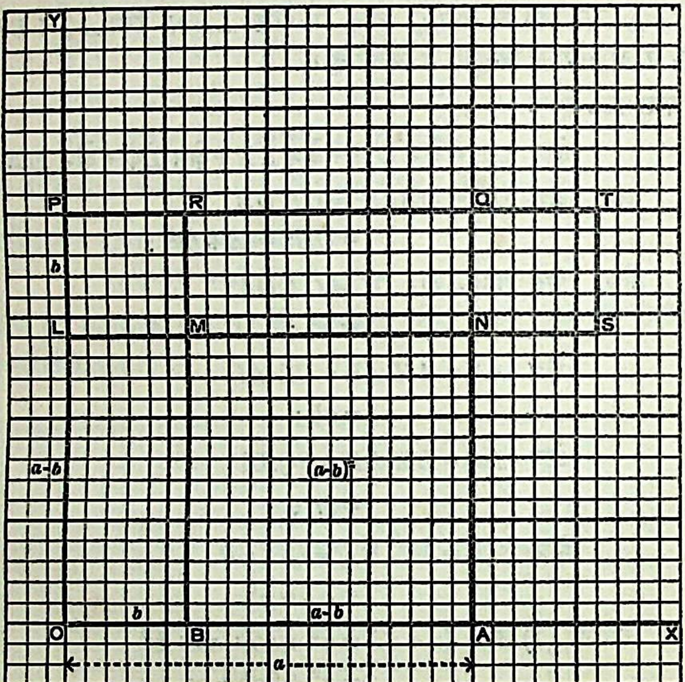
O को मूलविन्दु और OX, OY दो परस्पर लम्ब रेखाओं को अक्षरेखायें मान लो। OX के उपर A व B दो विन्दु ऐसे लिये गये हैं कि $OA=a$ और $OB=b$. OA पर $OPQA$ वर्गक्षेत्र को सम्पूर्ण करो; B विन्दु से OY के समानान्तर बनाकर BR रेखा खींचो, और मान लो कि वह PQ से R विन्दु पर मिलती है। PO में से b के समान बनाकर PL काट लो; L विन्दु से OX के समानान्तर बनाकर LMN रेखा खींचो और मान लो कि वह BR और AQ को क्रमशः M व N विन्दुओं पर काटती है। PQ को बढ़ाकर उसके उपर T विन्दु को इस प्रकार लो कि $QT=PR\ (=b)$. QT पर $QTSN$ वर्ग को सम्पूर्ण करो।

B—10

चूंकि $OA = a,$ और $OB = b$; $\therefore$ $BA = a - b.$

और चूंकि $OP = OA = a,$ और $PL = b$; $\therefore$ $OL = a - b.$

$\therefore$ $AB = OL.$



अब, क्षेत्र BN = क्षेत्र OQ + क्षेत्र NT − क्षेत्र OR − क्षेत्र RS...... (1)

किन्तु क्षेत्र $BN = BA.BM = BA.OL = BA.BA = BA^2 = (a-b)^2$;

क्षेत्र $OQ = OA.OP = OA.OA = OA^2 = a^2$;

क्षेत्र $NT = QT$ पर वर्ग क्षेत्र $= PR$ पर वर्ग क्षेत्र $= b^2$;

क्षेत्र $OR = OP.OB = OA.OB = ab$;

क्षेत्र RS = क्षेत्र RN + क्षेत्र QS = क्षेत्र RN + क्षेत्र PM

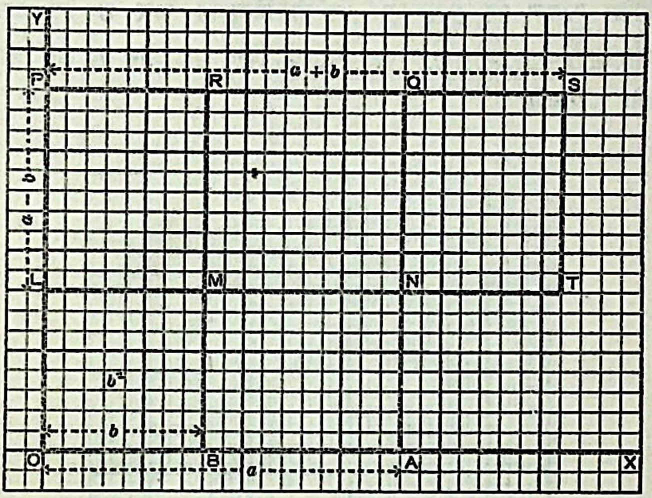
= क्षेत्र PN [$\because$ क्षेत्र QS = क्षेत्र PM, क्योंकि इनमें हरएक b^2 के बराबर है ।]

$= PQ.PL = ab.$

$\therefore$ (1) से $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 - 2ab + b^2.$

(4) रेखागणित की सहायता से सिद्ध करना होगा कि

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$



वर्गांकित कागज़ पर OX अक्ष के उपर दो विन्दु A और B इस प्रकार लो कि $OA = a$ और $OB = b$ हो ; OY अक्ष के उपर दो बिन्दु P और L इस प्रकार लो कि $OP = a$ और $OL = b$ हो ; $OPQA$ और $OLMB$ वर्ग क्षेत्रों को सम्पूर्ण करो। BM को वढ़ाकर PQ के साथ R बिन्दु पर और LM को वढ़ाकर AQ के साथ N विन्दु पर मिला दो ; फिर MN को T बिन्दुतक इस प्रकार बढ़ाओ कि $NT = NA$ $(= b)$ हो ; $NTSQ$ आयत को सम्पूर्ण करो।

स्पष्ट है कि आयत BN = आयत QT ; और $PL = OP - OL = a - b$,

और $AB = OA - OB = a - b$; $\therefore$ $PL = AB$.

अब क्षेत्र PA − क्षेत्र BL = क्षेत्र PN + क्षेत्र BN

= क्षेत्र PN + क्षेत्र QT = क्षेत्र PT ... (1)

किन्तु, क्षेत्र $PA = OA$ पर वर्ग $= a^2$;

क्षेत्र $BL = OB$ पर वर्ग $= b^2$;

किन्तु, क्षेत्र $PT = = PS.PL = (PQ + QS).PL$

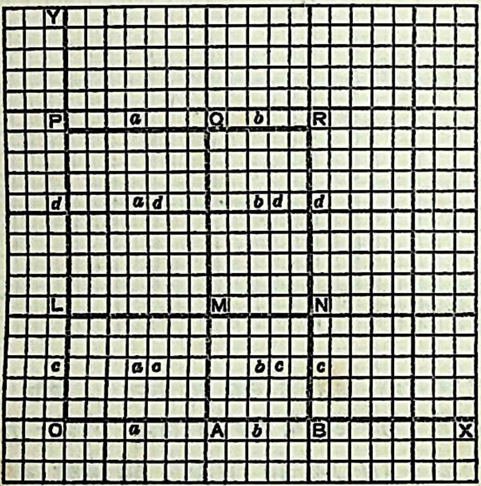
$= (PQ + NT).PL = (a+b)(a-b)$.

इसलिए (1) से $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

(5) रेखागणित द्वारा सिद्ध करना होगा कि

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

वर्गांकित कागज़ पर OX अक्ष पर दो विन्दु A और B इस प्रकार लो कि $OA=a$ और $AB=b$; और OY अक्ष पर दो विन्दु P और L इस प्रकार लो कि $OL=c$ और $LP=d$.



$OPRB$ और $OLNB$ दोनों आयतों को सम्पूर्ण करो। A विन्दु से OY के समानान्तर AMQ रेखा खींचो और मान लो कि वह LN से M विन्दु पर और PR से Q विन्दु पर मिलती है।

तो, क्षेत्र $OR=$ क्षेत्र $OM+$ क्षेत्र $AN+$ क्षेत्र $LQ+$ क्षेत्र MR ... (1)

किन्तु क्षेत्र $OR=OB.OP=(OA+AB)(OL+LP)=(a+b)(c+d)$;

क्षेत्र $OM=OA.OL=ac$;

क्षेत्र $AN=AB.AM=AB.OL=bc$;

क्षेत्र $LQ=PQ.PL=OA.PL=ad$;

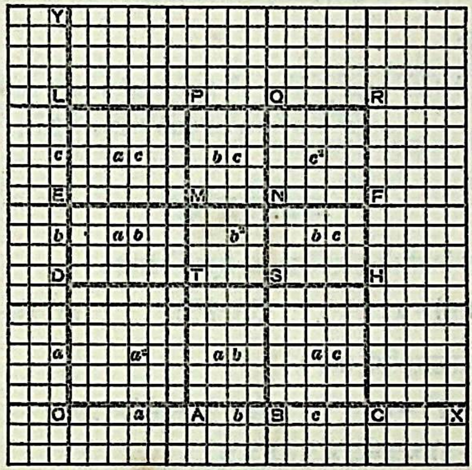
क्षेत्र $MR=QR.QM=AB.PL=bd.$

इसलिए (1) से $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$

(6) रेखागणित द्वारा सिद्ध करना होगा कि,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

वर्गांकित कागज़ पर OX अक्ष पर A, B व C तीन बिन्दुओं को इस प्रकार लो कि $OA=a$, $AB=b$ और $BC=c$ हो।



OC के उपर $OCRL$ वर्गक्षेत्र को सम्पूर्ण करो; इसमें अवश्य हो $OL=OC$ $=OA+AB+BC=a+b+c$.

OL के उपर D व E दो बिन्दुओं को इस प्रकार लो कि $OD=a$, और $DE=b$;

$$\therefore \quad EL=c.$$

A व B से OY के समानान्तर AP व BQ दो रेखायें खींचो और मान लो कि वे LR से क्रमशः P व Q पर मिलती हैं; और D व E से OX के समानान्तर $DTSH$ व $EMNF$ दो रेखायें खींचो और मान लो कि वे AP, BQ, CR तीन रेखाओं से क्रमशः T, S, H और M, N, F बिन्दुओं पर मिलती हैं।

तो, क्षेत्र OR = क्षेत्र OT + क्षेत्र TN + क्षेत्र NR + क्षेत्र DM + क्षेत्र AS + क्षेत्र PN + क्षेत्र NH + क्षेत्र EP + क्षेत्र BH...(1)

किन्तु, क्षेत्र $DM=DT.DE=OA.AB=ab$;

क्षेत्र $AS=AT.AB=OD.AB=ab$.

इसी प्रकार, क्षेत्र NP = क्षेत्र $NH=bc$; क्षेत्र EP = क्षेत्र $BH=ac$.

और, क्षेत्र $OR = OC$ पर वर्ग $= OC^2 = (OA + AB + BC)^2$
$= (a+b+c)^2$;
क्षेत्र $OT = OA.OD = OA.OA = OA^2 = a^2$;
क्षेत्र $TN = TM.TS = AB.DE = AB^2 = b^2$;
क्षेत्र $NR = NQ.NF = EL.BC = BC^2 = c^2$;

इसलिए (1) से

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ab + bc + bc + ac + ac$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

प्रश्नमाला 43

रेखागणित द्वारा निम्नलिखित राशियां का मूल्य निकालो :

1. (i) $(5+6) \times 11$; (ii) 7^2 ; (iii) $(\frac{5}{3} - \frac{1}{3})^2$.

2. रेखागणित द्वारा सिद्ध करो :

(i) $9^2 - 7^2 = 32$; (ii) $(7+3)^2 = 100$;

(iii) $(3+5) \times 2 = 3 \times 2 + 5 \times 2$;

(iv) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$;

(v) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$;

(vi) $(x-a)(x+b) = x^2 - ax + bx - ab$.

3. रेखागणित की सहायता से 12 फ़ुट लम्बाई की सरल रेखा पर खींचे हुए एक वर्ग का क्षेत्रफल निकालो।

4. 5 फ़ुट की लम्बाई और 3 फ़ुट की चौड़ाई के एक कमरे का क्षेत्रफल रेखागणित की सहायता से निकालो।

5. 9 गज़ लम्बे और 3 गज़ चौड़े एक बगीचे के चारों ओर एक गज़ चौड़ा रास्ता है। रेखागणित की सहायता से बगीचे और रास्ते का क्षेत्रफल निकालो।

6. 10 गज़ लम्बाई की सरल रेखा पर खींचे हुए वर्ग-क्षेत्र में 4 गज़ लम्बाई की सरल रेखा पर खींचा हुआ एक वर्गाकार तालाब बनाया गया, रेखागणित की सहायता से बाक़ी ज़मीन का क्षेत्रफल निकालो।

7. रेखागणित की सहायता से एक ऐसे आयत ज़मीन का क्षेत्रफल निकालो जिसकी लम्बाई 50 गज़ और चौड़ाई उसकी लम्बाई का पाँचवां हिस्सा हो।

8. यदि 10 गज़ लम्बा और 5 गज़ चौड़ा एक आयत आँगन वर्गाकार पत्थरों द्वारा पटाया जाय और एक पत्थर के एक ओर की लम्बाई यदि एक गज़ हो, तो रेखागणित की सहायता से बताओ कि कितने पत्थरों की आवश्यकता है।

9. 20 गज़ लम्बी एक सरल रेखा पर खींचे हुए एक वर्गाकार बगीचे के अन्दर एक गज़ चौड़ा एक रास्ता बाग़ के चारों ओर बनाया गया है। रेखागणित की सहायता से रास्ते का क्षेत्रफल निकालो।

10. 20 गज़ लम्बे और 10 गज़ चौड़े एक आयत रूप के बगीचे के अन्दर एक गज़ चौड़े दो रास्ते परस्पर लम्ब रूप में काटते हुए बनाये गये हैं। दोनों रास्ते यदि आयत के सामने के बाहुओं के बीच के बिन्दुओं को मिलानेवाली रेखाओं के दोनों ओर समान चौड़े बने हों तो रेखागणित द्वारा रास्ते को छोड़कर बगीचे की बाक़ी ज़मीन का क्षेत्रफल निकालो।

बारहवाँ अध्याय

सरल गुणनखंडीकरण

(Simple Factorisation)

91. **परिभाषा :** यदि कोई व्यंजक दो या दो से अधिक व्यंजकों का गुणनफल हो, तो इन शेषोक्त व्यंजकों को पहले व्यंजक के गुणनखंड अथवा गुणावयव कहते हैं।

"किसी व्यंजक का गुणनखंड निकालना" (to resolve an expression into factors) का अर्थ यही है, कि जिन व्यंजकों को परस्पर गुणन करने से दिया हुआ व्यंजक प्राप्त होता है, उन व्यंजकों को निकालना।

[गुणनखंड निकालने की कुछ सरल रीतियाँ चौथे अध्याय में बतलाई गई हैं; उन नियमों का यहाँ पर उल्लेख रहेगा, कारण इस अध्याय में गुणनखंड निकालने की रीतियों पर पूर्णतया विचार किया जायगा।]

टीका। इस अध्याय में **बीजगणितीय व्यंजक** (algebraical expression) से अकरणीगत (rational) और अनुकलश्च (integral) बीजगणितीय व्यंजक सूचित होगा, अर्थात्

जिस व्यंजक के किसी पद में करणी चिह्न (radical sign) न हो, और न उसके किसी पद के हर (denominator) में कोई अक्षर हो, ऐसा व्यंजक सूचित होगा ; और व्यंजक के गुणनखंड द्वारा भी अकरणीगत व अनुकलश्र गुणनखंड सूचित होगा।

92. गुणनखंड निकालने का सरल नियम : जिस व्यंजक के प्रत्येक पद में कोई एक गुणनखंड साधारण (common) हो, तो देखते ही उसके दो गुणनखंड निकाले जा सकते हैं, जिनमें से एक होगी एकपद अथवा सरल (simple) राशि और दूसरा होगा बहुपद (compound) व्यंजक ; ऐसे दो गुणनखंड आसानी से निकाले जा सकते हैं। जैसे,

(1) $a^2x + ax^2 = ax.a + ax.x = ax(a+x)$;

इसी प्रकार (2) $2a^3b^2 - 3a^2b^3 = a^2b^2(2a-3b)$;

और (3) $24x^4a^3 - 40x^3a^4 + 56x^2a^5 = 8x^2a^3(3x^2 - 5xa + 7a^2)$.

प्रश्नमाला 44

गुणनखंड निकालो :

1. $ab + ac$. = a(b+c)
2. $a^2b^3 + a^3b^2$.
3. $x^3y^4 - 2x^4y^3$.
4. $2x^2yz + 4xy^2z - 6xyz^2$.
5. $4a^5b - 6a^4b^2 - 8a^3b^3$.
6. $ax^2y - 5a^2x^3y^2 + 3ax^3$.
7. $3x^4y^3z^2 - 12x^2y^4z^3 + 21x^3y^2z^4$.
8. $28a^3b^5 - 42a^5b^3$.
9. $72x^{10}y^8 + 108x^8y^{10}$.
10. $39a^5b^7c^7 - 65b^5c^7a^7 - 91c^5a^7b^7$.

93. $a^2 - b^2$ के रूप में दिये हुए व्यंजक : $a^2 - b^2$ के रूप में दिये हुए व्यंजकों का गुणनखंड निकालने की रीति 56 वें नियम की टीका में बतलाई गई है। विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए कुछ प्रश्न नीचे दिये जा रहे हैं।

प्रश्नमाला 45

गुणनखंड निकालो :

1. $9a^2 - 16b^2$.
2. $4a^3 - 25ax^2$.
3. $36x^4 - 1$.
4. $16x^4 - 1$.
5. $16x^5 - 9x$.
6. $16x^5 - 81x$.
7. $1 - 16a^4$.
8. $x^2 - 81x^6$.
9. $36 - x^4a^2$.
10. $64a^4 - 49x^6$.
11. $121 - m^6$.
12. $49x^6a^{10} - 81$.
13. $a^2b^2 - 25c^2d^2$.
14. $81x^{12} - 64a^{10}$.
15. $p^2q^4 - 100p^2$.
16. $144x^7 - 25x^3a^4$.
17. $192a^9 - 243a^5x^4$.

18. $98a^3x^5 - 128ax$.
19. $324x^{17}a^9 - 484x^5a^3$.
20. $245m^{23}n^{13} - 605m^{15}n^7$.
21. $(a+3b)^2 - 25c^2$.
22. $a^2 - (3b-5c)^2$.
23. $(x+y)^2 - (x-y)^2$.
24. $(3a+2x)^2 - (2a+x)^2$.
25. $4(a-b)^2 - 9(c-d)^2$.
26. $49x^2 - (5y-3z)^2$.
27. $(8x+5)^2 - (2x-7)^2$.
28. $(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2$.
29. $(2a-3b+4c)^2 - (a+4b-5c)^2$.
30. $64(a+3x-4y)^2 - 9(2a-x+3y)^2$.
31. $(4x^2-5a^2)^2 - (5x^2-4a^2)^2$.
32. $(5a^2-3a+7)^2 - (5a^2-3a-7)^2$.

94. **ऐसे व्यंजकों के गुणनखंड निकालना जिनको देखते ही उन्हें a^2-b^2 के रूप में प्रकट कर सकते हैं :** दृष्टान्त के लिए नीचे कुछ उदाहरण दिये जा रहे हैं।

उदाहरण 1. $a^4+a^2b^2+b^4$ के गुणनखंड निकालो।

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &= (a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2 \\ &= (a^2+b^2)^2-(ab)^2 \\ &= \{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\} \\ &= (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

उदाहरण 2. x^4+4 के गुणनखंड निकालो।

$$\begin{aligned} x^4+4 &= (x^4+4x^2+4)-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 \\ &= \{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\} \\ &= (x^2+2x+2)(x^2-2x+2). \end{aligned}$$

उदाहरण 3. x^4-6x^2+1 के गुणनखंड निकालो।

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+1 &= (x^4-2x^2+1)-4x^2 = (x^2-1)^2-(2x)^2 \\ &= \{(x^2-1)+2x\}\{(x^2-1)-2x\} \\ &= (x^2+2x-1)(x^2-2x-1). \end{aligned}$$

उदाहरण 4. $a^2-b^2+2bc-c^2$ के गुणनखंड निकालो।

$$\begin{aligned} a^2-b^2+2bc-c^2 &= a^2-(b^2-2bc+c^2) \\ &= a^2-(b-c)^2 \\ &= \{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} \\ &= (a+b-c)(a-b+c). \end{aligned}$$

उदाहरण 5. $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$ के गुणनखंड निकालो।

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = (c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=(c+d)^2-(a-b)^2$$
$$=\{(c+d)+(a-b)\}\{(c+d)-(a-b)\}$$
$$=(c+d+a-b)(c+d-a+b).$$

प्रश्नमाला 46

गुणनखंड निकालो :

1. $x^4+x^2+1.$
2. $x^8+x^4+1.$
3. $a^4+a^2x^2+x^4.$
4. $a^8+a^4x^4+x^8.$ [क० ए०, 1887.]
5. $x^4+64.$
6. $4x^4+81.$
7. $9x^4+36.$
8. $a^4+2a^2+9.$
9. $x^4-7x^2+9.$
10. $4x^4+8x^2+9.$
11. $4x^4-16x^2+9.$
12. $4x^4+3x^2+9.$
13. $4a^4-37a^2+9.$
14. $4a^4+625.$
15. $9x^4+23x^2+16.$
16. $9a^4-25a^2+16.$
17. $9x^4-33x^2+16.$
18. $9a^4-a^2+16.$
19. $16x^4+4x^2a^2+25a^4.$
20. $9a^4-19a^2x^2+25x^4.$
21. $x^4+8x^2+144.$
22. $a^4-35a^2b^2+25b^4.$
23. $36a^4-16a^2b^2+b^4.$
24. $49m^4+16n^4-60m^2n^2.$
25. $64a^4+81x^4.$
26. $4x^4+(7a)^4.$
27. $x^2-y^2+2yz-z^2.$
28. $4a^2-b^2-9c^2+6bc.$
29. $9x^2-4y^2+12yz-9z^2.$
30. $a^2-4b^2-25c^2+20bc.$
31. $30xz+16y^2-9x^2-25z^2.$
32. $a^2+4b^2-9c^2-4d^2-4ab+12cd.$
33. $(x^2-2xy)-(z^2-2yz).$
34. $4x^2-1+9a^2-25b^2+12xa-10b.$
35. $9x^2-4y^2-49z^2-30x+28yz+25.$
36. $16a^2-16c^2-9b^2-24a+24bc+9.$
37. $49y^2+20z+x^2-14xy-25z^2-4.$
38. $16x^2+42by-9y^2+40xa-49b^2+25a^2.$
39. $49x^2-1+16y^2-64z^2+16z-56xy.$
40. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc).$

95. a^3+b^3 अथवा a^3-b^3 के रूप में प्रकट किये हुए व्यंजक : इस प्रकार के व्यंजकों का गुणनखंड निकालने की रीति 59 वें और 60 वें नियमों में बतलाई गई है। अब इस प्रकार के कुछ कठिन व्यंजकों के गुणनखंड निकालने पर विचार किया जायगा।

उदाहरण 1. a^9+x^9 के गुणनखंड निकालो।

चूँकि $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

इसलिए
$$\begin{aligned} a^9+x^9 &= (a^3)^3+(x^3)^3 \\ &= (a^3+x^3)\{(a^3)^2-(a^3)(x^3)+(x^3)^2\} \\ &= (a^3+x^3)(a^6-a^3x^3+x^6) \\ &= (a+x)(a^2-ax+x^2)(a^6-a^3x^3+x^6). \end{aligned}$$

उदाहरण 2. a^9-x^9 के गुणनखंड निकालो।

चूँकि $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

इसलिए
$$\begin{aligned} a^9-x^9 &= (a^3)^3-(x^3)^3 \\ &= (a^3-x^3)\{(a^3)^2+(a^3)(x^3)+(x^3)^2\} \\ &= (a^3-x^3)(a^6+a^3x^3+x^6) \\ &= (a-x)(a^2+ax+x^2)(a^6+a^3x^3+x^6). \end{aligned}$$

उदाहरण 3. $64x^7-xa^6$ के गुणनखंड निकालो।

$$\begin{aligned} 64x^7-xa^6 &= x(64x^6-a^6) \\ &= x\{(8x^3)^2-(a^3)^2\} \\ &= x(8x^3+a^3)(8x^3-a^3) \\ &= x\{(2x)^3+a^3\}\{(2x)^3-a^3\} \\ &= x\{(2x+a)(4x^2-2xa+a^2)\}\{(2x-a)(4x^2+2xa+a^2)\} \\ &= x(2x+a)(2x-a)(4x^2-2xa+a^2)(4x^2+2xa+a^2). \end{aligned}$$

अथवा,

$$\begin{aligned} 64x^7-xa^6 &= x(64x^6-a^6) \\ &= x\{(4x^2)^3-(a^2)^3\} \\ &= x(4x^2-a^2)(16x^4+4x^2a^2+a^4) \\ &= x(2x+a)(2x-a)\{(16x^4+8x^2a^2+a^4)-4x^2a^2\} \\ &= x(2x+a)(2x-a)\{(4x^2+a^2)^2-(2xa)^2\} \\ &= x(2x+a)(2x-a)(\overline{4x^2+a^2}+2xa)(\overline{4x^2+a^2}-2xa) \\ &= x(2x+a)(2x-a)(4x^2+2xa+a^2)(4x^2-2xa+a^2). \end{aligned}$$

टीका। उपर वतलाये हुए दो नियमों में से कोई भी प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु पहला नियम ही आसान है।

प्रश्नमाला 47

गुणनखंड निकालो :

1. a^3-8b^3.
2. a^4-27ax^3.
3. $512x^9+1$.
4. a^9-512b^9.
5. $27a^6+125x^6$.
6. m^6-n^6.
7. $343x^3+512y^3$. [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1882.]
8. $64x^{12}-1$.
9. a^6-64x^{12}.
10. $125x^9-216a^9$.
11. $64a^{13}b+343ab^{13}$.
12. $729x^{20}y^2-64x^2y^{20}$.
13. $(a^2+b^2)^3+8a^3b^3$.
14. $(2x^2-3y^2)^3+y^6$.
15. $(2a^3-b^3)^3-b^9$.

96. x^2+px+q के रूप के व्यंजकों को ध्यान से देखकर गुणनखंड निकालना :

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ इस तादात्म्य से स्पष्ट देखा जाता है कि x^2+px+q के रूप में प्रकट किये हुए किसी व्यंजक का गुणनखंड निकालने के लिए, a और b ऐसी दो राशियों को ऐसे समझना आवश्यक है कि $a+b=p$ और $ab=q$ हो ; a व b यदि अकरणीगत (rational) व पूर्ण (integral) हों तो गुणनखंड केवल ध्यान से देखने से ही निकाले जा सकते हैं। इस नियम को और स्पष्ट समझने के लिए विद्यार्थी 60 वें नियम के बाद के उदाहरणों को देख सकते हैं।

उदाहरण 1. $x^2+17x+30$ के गुणनखंड निकालो।

इस हालत में ऐसी दो संख्यायें निकालो जिनका योगफल 17 और गुणनफल 30 है।

अब जिन जिन दो संख्याओं का गुणनफल 30 है, वे क्रमशः (i) 1 व 30, (ii) 2 व 15, (iii) 3 व 10, (iv) 5 व 6 हैं। इनमें से अब जिन दो संख्याओं का योगफल 17 है उनको निकालना होगा। स्पष्ट है कि ये दो संख्यायें 2 व 15 हैं ; कारण $2+15=17$ और $2\times 15=30$.

$$\text{इसलिए}\quad x^2+17x+30=(x+2)(x+15).$$

P.N.K.

उदाहरण 2. $x^2-11x+24$ के गुणनखंड निकालो।

अब जिन दो संख्याओं का गुणनफल $+24$ और योगफल -11 है, उनको निकालना होगा। इसलिए स्पष्ट सूचित होता है कि ये दो संख्यायें जिनको हम मालूम करना चाहते हैं, ऋणात्मक हैं, कारण दोनों यदि धनचिह्नित हों, तो उनका योगफल ऋणात्मक नहीं हो

सकता ; और यदि उनमें से एक धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक हो, तो उनका गुणनफल धनात्मक नहीं हो सकता।

अब जिन जिन ऋणात्मक दो संख्याओं का गुणनफल $=24$ है, वह क्रमशः ये हैं : (i) -1 व -24 ; (ii) -2 व -12 ; (iii) -3 व -8 ; (iv) -4 व -6। इनमें से अब वे दो संख्यायें निकालनी होंगी जिनका योगफल $=-11$ है। इसलिए -3 व -8 ये दो संख्यायें हैं।

$$\therefore x^2-11x+24=(x-3)(x-8).$$

उदाहरण 3. $x^2+6x-40$ के गुणनखंड निकालो।

अब ऐसी दो संख्यायें निकालनी होंगी जिनका गुणनफल $=-40$ और योगफल $=+6$.

जिन दो संख्याओं का गुणनफल $=-40$ है वह क्रमशः ये हैं : (i) 1 व -40 ; (ii) -1 व 40 ; (iii) 2 व -20 ; (iv) -2 व 20 : (v) 4 व -10 ; (vi) -4 व 10 ; (vii) 5 व -8 ; (viii) -5 व 8 ; इनमें से जिन दो संख्याओं का योगफल $+6$ है, वह -4 व $+10$ हैं ; जो संख्यायें हम मालूम करना चाहते हैं, वे -4 व $+10$ हैं।

$$\therefore x^2+6x-40=(x-4)(x+10).$$

टीका। स्पष्ट सूचित होता है कि एक धनात्मक व एक ऋणात्मक संख्या का योगफल यदि धनात्मक हो तो उनमें से जिस संख्या का चिह्ननिरपेक्ष या विशुद्ध मूल्य (absolute value) अधिक है, वह धनात्मक होगी। यदि इस बात पर ध्यान रक्खा जाय तो हम पहले ही (i), (iii), (v) व (vii) में बतलाई हुई दो संख्याओं को छोड़ सकते हैं।

उदाहरण 4. $x^2-5x-36$ के गुणनखंड निकालो।

अब ऐसी दो संख्यायें निकालनी होंगी जिनका योगफल $=-5$ और गुणनफल $=-36$ है। स्पष्ट सूचित होता है कि ऐसी दो संख्याओं में से एक धनात्मक व एक ऋणात्मक होगी और ऋणात्मक संख्या का चिह्ननिरपेक्ष मूल्य धनात्मक संख्या से अधिक होगा। अब जिन जिन दो संख्याओं का गुणनफल $=-36$, और ऋणात्मक संख्या का चिह्ननिरपेक्ष मूल्य अधिक है वह क्रमशः ये हैं : (i) 1 व -36 ; (ii) 2 व -18 ; (iii) 3 व -12 ; (iv) 4 व -9 और इनमें से जिन दो संख्याओं का योगफल -5 है वह दो संख्यायें 4 व -9 हैं।

$$\therefore x^2-5x-36=(x+4)(x-9).$$

उदाहरण 5. $a^2+7ab+12b^2$ के गुणनखंड निकालो।

यदि दो ऐसी संख्यायें p और q निकाली जायं कि $p+q=7$, और $pq=12$, तो जो गुणनखंड हम निकालना चाहते हैं वे होंगे $a+pb$ और $a+qb$.

उपर बतलाये हुए नियम के अनुसार ये संख्यायें 3 व 4 होंगी ; कारण $3+4=7$ और $3\times4=12$.

$$\therefore\ a^2+7ab+12b^2=(a+3b)(a+4b).$$

उदाहरण 6. $m^2-12mn+20n^2$ के गुणनखंड निकालो।

यहाँ ऐसी दो संख्यायें निकालनी होंगी जिनका योगफल $=-12$ और गुणनफल $=+20$. उपर बतलाये हुए कारणों द्वारा सूचित होता है, कि ये संख्यायें -10 व -2 हैं।

$$\therefore\ m^2-12mn+20n^2=(m-10n)(m-2n).$$

उदाहरण 7. a^4-a^2-12 के गुणनखंड निकालो।

a^2 के बदले यदि x मान लिया जाय तो दिया हुआ व्यंजक $=x^2-x-12$. उपर बतलाये हुए नियम के अनुसार $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$.

$$\therefore\ a^4-a^2-12=(a^2-4)(a^2+3)\ ; \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

फिर $a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$.

इसलिए (1) से $a^4-a^2-12=(a+2)(a-2)(a^2+3)$.

उदाहरण 8. $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)-18$ के गुणनखंड निकालो।

x^2+2x के बदले यदि a मान लिया जाय तो दिया हुआ व्यंजक $=a^2-3a-18$ $=(a-6)(a+3)$.

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=\{(x^2+2x)-6\}\{(x^2+2x)+3\}$

$=(x^2+2x-6)(x^2+2x+3)$.

उदाहरण 9. गुणनखंड निकालो :

$$(5a+b)^2+(5a+b)(a+2b)-20(a+2b)^2.$$

यदि $(5a+b)$ के बदले x और $(a+2b)$ के बदले y मान लें तो दिया हुआ व्यंजक हो जायगा $x^2+xy-20y^2$; और स्पष्ट प्रकट है कि $x^2+xy-20y^2=(x+5y)(x-4y)$.

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=\{(5a+b)+5(a+2b)\}\{(5a+b)-4(a+2b)\}$

$=(10a+11b)(a-7b)$.

उदाहरण 10. $8x^2+2x-3$ के गुणनखंड निकालो।

पहली रीति : x^2 के गुणक को व्यंजक की अचल राशि (constant term) [अर्थात् जिस पद में x अथवा x का कोई घात न हो] द्वारा गुणन करो।

यहाँ गुणनफल $=8\times(-3)=-24$.

अब ऐसी दो संख्यायें निकालो जिसका गुणनफल $=-24$ और योगफल $=+2$ (अर्थात् x का गुणक)। स्पष्ट है कि ये दो संख्यायें 6 व -4 होंगी।

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $= 8x^2 + 6x - 4x - 3 = 2x(4x+3) - (4x+3)$
$= (4x+3)(2x-1)$.

दूसरी रीति :

दिया हुआ व्यंजक $= 8x^2 + 2x - 3 = \frac{1}{8}(8 \times 8x^2 + 2 \times 8x - 3 \times 8)$
$= \frac{1}{8}(a^2 + 2a - 24)$; [$8x$ के बदले a लिखा गया है]

साफ जाहिर है $a^2 + 2a - 24 = (a+6)(a-4)$.

इसलिए दी हुई राशि $= \frac{1}{8}(a+6)(a-4) = \frac{1}{8}(8x+6)(8x-4)$
$= \frac{1}{8}\{2(4x+3)\}\{4(2x-1)\} = (4x+3)(2x-1)$.

उदाहरण 11. $12x^2 + 7x - 10$ के गुणनखंड निकालो।

पहली रीति : x^2 के गुणक द्वारा व्यंजक की अचल राशि (constant term) को (अर्थात् जिस पद में x न हो) गुणन करके, जो गुणनफल प्राप्त हो उसके ऐसे दो गुणनखंड निकालो जिनका बीजीय योगफल $= x$ के गुणक के बराबर हो।

यहाँ गुणनफल $= 12 \times (-10) = -120$; और पड़ताल से मालूम होता है कि जिन दो संख्याओं का गुणनफल $= -120$ और बीजीय योगफल $= x$ का गुणक अर्थात् $+7$, वे दो संख्यायें हैं $+15$ और -8।

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $= 12x^2 + 15x - 8x - 10 = 3x(4x+5) - 2(4x+5)$
$= (4x+5)(3x-2)$.

दूसरी रीति :

दिया हुआ व्यंजक $= 12x^2 + 7x - 10 = \frac{1}{12}(12 \times 12x^2 + 7 \times 12x - 10 \times 12)$
$= \frac{1}{12}(a^2 + 7a - 120)$; [$12x$ को a मानकर]

साफ जाहिर है कि $a^2 + 7a - 120 = (a+15)(a-8)$.

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $= \frac{1}{12}(12x+15)(12x-8) = \frac{1}{12}\{3(4x+5)\}\{4(3x-2)\}$
$= (4x+5)(3x-2)$.

उदाहरण 12. $13x^2 - 20ax + 7a^2$ के गुणनखंड निकालो।

पहली रीति : व्यंजक के अचल पद को x^2 के गुणक द्वारा गुणा करो। यह गुणनफल $= 13 \times 7a^2 = 91a^2$; अब $91a^2$ के ऐसे दो गुणनखंड निकालो कि उनका बीजगणितीय योगफल $= x$ का गुणक ; अर्थात् $-20a$ है।

साफ जाहिर है कि यह दो गुणनखंड $-7a$ और $-13a$ हैं।

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $= 13x^2 - 13ax - 7ax + 7a^2$
$= 13x(x-a) - 7a(x-a) = (x-a)(13x-7a)$.

दूसरी रीति :

दिया हुआ व्यंजक $= 13x^2 - 20ax + 7a^2$

$= \frac{1}{13}(13 \times 13x^2 - 20a \times 13x + 13 \times 7a^2)$

$= \frac{1}{13}(y^2 - 20ay + 91a^2)$ [$13x$ के बदले y लिखकर]

$= \frac{1}{13}(y^2 - 13ay - 7ay + 91a^2)$

$= \frac{1}{13}\{y(y - 13a) - 7a(y - 13a)\}$

$= \frac{1}{13}(y - 13a)(y - 7a)$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $= \frac{1}{13}(13x - 13a)(13x - 7a) = \frac{1}{13} \times 13(x - a)(13x - 7a)$

$= (x - a)(13x - 7a).$

प्रश्नमाला 48

गुणनखंड निकालो :

1. $x^2 + 3x + 2.$	2. $x^2 + 5x + 6.$	3. $a^2 + 4a + 3.$
4. $x^2 - 5x + 4.$	5. $x^2 + 7x + 10.$	6. $x^2 - 7x + 12.$
7. $x^2 + 8x + 15.$	8. $x^2 - 2x - 15.$	9. $x^2 - 13x + 36.$
10. $x^2 - 5x - 36.$	11. $x^2 - 14x + 24.$	12. $x^2 - 22x + 40.$
13. $x^2 + 7x - 30.$	14. $x^2 + 2x - 48.$	15. $x^2 + 16x - 36.$
16. $x^2 + 9x - 36.$	17. $x^2 + 11x - 42.$	18. $x^2 + 14x - 72.$
19. $x^2 - 3x - 40.$	20. $x^2 - 11x - 80.$	21. $x^2 - 29x - 96.$
22. $x^2 - 10x - 56.$	23. $x^2 - x - 42.$	24. $x^2 - x - 72.$
25. $x^2 + 22x + 120.$	26. $x^2 + 16x - 80.$	27. $x^2 - 21x - 72.$
28. $x^2 + 5x - 84.$	29. $x^2 - 20x + 96.$	30. $x^2 + 23x - 78.$
31. $x^2 - 6x - 72.$	32. $x^2 - 25x + 84.$	33. $x^2 - 26x + 88.$
34. $x^2 + 7x - 120.$	35. $x^2 - 2x - 80.$	36. $x^2 + 8x - 84.$
37. $a^2 - a - 56.$	38. $m^2 - 9m - 90.$	39. $a^2 + 17a - 60.$
40. $a^2 - 15a + 54.$	41. $p^2 - 22p - 48.$	42. $m^2 + m - 72.$
43. $m^2 + 27m - 90.$	44. $a^2 - 29a + 120.$	45. $x^2 + 7x - 78.$
46. $a^2 - 49a - 102.$	47. $a^2 - 19a + 60.$	48. $x^2 + 12x - 64.$
49. $a^2 - 26a - 120.$	50. $x^2 + 8x - 105.$	51. $x^2 - xy - 42y^2.$
52. $a^2 - 12ab + 32b^2.$	53. $m^2 + mn - 30n^2.$	54. $a^2 + ab - 12b^2.$
55. $a^2 - 2ab - 15b^2.$	56. $x^2 - 7xy - 8y^2.$	57. $x^2 + 3xy - 40y^2.$
58. $p^2 - 14pq + 48q^2.$	59. $p^2 + 2pq - 80q^2.$	60. $x^2 + 20xy - 96y^2.$

61. a^4+4a^2-5. 62. x^4+2x^2-15. 63. x^4+3x^2-28.
64. x^6+2x^3-3. 65. a^6-10a^3+16. 66. x^6+26x^3-27.
67. a^6+7a^3-8. 68. x^8-20x^4+64. 69. a^8-11a^4-80.
70. $x^{12}-7x^6-8$. 71. $(a^2+2a)^2-(a^2+2a)-2$.
72. $(x^2+3x)^2+3(x^2+3x)+2$. 73. $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$.
74. $(a^2-3a)^2-3(a^2-3a)-4$. 75. $(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5$.
76. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$. 77. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$.
78. $(a^2+7a)^2-8(a^2+7a)-180$. 79. $(a^2+6a)^2-32(a^2+6a)-320$.
80. $(x^2-8x)^2-29(x^2-8x)+180$. 81. $2x^2+x-15$.
82. $6a^2-a-15$. 83. $8m^2-6m-9$. 84. $6x^2+7xy-24y^2$.
85. $10a^2-41ab+21b^2$. 86. $12m^2-mn-20n^2$.
87. $12x^2+28xy-5y^2$. 88. $20a^2+ab-30b^2$.
89. $18x^2-51xy+35y^2$. 90. $12x^2+23xy-24y^2$.

97. x^2+px+q के ढंग के व्यंजकों को दो वर्गों का अन्तरफल बनाकर उनका गुणनखंड निकाला जा सकता है।

कुछ विशेष उदाहरणों द्वारा यह नियम भली भांति समझाया जायगा।

उदाहरण 1. $x^2-7x+12$ के गुणनखंड निकालो।

$$x^2-7x+12=x^2-7x+(\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{7}{2})^2+12 \quad [\,(\tfrac{7}{2})^2 \text{ जोड़ व घटाकर}\,]$$
$$=\{x^2-7x+(\tfrac{7}{2})^2\}-(\tfrac{49}{4}-12)=(x-\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{1}{4}=(x-\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2$$
$$=\{(x-\tfrac{7}{2})+\tfrac{1}{2}\}\{(x-\tfrac{7}{2})-\tfrac{1}{2}\}=(x-3)(x-4).$$

टीका। यह ख्याल में रखना चाहिए, कि एक पूर्ण वर्ग पाने के लिए x^2-7x के साथ 7 के आधे का वर्ग (अर्थात् x के गुणक के आधे का वर्ग) जोड़ा गया है। साधारणतः x^2+2ax (अथवा x^2-2ax) के साथ a^2 जोड़ने से जो योगफल प्राप्त होगा वह एक पूर्ण वर्ग होगा।

उदाहरण 2. $x^2+2xy-8y^2-4z^2+12yz$ के गुणनखंड निकालो।

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=(x^2+2xy+y^2)-(9y^2+4z^2-12yz)$$
$$=(x+y)^2-(3y-2z)^2$$
$$=\{(x+y)+(3y-2z)\}\{(x+y)-(3y-2z)\}$$
$$=(x+4y-2z)(x-2y+2z).$$

उदाहरण 3. $3x^2+11x-4$ के गुणनखंड निकालो।

$$3x^2+11x-4=3(x^2+\tfrac{11}{3}x-\tfrac{4}{3})=3\{x^2+\tfrac{11}{3}x+(\tfrac{11}{6})^2-(\tfrac{11}{6})^2-\tfrac{4}{3}\}$$
$$=3\{(x+\tfrac{11}{6})^2-(\tfrac{121}{36}+\tfrac{4}{3})\}=3\{(x+\tfrac{11}{6})^2-\tfrac{169}{36}\}$$
$$=3\{(x+\tfrac{11}{6})+\tfrac{13}{6}\}\{(x+\tfrac{11}{6})-\tfrac{13}{6}\},\ [\because\ \tfrac{169}{36}=(\tfrac{13}{6})^2]$$
$$=3(x+4)(x-\tfrac{1}{3})=(x+4)(3x-1).$$

उदाहरण 4. $8x^2-10x+3$ के गुणनखंड निकालो।

$$8x^2-10x+3=8\{x^2-\tfrac{10}{8}x+\tfrac{3}{8}\}=8\{x^2-\tfrac{5}{4}x+(\tfrac{5}{8})^2-(\tfrac{25}{64}-\tfrac{3}{8})\}$$
$$=8\{(x-\tfrac{5}{8})^2-\tfrac{1}{64}\}=8\{(x-\tfrac{5}{8})+\tfrac{1}{8}\}\{(x-\tfrac{5}{8})-\tfrac{1}{8}\}$$
$$=8(x-\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{3}{4})=\{2(x-\tfrac{1}{2})\}\{4(x-\tfrac{3}{4})\}$$
$$=(2x-1)(4x-3).$$

उदाहरण 5. $2a^2+5ab-12b^2$ के गुणनखंड निकालो।

$$2a^2+5ab-12b^2=2(a^2+\tfrac{5}{2}ab-6b^2)$$
$$=2\left\{a^2+\frac{5}{2}ab+\left(\frac{5b}{4}\right)^2-\left(\frac{25b^2}{16}+6b^2\right)\right\}$$
$$=2\{(a+\tfrac{5}{4}b)^2-\tfrac{121}{16}b^2\}$$
$$=2\{(a+\tfrac{5}{4}b)+\tfrac{11}{4}b\}\{(a+\tfrac{5}{4}b)-\tfrac{11}{4}b\}$$
$$=2(a+4b)(a-\tfrac{3}{2}b)=(a+4b)(2a-3b).$$

उदाहरण 6. $ax^2+(a^2+1)x+a$ के गुणनखंड निकालो।

$$ax^2+(a^2+1)x+a$$
$$=a\left\{x^2+\frac{a^2+1}{a}\cdot x+1\right\}$$
$$=a\left\{x^2+\frac{a^2+1}{a}\cdot x+\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^4+2a^2+1}{4a^2}-1\right)\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)+\frac{a^2-1}{2a}\right\}\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)-\frac{a^2-1}{2a}\right\}$$
$$=a\left(x+a\right)\left(x+\frac{1}{a}\right)$$
$$=(x+a)(ax+1).$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि,

$$ax^2-(a^2+1)x+a=(x-a)(ax-1),$$
$$ax^2+(a^2-1)x-a=(x+a)(ax-1),$$
$$ax^2-(a^2-1)x-a=(x-a)(ax+1).$$

टीका। इन उत्तरों को याद रखना बहुत ज़रूरी है, क्योंकि इनकी सहायता से उपर दिये हुए व्यंजक के रूप के किसी व्यंजक का गुणनखंड तुरंत निकाला जा सकता है। जैसे,

$$3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1),$$
$$4x^2-15x-4=(x-4)(4x+1),$$
$$5x^2+24x-5=(x+5)(5x-1)\text{ ; आदि ।}$$

उदाहरण 7. गुणनखंड निकालो :

$$4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2.$$

यदि $a=x^2+2x+5$ व $b=x^2+6x$ मान लें,

तो दिया हुआ व्यंजक $=4a^2+17ab+4b^2$.

और यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि $4a^2+17ab+4b^2=(a+4b)(4a+b)$.

इसलिए यह व्यंजक

$$=\{(x^2+2x+5)+4(x^2+6x)\}\{4(x^2+2x+5)+(x^2+6x)\}$$
$$=(5x^2+26x+5)(5x^2+14x+20)$$
$$=(x+5)(5x+1)(5x^2+14x+20).$$

प्रश्नमाला 49

उपर दिये हुए नियमों के अनुसार निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड निकालो :

1. x^2+4x+3. 2. x^2+6x+5. 3. $x^2+8x+15$.
4. $x^2-10x+21$. 5. $x^2-2x-48$. 6. $x^2-4x-45$.
7. $x^2-12x+32$. 8. $x^2-6x-55$. 9. $a^2+2ab-c^2+2bc$.
10. x^2+2x-y^2+2y. 11. x^2+6x-y^2+4y+5.
12. $a^2+4ab-5b^2-c^2+6bc$. 13. $x^2-6xy+5y^2-z^2+4yz$.
14. $x^2-10xy+16y^2-4z^2+12yz$. 15. $a^2-12ab-13b^2-9c^2+42bc$.
16. $x^2+12xy-9z^2+36yz$. 17. $x^2-14xy-15y^2-25z^2+80yz$
18. $2x^2-5x-3$. 19. $3x^2-5x-2$. 20. $3x^2+14x+8$.
21. $4x^2+7x-2$. 22. $6x^2+x-2$. 23. $6x^2-5x-4$.
24. $6x^2+7x-3$. 25. $8x^2+2x-15$. 26. $4x^2+4x-35$.
27. $6x^2-x-12$. 28. $3x^2-16x-12$. 29. $2x^2-9x-35$.
30. $2x^2+5x-42$. 31. $3x^2+13x-30$. 32. $12x^2+x-6$.
33. $2a^2+7ab-15b^2$. 34. $6x^2-13xy+6y^2$.

35. $6m^2-11mn-10n^2$.
36. $3p^2+5pq-12q^2$.
37. $8a^2-14ab-15b^2$.
38. $10m^2+11mn-6n^2$.
39. $12x^2+13xy-4y^2$.
40. $15a^2-11ab-12b^2$.
41. $2a^2-5ab+2b^2$.
42. $3a^2-8ab-3b^2$.
43. $3x^2+8xy-3y^2$.
44. $4a^2+15a-4$.
45. $4a^2-17ab+4b^2$.
46. $5x^2-24x-5$.
47. $5x^2-26xy+5y^2$.
48. $6x^2+37x+6$.
49. $6a^2+35ab-6b^2$.
50. $6a^2-35ab-6b^2$.
51. $7a^2-50ab+7b^2$.
52. $7a^2+48ab-7b^2$.
53. $7a^2-48ab-7b^2$.
54. $8x^2+63xy-8y^2$.
55. $9x^2-82xy+9y^2$.
56. $10x^2+99xy-10y^2$.
57. $2(a+b)^2+3(a+b)-2$.
58. $2(x^2+y^2)^2-3xy(x^2+y^2)-2x^2y^2$.
59. $2(a^2+b^2)^2+5ab(a^2+b^2)+2a^2b^2$.
60. $4(x^2-4xy+y^2)^2+15xy(x^2-4xy+y^2)-4x^2y^2$.
61. $2x^4-5x^2-12$.
62. $8a^4-14a^2b^2-9b^4$.
63. $9a^4+2a^2b^2-32b^4$.
64. $8x^6-65x^3+8$.
65. $4a^8-17a^4b^4+4b^8$.

तेरहवाँ अध्याय

सरल तादात्म्य (Easy Identities)

98. तादात्म्य किसे कहते हैं यह 62 वें नियम में बतलाया गया है। वास्तव में बराबरी के चिह्नवाली दो राशियों की बराबरी यदि उन दो राशियों के अन्दर के अक्षर अथवा अक्षरों के हर एक मूल्य के लिए एक-सी रहे तो इस अवस्था को तादात्म्य कहते हैं; और दोनों राशियों में से प्रत्येक को तादात्म्य के पक्ष (side अथवा member) कहते हैं।

$5x=2x+3x$ यह एक तादात्म्य है; कारण $5x$ और $2x+3x$ यह दो राशियाँ x के हर एक मूल्य के लिए एक दूसरी के बराबर हैं। $5x$ और $2x+3x$ इन दो राशियों को तादात्म्य के पक्ष कहते हैं; $5x$ को बायाँ पक्ष (left hand member) और $2x+3x$ को दायाँ पक्ष (right hand member) कहते हैं।

इसी प्रकार $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ यह एक तादात्म्य है; कारण a और b के हर मूल्य के लिए यह बराबरी एक-सी रहती है। वास्तव में चौथे अध्याय में बतलाया हुआ हरएक सूत्र (formula) एक तादात्म्य है।

99. तादात्म्य के दो पक्षों की राशियों की बराबरी सिद्ध करके दिखलाने को ही तादात्म्य को प्रतिष्ठित (establish) या हल करना कहते हैं।

तादात्म्य को प्रतिष्ठित करने के लिए उसके दोनों पक्षों को सरल करके प्रमाणित करना पड़ता है, कि वह एक दूसरे के बराबर हैं। ग्यारहवें अध्याय में बतलाये हुए सूत्रों की सहायता से दोनों पक्षों में से किसी पक्ष को सरल बनाकर और जैसा उचित हो उसका रूप बदलकर (simplification and transformation) दूसरे पक्ष को प्राप्त करना तादात्म्य को प्रतिष्ठित करने की सबसे अच्छी रीति है।

कभी कभी तादात्म्य के दो पक्षों के पदों में से कुछ पदों के बदले एक अक्षर लिखकर तादात्म्य को सुभीतेके मुताबिक सरल बनाया जा सकता है। जब आवश्यक हो इसी भाँति बदलाव कर लेना चाहिए।

निम्नलिखित उदाहरणों से ऐसे प्रश्नों को हल करने की रीति मालूम होगी।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि $(a+3b)^2+(a-3b)^2 = 2a^2+18b^2$.

बायाँ पक्ष $= (a^2+6ab+9b^2)+(a^2-6ab+9b^2)$ [नियम 54 व 55]

$= 2a^2+18b^2$.

उदाहरण 2. सिद्ध करो :

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \tfrac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2].$$

बायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca]$

$= \frac{1}{2}[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)-2ab-2bc-2ca]$

$= \frac{1}{2}[(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)+(a^2-2ab+b^2)]$

$= \frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]$. [नियम 55]

उदाहरण 3. सिद्ध करो :

$$(x+5y-3z)^3+(x-5y+3z)^3+6x(x+5y-3z)(x-5y+3z) = 8x^3$$

मान लो कि $a = x+5y-3z$ और $b = x-5y+3z$

बायाँ पक्ष $= a^3+b^3+6x.ab$

$= a^3+b^3+3ab(a+b)$

[चूँकि $a+b = (x+5y-3z)+(x-5y+3z) = 2x$]

$= (a+b)^3$ [नियम 57]

$= (2x)^3 = 8x^3$.

उदाहरण 4. सिद्ध करो : $(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)=0.$

बायाँ पक्ष $=(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)$ [नियम 56]

$=b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2$

$=0.$

उदाहरण 5. यदि $s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$ [कलकत्ता, 1902.]

$as+bc=a(a+b+c)+bc$

$=a^2+a(b+c)+bc=a^2+ab+ac+bc$

$=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c).$ [नियम 61]

इस प्रकार $bs+ca=b(a+b+c)+ca=b^2+b(a+c)+ac$

$=b^2+ab+bc+ac=(b+c)(b+a)$;

और $cs+ab=c(a+b+c)+ab=c^2+c(a+b)+ab$

$=c^2+ca+cb+ab=(c+a)(c+b).$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)$

$=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$

उदाहरण 6. सिद्ध करो कि $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=s(s-2a)(s-2b)(s-2c)$ यदि $s=a+b+c$ हो।

बायाँ पक्ष $=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$

$=\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{c^2-(a^2+b^2-2ab)\}$

$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

$=(\overline{a+b}+c)(\overline{a+b}-c)(c+\overline{a-b})(c-\overline{a-b})$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

$=(a+b+c)(\overline{a+b+c}-2c)(\overline{c+a+b}-2b)$
$\times(\overline{b+c+a}-2a)$

$=s(s-2c)(s-2b)(s-2a)$

$=s(s-2a)(s-2b)(s-2c).$

उदाहरण 7. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3.$

अब $c=2s-(a+b)=(s-a)+(s-b).$

इसलिए $(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c$

$$=(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)\{(s-a)+(s-b)\}$$
$$=\{(s-a)+(s-b)\}^3=c^3.$$

उदाहरण 8. सिद्ध करो कि $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

मान लो कि $\left.\begin{array}{l} a=x-y \\ b=y-z \\ c=z-x \end{array}\right\}$ इससे पाया जाता है कि $a+b+c=0.$

इसलिए $\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$$-\{2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y)\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)-\{2a(-c)+2b(-a)+2c(-b)\}$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ac+2ab+2bc=(a+b+c)^2=0\ ;$$

$\therefore$ $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

उदाहरण 9. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो दिखाओ कि

$$2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)=2s^2-a^2-b^2-c^2.$$

चूँकि $2x+2y+2z=(x+y)+(y+z)+(z+x)$;

इसलिए $2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)$

$$=\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)\}+\{(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}$$
$$+\{(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)\}.$$

अब $(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)=(s-b)\{(s-a)+(s-c)\}$

$$=(s-b)\{2s-a-c\}=(s-b)b.$$

इस प्रकार $(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=(s-c)c,$

और $(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)=(s-a)a.$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=(s-b)b+(s-c)c+(s-a)a=s(b+c+a)-b^2-c^2-a^2$

$$=2s^2-a^2-b^2-c^2.$$

उदाहरण 10. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^3+b^3+c^3=3abc.$

चूँकि $a+b+c=0,\ c=-(a+b).$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3$

$$=a^3+b^3-\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}$$ [नियम 57]

$$=-3ab(a+b)=3ab\{-(a+b)\}=3abc.$$

टीका। स्पष्ट सूचित होता है, कि यदि $a+b+c=0$ हो तभी $a^3+b^3+c^3=3abc$ तादात्म्य प्रतिष्ठित होता है। जो तादात्म्य उनमें आये हुए अक्षरों के किसी खास मूल्य या मूल्यों के लिए सच हों उनको **कल्पित तादात्म्य** (conditional identities) कहते हैं।

उदाहरण 11. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2. \quad [\text{इलाहाबाद, 1923.}]$$

पहली रीति : चूँकि $a+b+c=0$, इसलिए पक्ष बदलने से,

$$a=-(b+c),\quad b=-(c+a),\quad c=-(a+b);$$

$$\therefore\quad a^2+ab+b^2=\{-(b+c)\}^2+\{-(b+c)\}b+b^2, \quad [\text{चूँकि } a=-(b+c)]$$

$$=(b+c)^2-(b+c)b+b^2$$

$$=b^2+2bc+c^2-b^2-bc+b^2$$

$$=b^2+bc+c^2.$$

और $$a^2+ab+b^2=a^2+a\{-(c+a)\}+\{-(c+a)\}^2, \quad [\text{चूँकि } b=-(c+a)]$$

$$=a^2-a(c+a)+(c+a)^2$$

$$=a^2-ca-a^2+c^2+2ca+a^2$$

$$=c^2+ca+a^2.$$

इसलिए $$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$$

दूसरी रीति :

$$a^2+ab+b^2=a(a+b)+b^2=\{-(b+c)\}(-c)+b^2$$

$$=(b+c)c+b^2=bc+c^2+b^2=b^2+bc+c^2.$$

और $$b^2+bc+c^2=b(b+c)+c^2=\{-(c+a)\}(-a)+c^2$$

$$=(c+a)a+c^2=ca+a^2+c^2=c^2+ca+a^2.$$

$$\therefore\quad a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$$

उदाहरण 12. यदि $x=b-c+a$, $y=c-a+b$ और $z=a-b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि $(b-a)x+(c-b)y+(a-c)z=0$.

अब $$(b-a)x=(b-a)(b-c+a)=(b-a)\{(b+a)-c\}$$

$$=(b-a)(b+a)-(b-a)c=b^2-a^2-bc+ac; \quad [\text{नियम } 56]$$

$$(c-b)y=(c-b)(c-a+b)=(c-b)\{(c+b)-a\}$$

$$=(c-b)(c+b)-(c-b)a=c^2-b^2-ca+ab;$$

$$(a-c)z=(a-c)(a-b+c)=(a-c)\{(a+c)-b\}$$

$$=(a-c)(a+c)-(a-c)b=a^2-c^2-ab+bc;$$

$\therefore \quad (b-a)x+(c-b)y+(a-c)z$
$= b^2-a^2+c^2-b^2+a^2-c^2-bc+ac-ca+ab-ab+bc=0.$

उदाहरण 13. यदि $x=b+c$, $y=c+a$ और $z=a+b$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

बायाँ पक्ष $=\frac{1}{2}[2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy]$

$=\frac{1}{2}[(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)]$ [पदों को सजाकर]

$=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$ [नियम 55]

$=\frac{1}{2}[\{(b+c)-(c+a)\}^2+\{(c+a)-(a+b)\}^2+\{(a+b)-(b+c)^2]$ [x, y, z के मूल्य रखने पर]

$=\frac{1}{2}[(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2]$

$=\frac{1}{2}[(b^2-2ba+a^2)+(c^2-2cb+b^2)+(a^2-2ac+c^2)]$ [नियम 55.]

$=\frac{1}{2}[(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)]$ [सरल करने पर]

$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

उदाहरण 14. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2.$ [इलाहाबाद, 1926.]

बाँया पक्ष $=(s^2-2as+a^2)+(s^2-2bs+b^2)+(s^2-2cs+c^2)+s^2$

$=4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$

$=4s^2-2s\times 2s+a^2+b^2+c^2$

$=4s^2-4s^2+a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$

प्रश्नमाला 50

सिद्ध करो :

1. $(a^2+ax-x^2)(a^2-ax+x^2)=a^4-a^2x^2+2ax^3-x^4.$
2. $(a^2-ax+x^2)(ax-a^2+x^2)=x^4-a^2x^2+2a^3x-a^4.$
3. $(a+b+c)(a-b-c)+(b+c-a)(a-b+c)=2b(a-b-c).$
4. $2(x^3-x)+3x(x+1)=x(x+1)(2x+1).$
5. $x^4+x+x(x+1)(2x+1)-2x(x+1)=x^2(x+1)^2.$
6. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$
7. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a+b+c+d)(a-d).$
8. $(a+b+c-d)(d-a-b+c)=c^2-(a+b-d)^2.$

9. $(b+c)^2-a^2$ और $a^2-b^2-c^2+2bc$ का गुणनफल $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$ है।

10. $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(a+c-b)^2-(b+c-a)^2=8ac.$

सिद्ध करो :

11. $(a^2+b^2+c^2)^2-(b^2+c^2-a^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2+(a^2+b^2-c^2)^2=8a^2b^2.$

12. $(b-c+d+a)(d+a-b+c)+(c-d+a+b)(b+c+d-a)=4(ad+bc).$

13. $(b+c+a-d)(b+c-a+d)=2(ad+bc)-(a^2-b^2-c^2+d^2).$

14. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d).$

15. $(x-y+z)^2+(y-z+x)^2+(z-x+y)^2+2(x-y+z)(y-z+x)+2(y-z+x)(z-x+y)+2(z-x+y)(x-y+z)=(x+y+z)^2.$

16. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(ay-bx)^2+(cx-az)^2+(bz-cy)^2.$

17. $(a+c)^3-(b+c)^3-3(a+c)(b+c)(a-b)=(a-b)^3.$

18. $(x-ay+bz)^3+(x+ay-bz)^3+6x(x-ay+bz)(x+ay-bz)=8x^3$

19. $4(a+b+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+2(a+b)(b+c)+2(b+c)(c+a)+2(c+a)(a+b).$

20. $8(a+b+c)^3=(a+b)^3+(b+2c+a)^3+6(a+b)(b+2c+a)(a+b+c).$

21. $27(a+b+c)^3=(a+3b+2c)^3+(2a+c)^3+9(a+3b+2c)(2a+c)(a+b+c).$

22. यदि $s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो :
$$(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2=3\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

23. यदि $ab+bc+ca=0$ हो, तो सिद्ध करो :
(i) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$;
(ii) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=-2abc(a+b+c).$

24. यदि $2s=x+y+z$ हो, तो सिद्ध करो :
$$4y^2z^2-(y^2+z^2-x^2)^2=16s(s-x)(s-y)(s-z).$$

25. सिद्ध करो कि
$$(x+2y+19z)^3+(x-2y-19z)^3+6x(x+2y+19z)(x-2y-19z)$$
$$=(5x+6y-z)^3+(z-6y-3x)^3+6x(5x+6y-z)(z-6y-3x).$$

26. सिद्ध करो कि

$$(a+2b+3c)^2+(a-b-3c)^2+2(a+2b+3c)(a-b-3c)$$
$$=(3a+y+z)^2+(a+y+z-b)^2-2(3a+y+z)(a+y+z-b).$$

27. सिद्ध करो कि $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$

28. सिद्ध करो कि $(x-y)^2-(y-z)(z-x)$
$$=(y-z)^2-(z-x)(x-y)$$
$$=(z-x)^2-(x-y)(y-z)$$
$$=-\{(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)\}.$$

29. सिद्ध करो कि $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=2(b-c)(c-a),$
$$(b-c)^2-(c-a)^2-(a-b)^2=2(c-a)(a-b),$$
$$(c-a)^2-(a-b)^2-(b-c)^2=2(a-b)(b-c).$$

30. सिद्ध करो कि $(a-b)^2+(a-b)(b-c)+(b-c)^2$
$$=(b-c)^2+(b-c)(c-a)+(c-a)^2$$
$$=(c-a)^2+(c-a)(a-b)+(a-b)^2.$$

विविध प्रश्नमाला III

I

1. नीचे के व्यंजक को (i) y के घातों के अवरोहक्रम से, (ii) z के घातों के आरोहक्रम से लिखो :

$$x^3z+xy^3-x^3y-xy^2z-xz^3+xyz^2-2yz^3-2y^3z.$$

2. यदि $x=-\frac{1}{2}$ और $y=2$ हो, तो

$\frac{4y}{5}(y-x)-35\left[\frac{3x-4y}{5}-\frac{1}{10}\left\{3x-\frac{5}{7}\left(7x-4y\right)\right\}\right]$ का मूल्य निकालो।

3. यदि $x-\frac{1}{x}=p$, तो सिद्ध करो कि $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p.$

4. x^5-y^5 को $x-y$ से भाग करने पर भजनफल कितना होगा ?

5. $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2-(b+c-a)^2$ को हल करो और यदि $a=b=c=-4$ हो, तो उसका मूल्य निकालो।

6. $x^2-(x-y+z)(x+y-z)$, $y^2-(y-x+z)(y+x-z)$ और $z^2-(z-x-y)(z+x-y)$ का योगफल निकालो।

7. $(a-b+c+d)(a+b+c-d)$ को A^2-B^2 के रूप में प्रकट करो।

8. $4x^2+12xy+9y^2-8x-12y$ के गुणनखंड निकालो।

II

1. ऐसा व्यंजक निकालो जो $ax^3+bx^2y+3cxy^2+dy^3$ से जितना बड़ा है $2ax^3+\frac{1}{4}(3a-b)x^2y+\frac{3}{4}(3a-c)xy^2+5dy^3$ के चौगुने से उतना ही छोटा है।

2. नीचे दिये हुए व्यंजकों के योगफल का सरल गुणनखंड निकालो :

$(b-1)m^4+am^3+(c-b)m^2-bm-2,\ am^3-(c-a)m^2+(a+b)m+1$ और $(a-b+1)m^4-(2a-b)m^3+(a+b)m^2-(a-2b)m+1.$

3. $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1$ को $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1$ से गुणा करो।

4. प्रमाण करो कि $\{(ac+bd)x+(ad-bc)y\}^2+\{(ac+bd)y-(ad-bc)x\}^2$
$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(x^2+y^2).$$

5. $x-a,\ x-b$ और $x-c$ का लगातार गुणनफल निकालो; और इससे सिद्ध करो कि $(x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27.$

6. $x^5-px^4+qx^3-qx^2+px-1$ में $x-1$ का भाग दो।

7. $a^6+a^5b-a^3b^3+ab^5+b^6$ और a^2-ab+b^2 को गुणा करो और गुणनफल को $a^4-a^2b^2+b^4$ द्वारा भाग करो, और दिखाओ कि यह $(a^2+b^2)^2$ से a^2b^2 छोटा है।

8. गुणनखंड निकालो :

(i) $ab-ac-b^2+bc$; (ii) $b^2-12ac-4a^2-9c^2.$

III

1. $(\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a})x^3+(\sqrt{bc}-\sqrt{ca}+\sqrt{ab})x^2+(\sqrt{abc}-2m+n)x+3u$, $(\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{b})x^3+(\sqrt{ca}-\sqrt{ab}+\sqrt{bc})x^2+(\sqrt{abc}-2n+m)x+2(v-u)$ और $(p-2\sqrt{b})x^3+(q-2\sqrt{bc})x^2+(m+n+r-2\sqrt{abc})x+(s-u-2v)$ का योगफल निकालो।

2. $a(a^2+b^2)$ से $3a^3-5a^2b+2b^3,\ 8a^2b-3b^3+2ab^2,\ 5ab^2-4a^3-3a^2b$ और $2a^3-6ab^2+4b^3$ का योगफल घटाओ।

3. यदि $a+b=8$ और $ab=5$ हो, तो a^3+b^3 का मूल्य निकालो।

4. यदि $a=89,\ b=-69,\ c=8$ हो, तो $49c^2+9(a+b)^2-42(a+b)c$ का मूल्य निकालो।

5. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ को y^2-xz-z^2+xy द्वारा भाग करो।

6. $4a-3+16a^2+64a^3$ को $(A-B)+(A^2-B^2)+(A^3-B^3)$ के रूप में प्रकट करके उसका गुणनखंड निकालो।

7. सिद्ध करो कि $(1+x+x^2)^2-(1-x+x^2)^2=4x(1+x^2)$.

8. यदि $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n}{2}s$ हो, तो सिद्ध करो कि $(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+(s-a_3)^2+\cdots+(s-a_n)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_n{}^2$.

IV

1. $p=-m$ और $q=l$ मान कर $(l^2r-3lmn+2m^3)p^3+3(lmr+m^2n-2ln^2)p^2q+3(2m^2r-lnr-mn^2)pq^2+(3mnr-lr^2-2n^3)q^3$ को सरल करो।

2. $\frac{1}{3}a^3x^4+5{\cdot}7a^2bx^3-3{\cdot}257ab^2x^2+\frac{5}{3}b^3x+9$ में से कितना घटाया जाय कि शेष $4{\cdot}7a^2bx^3-{\cdot}007ab^2x^2+2\frac{2}{3}b^3x-5\frac{2}{3}a^3x^4+6$, $5\frac{1}{3}b^3x-3\frac{1}{3}a^2bx^3+a^3x^4-{\cdot}05ab^2x^2+11$ और $2a^3x^4-1\frac{2}{3}a^2bx^3-6{\cdot}2ab^2x^2-10\frac{1}{3}b^3x-20$ के योगफल के समान हो ?

3. $a^{\frac{5}{2}}-2a^2b^{\frac{1}{3}}+4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-8ab+16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-32b^{\frac{5}{3}}$ को $a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{3}}$ से गुणा करो।

4. नीचे दिये हुए व्यंजकों को a के घातों के अवरोहक्रम से लिखो :

(i) $a^3+b^3+c^3-3abc$; (ii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$;
(iii) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

5. $x+a$, $x+b$ और $x+c$ को लगातार गुणा करो। इसकी सहायता से $(x-7)(x+8)(x-12)$ में x^2 और x के गुणक निकालो।

6. सिद्ध करो कि $(ab+cd+ac+bd)(ab+cd-ac-bd)$

$$=a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2.$$

7. यदि $a=q+r+s$, $b=r+s-p$ और $c=p+q+r$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc=r^2$.

8. $a^3+8b^3+27c^3-18abc$ का $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ से भाग करो।

V

1. यदि $a=46$ और $b=-37$ हो, तो $49a^2+126ab+81b^2$ का मूल्य निकालो।

2. ऐसा व्यंजक निकालो जो $bx^4y - dx^2y^3 - fy^5$ से जितना छोटा है $ax^5 - cx^3y^2 + exy^4$ से ठीक उतना ही बड़ा है।

3. यदि $2s = a + b + b$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

4. सरल करो $(5a - 7c)^3 + (8c - 3a)^3 + 3(2a + c)(5a - 7c)(8c - 3a)$.

5. सरल करो $(2x^3 - x^2 + 3x - 4)(2x^3 + x^2 + 3x + 4) +$
$$(2x^3 + x^2 - 3x + 4) \times (2x^3 + x^2 + 3x - 4).$$

6. सिद्ध करो कि $\dfrac{x^3 + x^4 + 1}{x + \sqrt{x} + 1} = (x - \sqrt{x} + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$

7. $a - b$ को $a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$ से भाग करो।

8. गुणनखंड निकालो :

(i) $6a^4x^2 + a^3x - 6a^3x^3 - a^2x^2$; (ii) $xy(1 + z^2) + z(x^2 + y^2)$.

VI

1. $8765943 \times 8765943 - 8765938 \times 8765938$ का मूल्य निकालो।

2. $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$ का मूल्य निकालो, जब कि $a = 29$ व $b = -23$ है।

3. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ को $a + b + c$ से भाग करो ; इसकी सहायता से सिद्ध करो कि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$.

4. $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 + (bx - a)^2 + (dx - c)^2$ को $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ द्वारा भाग करने से भजनफल क्या होगा ?

5. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 34$ का दो वर्गों के योगफल के रूप में प्रकट करो। इसके द्वारा यह सिद्ध करो कि दिया हुआ व्यंजक हर हालत में धनात्मक है और यदि $x^2 - 7x + 9 = 0$ हो तो उसका मूल्य 25 होगा।

6. $(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 - 4(ad - bc)^2$ के चार गुणनखंड निकालो।

7. गुणनखंड निकालो : (i) $a^2 - 2ab + b^2 + 2a - 2b$;

(ii) $6a^2 - ab - b^2 + 6a - 3b$; (iii) $15x^2 - 4xy - 4y^2 + 10x + 4y$.

8. $(2x - y)^2a^4 - (x + y)^2a^2x^2 + 2(x + y)ax^4 - x^6$ को
$(2x - y)a^2 - (x + y)ax + x^3$ से भाग करो।

VII

1. यदि $x + y + z = 8$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ हो, तो $xy + yz + zx$ का मूल्य निकालो।

2. सिद्ध करो कि $(2a-3b)^2+(3b-5c)^2+(5c-2a)^2$
$=2(2a-3b)(2a-5c)+2(3b-5c)(3b-2a)+2(5c-2a)(5c-3b).$

3. गुणा करो : $x+y+z-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ और $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}.$

4. $a^2(x^2-a^2)-ab(x+a)^2+b(x^3+a^3)$ को $a^2(x-a)+bx(x-2a)$ से भाग करो।

5. सिद्ध करो कि
$(16x^5-20x^3+5x)^2+(1-x^2)\{16(1-x^2)^2-20(1-x^2)+5\}^2=1.$

6. $x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z$ और $z-x+y$ को लगातार गुणा करो।

7. गुणनखंड निकालो : (i) $6x^2+x-15$;
(ii) $35(x-y)^2-41(x-y)+12$; (iii) $11x^2-54xy^2+63y^4.$

8. यदि $x+y+z=0$ हो, तो सिद्ध करो : $(x+y)(y+z)(z+x)=-xyz$ और $x^3+y^3+z^3=3xyz.$

VIII

1. x^2 वाले पद तक लिखकर $1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2$ और $1+bx+\frac{b(b-1)}{2}x^2$ का गुणनफल लिखो।

2. यदि $x+y+z=15$ और $xy+yz+zx=85$ हो, तो $x^2+y^2+z^2$ का मूल्य निकालो।

3. यदि $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(ad-bc)(ad+bc)=(a-c)(a+c).$$

4. $(ax+by)^3+(ax-by)^3+(bx-ay)^3+(bx+ay)^3$ को $(a+b)^2x^3-3ab(x^2-y^2)$ से भाग करो।

5. मूल्य निकालो : $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ और $x^4+\frac{1}{x^4}$ का, यदि $x+\frac{1}{x}=a$ हो।

6. यदि $bx=ay$ हो, तो सिद्ध करो कि $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2.$
[बम्बई एन्ट्रेंस, 1910.]

7. सिद्ध करो कि $(x^2+y^2)(x^2+z^2)+2x(x^2+yz)(y+z)+4x^2yz$
$=(x^2+xy+xz+yz)^2.$

8. $x^4-11x^2y^2+y^4$ का गुणनखंड निकालो। [बम्बई, 1897.]

IX

1. a^2+ax+x^2 का a^2-ax+x^2 से गुणा करो।

2. सिद्ध करो कि $(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2-2ab+b^2+c^2)$
$$=(a^2-b^2)^2+(4ab-c^2)c^2.$$

3. यदि $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1.$$

4. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^3$ का विस्तार:(expansion) लिखा। [याने $x+\frac{2}{x}$ का घन (cube) निकालकर जो राशि निकलती है, वह लिखो।]

5. सिद्ध करो कि $(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)=a^4+b^4$.

6. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ को
$ab+bc+ca$ से भाग करो।

7. सिद्ध करो कि $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

8. समीकरण हल करो : $(7+x)(8-x)-\frac{7x}{3}=17x+1-x^2$.

X

1. यदि $x+\frac{1}{x}=2(a+m)$, $x-\frac{1}{x}=2b$, $y+\frac{1}{y}=2(c+n)$ और $y-\frac{1}{y}=2d$ हो, तो $xy+\frac{1}{xy}$ का मूल्य निकालो।

2. सरल करो : $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^4-2\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)^2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^4$.

3. सिद्ध करो कि $(1+a)^2(1+c^2)-(1+c)^2(1+a^2)=2(a-c)(1-ac)$.

4. सिद्ध करो कि $(b^2-c^2)(b+c-2a)^2+(c^2-a^2)(c+a-2b)^2$
$+(a^2-b^2)(a+b-2c)^2=0$, यदि $a+b+c=0$ हो।

5. $a+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ को $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{4}}$ से गुणा करो।

6. $15x^2-41x+14$ के गुणनखंड निकालो।

7. x का मूल्य इस समीकरण $\frac{x-1}{4}-\frac{2(x+1)}{9}+\frac{5(x-5)}{12}-4=\frac{x+1}{18}$ से निकालो।

8. A और B दोनों की आमदनी समान है। A अपनी आमदनी में से पांचवां हिस्सा बचाता है। किन्तु B साल में A से £80 अधिक खर्च करके चार साल के बाद £220 का क़र्ज़दार हो जाता है। उनकी आमदनी निकालो।

चौदहवाँ अध्याय

महत्तम समापवर्तक (म० स०) (Highest Common Factors)

(गुणनखंडीकरण द्वारा)

100 परिभाषा : यदि दो अथवा दो से अधिक बीजीय व्यंजक किसी दूसरे बीजीय व्यंजक द्वारा पूर्णतया विभाजित हों, तो इस दूसरे व्यंजक को दो अथवा दो से अधिक व्यंजकों का साधारण गुणनखंड (common factor) कहते हैं।

ध्यान में रक्खे। यहाँ व्यंजक द्वारा अकरणीगत व अनुकलश्र (rational and integral) व्यंजक सूचित होगा (नियम 91 को टीका देखो)।

जिन गुणनखंडों के कोई गुणनखंड निकाले नहीं जा सकते उनको मूल (elementary) गुणनखंड कहते हैं।

दो अथवा दो से अधिक बीजीय व्यंजकों में जितने मूल गुणनखंड साधारण (common) हों उन सबके गुणनफल के दो अथवा दो से अधिक व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) कहते हैं; अर्थात् दो या दो से अधिक व्यंजकों के अधिक से अधिक साधारण मूल गुणनखंडों का गुणनफल ही उन दो अथवा दो से अधिक व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक है। जैसे,

चूँकि $6a^2b(x^2-1)=2\times3\times a\times a\times b\times(x+1)\times(x-1)$

और $15ab^2(x^2-3x+2)=3\times5\times a\times b\times b\times(x-1)\times(x-2)$

इसलिए, 3, a, b और $x-1$ दिये हुए दो व्यंजकों में साधारण मूल गुणनखंड हैं।

$\therefore$ दिये हुए व्यंजकों का म० स० $=3ab(x-1)$.

टीका 1. दिये हुए दो व्यंजकों में निम्नलिखित गुणनखंड भी साधारण हैं; जैसे $3a$, $b(x-1)$, ab, $3(x-1)$, $3ab$ आदि। किन्तु इनमें से कोई भी संख्या मूल गुणनखंड द्वारा बनी नहीं है, और न कोई मूल गुणनखंड ही है।

टीका 2. स्पष्ट सूचित होता है कि यदि दिये हुए व्यंजकों में कोई अंक (numerical quantity) साधारण गुणनखंड के रूप में वर्तमान न हो, तो उनके महत्तम समापवर्तक का घात (degree) दूसरे किसी साधारण गुणनखंड के घात से अधिक होगा। इसलिए जिन व्यंजकों के

अन्दर कोई अंक साधारण गुणनखंड के रूप में वर्तमान नहीं है उनके महत्तम समापवर्तक को उन व्यंजकों का "सर्वोच्चघातवाला भाजक व्यंजक" (divisor of the highest degree) कहा जा सकता है।

टीका 3. यदि कोई एक व्यंजक B, दूसरे एक व्यंजक A द्वारा पूर्णतया विभाजित हो, तो स्पष्ट सूचित होता है कि A ही A व B दो व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक है।

टीका 4. यदि कोई व्यंजक H अन्य कई व्यंजकों A, B, C का महत्तम समापवर्तक हो, तो $\frac{A}{H}, \frac{B}{H}, \frac{C}{H}$ इत्यादि व्यंजकों का (अर्थात् A, B, C इत्यादि को H द्वारा भाग करके जो व्यंजक भजनफल के रूप में प्राप्त होते हैं उन व्यंजकों का) कोई साधारण गुणनखंड नहीं हो सकता।

टीका 5. दो अथवा दो से अधिक व्यंजकों में से प्रत्येक में किसी मूल गुणनखंड का जो सर्वोच्च घात सब व्यंजकों में साधारण है उस गुणनखंड का वही (सर्वोच्च) घात उन दिये हुए व्यंजकों के महत्तम समापवर्तक में भी गुणनखंड के रूप में वर्तमान होना चाहिए।

टीका 6. यदि $A = p \times q$ और $B = p' \times q'$ हो, और q और q' को कोई साधारण गुणनखंड न हो, तो A व B का महत्तम समापवर्तक और p व p' का महत्तम समापवर्तक दोनों एक होंगे।

टीका 7. यदि $A = m \times n$ व $B = m' \times n'$ हो और A व B के सभी एकपदी गुणनखंड क्रम से m व m' में वर्तमान हों तो A व B का महत्तम समापवर्तक = (m व m' का महत्तम समापवर्तक) × (n व n' का महत्तम समापवर्तक)।

टीका 8. यदि m, A का कोई साधारण गुणनखंड न हो, तो A व B का महत्तम समापवर्तक और A व mB का महत्तम समापवर्तक दोनों एक होंगे।

101. सरल व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक निकालना : एकपदी व्यंजकों के मूल गुणनखंड तुरंत निकाले जा सकते हैं; इसलिए उनका महत्तम समापवर्तक निकालना बहुत आसान है।

उदाहरण 1. $a^2b^4c^5$, $a^4b^3c^7$ और $a^3b^5c^4$ का महत्तम समापवर्तक निकालो।

यहां इन तीनों राशियों के मूल गुणनखंड a, b, c हैं; और a, b, c के जो जो उच्चतम घात इन तीन राशियों में सम्मिलित हैं, वे क्रम से a^2, b^3 व c^4 हैं।

$\therefore$ महत्तम समापवर्तक $= a^2b^3c^4$.

उदाहरण 2. $24ab^2x^3y^4$, $36a^2x^4z^5$ और $240b^3x^6y^2z$ का महत्तम समापवर्तक निकालो।

$$\text{अब, } 24ab^2x^3y^4 = 3 \times 2^3 \times ab^2x^3y^4;$$
$$36a^2x^4z^5 = 2^2 \times 3^2 \times a^2x^4z^5;$$
$$240b^3x^6y^2z = 3 \times 5 \times 2^4 \times b^3x^6y^2z.$$

स्पष्ट सूचित होता है कि 3, 2 व x ये मूल गुणनखंड तीनों में साधारण हैं, और मूल उत्पादकों के जो जो सर्वोच्च घात सब राशियों में साधारण हैं वे क्रम से 3, 2^2 व x^3 हैं।

$$\text{इसलिए इनका महत्तम समापवर्तक} = 3 \times 2^2 \times x^3 = 12x^3.$$

टीका। राशियों में से प्रत्येक को उनके भिन्न भिन्न मूल गुणनखंडों के घातों के गुणनफल के रूप में प्रकट करने के बाद, यदि पहली राशि के वे सब मूल गुणनखंड जो कि दूसरी राशियों में भी वर्तमान हैं लिखे जायं, तो राशियों के सब साधारण मूल गुणनखंड प्राप्त होते हैं। जैसे उपर दिये हुए उदाहरण में पहली राशि के मूल गुणनखंड 3, 2, a, b, x और y हैं और इनमें से 3, 2 और x ही अन्य दो राशियों में वर्तमान हैं।

प्रश्नमाला 51

महत्तम समापवर्तक निकालो :

1. a^2b^3 व a^3b^2. का।
2. $12a^3b$ व $20a^2c^3$ का।
3. $9xy^2z^3$ व $24x^3y^4$ का।
4. $20a^3x^4y^5$ व $75a^2y^3$ का।
5. $18m^2n^4$ व $45m^5n^3$ का।
6. $16a^3x^4y$, $40a^2y^3x$ व $28x^3a$ का।
7. $24m^2np^5$, $60mn^2p$ व $84m^3p^2$ का।
8. $45x^3y^2z^4$, $75x^2y^4z^3$ व $90x^4y^3z^2$ का।
9. $36a^2b^2c^4x^5$, $54a^5c^2x^4$ व $90a^4b^3c^5$ का।
10. $72a^3b^4c^5$, $96b^3c^4d^5$ व $120c^3d^4a^5$ का।
11. $48a^5x^4y^3z^2$, $60x^5y^4z^3b^2$, $72y^5z^4b^3a^2$ व $84z^5b^4a^3x^2$ का।
12. $75m^4n^3p^5q^6$, $90m^3n^5p^6q^4$, $105m^6n^4p^3q^5$ व $135m^5n^6p^4q^3$ का।
13. $54a^2b^5c^3d^4$, $72a^5b^2c^4d^3$, $108a^3b^4c^5d^2$ व $126a^4b^3c^2d^5$ का।
14. $18a^3x^4y^5$, $42a^4y^3z^4$, $60x^3y^4z^5$ व $78a^2x^4z^3$ का।
15. $32a^2b^3x^4y^5z^6$, $40a^3x^5y^4z^3$, $56b^3x^2y^7z^4$, $72x^6a^5y^2z^3$ व $96b^4a^3x^3y^3$ का।

102. जिन सब मिश्र व्यंजकों के गुणनखंड आसानी से निकाले जा सकते हैं, उनका महत्तम समापवर्तक निकालना : ऊपर दी हुई रीति इसमें भी काम में लायी जा सकती है।

उदाहरण 1. $a^3b^2+2a^2b^3$ व $a^5b-4a^3b^3$ का महत्तम समापवर्तक निकालो।

$$a^3b^2+2a^2b^3=a^2b^2(a+2b);$$

और $a^5b-4a^3b^3=a^3b(a^2-4b^2)=a^3b(a+2b)(a-2b).$

इसलिए महत्तम समापवर्तक $=a^2b(a+2b).$

उदाहरण 2. $x^4y^2+xy^5$ व $x^4y+2x^3y^2+x^2y^3$ का महत्तम समापवर्तक निकालो।

$$x^4y^2+xy^5=xy^2(x^3+y^3)=xy^2(x+y)(x^2-xy+y^2);$$

और $x^4y+2x^3y^2+x^2y^3=x^2y(x^2+2xy+y^2)=x^2y(x+y)^2.$

इसलिए महत्तम समापवर्तक $=xy(x+y).$

उदाहरण 3. $24(x^4-2ax^3-8a^2x^2)$ व $54(x^5-ax^4-6a^2x^3)$ का महत्तम समापवर्तक निकालो।

पहला व्यंजक $=3\times8\times x^2(x^2-2ax-8a^2)=3\times2^3\times x^2(x+2a)(x-4a)$

दूसरा व्यंजक $=6\times9\times x^3(x^2-ax+6a^2)=2\times3^3\times x^3(x+2a)(x-3a).$

इसलिए महत्तम समापवर्तक $=3\times2\times x^2(x+2a)=6x^2(x+2a).$

उदाहरण 4. a^4-16x^4 व $a^3+a^2x-10ax^2+8x^3$ का महत्तम समापवर्तक निकालो।

पहला व्यंजक $=(a^2+4x^2)(a^2-4x^2)=(a^2+4x^2)(a+2x)(a-2x).$

दूसरा व्यंजक $=(a-2x)(a^2+3ax-4x^2)=(a-2x)(a-x)(a+4x).$

इसलिए महत्तम समापवर्तक $=a-2x.$

टीका। इस उदाहरण से देखा जाता है कि पहले व्यंजक का जितनी आसानी से गुणनखंड निकाला गया है, दूसरे व्यंजक का गुणनखंड निकालना उतना सरल न था, तथापि उसके गुणनखंड के बारे में अंदाज़ा लगाना कठिन नहीं है; क्योंकि यह समझने में कोई कठिनाई नहीं पड़ती कि पहले व दूसरे व्यंजक में कम से कम एक गुणनखंड साधारण होगा। इसलिए पहले व्यंजक के गुणनखंड निकालने के बाद, थोड़ा ध्यानपूर्वक देखने से मालूम हो जायगा कि दूसरे व्यंजक का एक गुणनखंड $a-2x$ होगा। इस से गुणनखंड निकालने का कार्य सरल हो जाता है।

प्रश्नमाला 52

निम्नलिखित व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक निकालो :

1. $a^3 - ab^2$ व $a^4 + 2a^3b + a^2b^2$ का।

2. $x^5y^3 - x^3y^5$ व $x^5y^4 + x^4y^5$ का।

3. $6(x^2 - 9)$ व $15(x^3 + 27)$ का।

4. $12(a^6 - a^2b^2c^2)$ व $20(a^4b^2c^2 + a^2b^3c^3)$ का।

5. $m^6n^3 - 2m^5n^4 + m^4n^5$ व $(m^2n - mn^2)^3$ का।

6. $4a^4x - 9a^2x^3$ व $4a^2x^2 + 6ax^3$ का।

7. $18a^4b^3 - 32a^2b^5$ व $18a^4b^2 + 24a^3b^3$ का।

8. $9x^4y^4 - 36x^2y^6$ व $24x^4y^2 - 48x^3y^3$ का।

9. $6a^3b^2 - 24ab^4$ व $4a^5b + 32a^2b^4$ का।

10. $48x^2a^2(x+a)^2(x^2a^2 - xa^3)$ व $64(x^5a^2 - x^2a^5)(x^3a + x^2a^2)$ का।

11. $24(x^3 - a^3)$ व $40(x^4 + x^2a^2 + a^4)$ का।

12. $56(x^6a^2 - x^2a^6)$ व $72(x^5a^3 + 3a^5x^3 + 2a^7x)$ का।

13. $30(a^2 + 4ab + 3b^2)$ व $42(a^2 + ab - 6b^2)$ का।

14. $28(x^3 - 3x^2 - 10x)$ व $52(x^4 - 8x^3 + 15x^2)$ का।

15. $x^4y + 3x^3y^2 - 18x^2y^3$ व $x^3y^2 + 10x^2y^3 + 24xy^4$ का।

16. $a^4x^3 - 4a^3x^4 - 12a^2x^5$ व $a^5x^2 + 8a^4x^3 + 12a^3x^4$ का।

17. $4x^3 + 12x^2 + 9x$ व $4x^2 - 2x - 12$ का।

18. $a^2 - ab - 2b^2$ व $a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$ का।

19. $x^2 + 3x - 10$ व $x^3 - x^2 - 14x + 24$ का।

20. $54(x^3 + 8a^3)$ व $90(x^3 + 7ax^2 + 16a^2x + 12a^3)$ का।

21. $(a^3 - b^3)(a+b)^2$, $a^4 - b^4$ व $3a^4 + 2a^3b - 5a^2b^2$ का।

22. $(2x-3)^2(x^2 + x - 2)$, $4x^2 - x - 18$ व $2x^2 - 23x - 54$ का।

23. $8(27a^5b + a^2b^4)$, $12(6a^4b^2 - 7a^3b^3 - 3a^2b^4)$ व $40(3a^3b^2 + 13a^2b^3 + 4ab^4)$ का।

24. $x^4 - 13x^2 + 36$, $3x^3 + 13x^2 + 8x - 12$ व $4x^3 + 17x^2 + 9x - 18$ का।

पन्द्रहवाँ अध्याय

लघुतम समापवर्त्य (ल० स०) (Lowest Common Multiple)

[गुणनखंडीकरण द्वारा (By factorisation)]

103. परिभाषा : यदि एक राशि दूसरी एक राशि द्वारा पूर्णतया विभाजित हो जाय तो पहली राशि को दूसरी राशि का **अपवर्त्य** (multiple) कहते हैं।

यदि कोई राशि दो या अधिक राशियों में से प्रत्येक के द्वारा पूर्णतया विभाजित हो जाय तो पहली राशि को उन दो या अधिक राशियों का **समापवर्त्य** (common multiple) कहते हैं। दो या अधिक राशियों के भिन्न भिन्न समापवर्त्य में से जिस जिस साधारण अपवर्त्य संख्या में सबसे कम मूल गुणनखंड (elementary factors) वर्तमान हों, उसको उन दो अथवा दो से अधिक राशियों का **लघुतम समापवर्त्य** (lowest common multiple) कहते हैं। अर्थात् दो या दो से अधिक राशियों के उस समापवर्त्य को लघुतम समापवर्त्य कहते हैं, जो उन कम से कम मूल गुणनखंडों का गुणनफल है जिसका रहना बहुत ज़रूरी है। अथवा लघुतम समापवर्त्य वह छोटी से छोटी संख्या है जिसमें दो या दो से अधिक संख्याओं का पूरा भाग जा सकता है। जैसे,

$ab, 2ab, a^2b, ab^2, a^2b^2 \ldots\ldots$ आदि में से प्रत्येक पद a व b का साधारण अपवर्त्य है, किन्तु इनमें से ab में ही सबसे कम मूल गुणनखंड वर्तमान हैं; इसलिए इसे a व b का लघुतम समापवर्त्य कहेंगे।

उपसिद्धान्त। दो या अधिक राशियों का कोई भी साधारण अपवर्त्य उनके लघुतम समापवर्त्य द्वारा पूरा विभाजित होता है।

104. सरल राशियों का अथवा उन बहुपद व्यंजकों का, जिनका गुणनखंड आसानी से निकाला जा सके, लघुतम समापवर्त्य निकालना : ध्यान से देखते ही दो या अधिक व्यंजकों का लघुतम समापवर्त्य निकाला जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा इसकी रीति स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 1. $4a^2bc$ और $6ab^2d$ का लघुतम समापवर्त्य निकालो।

पहला व्यंजक $= 2^2 \times a^2 \times b \times c.$

दूसरा व्यंजक $= 2 \times 3 \times a \times b^2 \times d.$

इसलिए $2^2 \times 3 \times a^2 \times b^2 \times c \times d$ अवश्य ही दोनों व्यंजकों के प्रत्येक साधारण अपवर्त्य का गुणनखंड होगा।

इसलिए लघुतम समापवर्त्य $= 2^2 \times 3 \times a^2 \times b^2 \times c \times d$
$= 12a^2b^2cd.$

उदाहरण 2. लघुतम समापवर्त्य निकालो : $24x^2yz$, $18xy^3z^2$ व $27x^4y^2z^2$ का।

पहला व्यंजक $= 2^3 \times 3 \times x^2 \times y \times z.$

दूसरा व्यंजक $= 2 \times 3^2 \times x \times y^3 \times z^2.$

तीसरा व्यंजक $= 3^3 \times x^4 \times y^2 \times z^2.$

इसलिए $2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^3 \times z^2$ अवश्य ही तीनों व्यंजकों के प्रत्येक साधारण अपवर्त्य का गुणनखंड होगा।

इसलिए लघुतम समापवर्त्य $= 2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^3 \times z^2$
$= 216x^4y^3z^2.$

उदाहरण 3. लघुतम समापवर्त्य निकालो : $4x^2(x+a)^2$, $6a^2x(x^2-a^2)$ व $9x^3(x^3-a^3)$ का।

पहला व्यंजक $= 2^2 \times x^2 \times (x+a)^2.$

दूसरा व्यंजक $= 2 \times 3 \times a^2 \times x \times (x+a)(x-a).$

तीसरा व्यंजक $= 3^2 \times x^3 \times (x-a)(x^2+ax+a^2).$

इसलिए $2^2 \times 3^2 \times a^2 \times x^3 \times (x+a)^2(x-a)(x^2+ax+a^2)$ अवश्य तीनों व्यंजकों के प्रत्येक साधारण अपवर्त्य का गुणनखंड होगा।

इसलिए लघुतम समापवर्त्य
$= 2^2 \times 3^2 \times a^2 \times x^3 \times (x+a)^2(x-a)(x^2+ax+a^2)$
$= 36a^2x^3(x+a)^2(x^3-a^3).$

उदाहरण 4. लघुतम समापवर्त्य निकालो : x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x व $x^4+x^3-6x^2$ का।

पहला व्यंजक $= (x-1)(x-2).$

दूसरा व्यंजक $= x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x+3).$

तीसरा व्यंजक $= x^2(x^2+x-6) = x^2(x-2)(x+3).$

इसलिए $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$ अवश्य ही तीनों व्यंजकों के प्रत्येक साधारण अपवर्त्य का गुणनखंड होगा।

इसलिए लघुतम समापवर्त्य $= x^2(x-1)(x-2)(x+3).$

उदाहरण 5. लघुतम समापवर्त्य निकालो : x^3-3x^2+3x-1, x^3-x^2-x+1 x^4-2x^3+2x-1 व $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ का।

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3.$$

$$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1).$$

$$x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-2x(x^2-1)$$
$$=(x^2-1)\{(x^2+1)-2x\}$$
$$=(x^2-1)(x-1)^2=(x-1)^3(x+1).$$

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)$$
$$=(x^2-2x+1)(x^2+1)=(x-1)^2(x^2+1).$$

इसलिए $(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$ अवश्य ही व्यंजकों के प्रत्येक साधारण अपवर्त्य का गुणनखंड होगा।

इसलिए लघुतम समापवर्त्य $=(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$.

प्रश्नमाला 53

लघुतम समापवर्त्य निकालो :

1. a^2b व ab^2 का।
2. a^3b^2 व a^2bc का।
3. $6x^2y^4$ व $10xy^2$ का।
4. $4m^2n^3$ व $14m^4n^2p$ का।
5. $8x^2y^3z$ व $12x^3y^2z^2$ का।
6. $4a^2bc$, $10ab^2c$ व $14abc^2$ का।
7. $8a^3b^2c$, $12ab^3c^2$ व $20a^2bc^3$ का।
8. $6x^4y$, $9x^2y^2z$, $12a^2xy^3$ व $15axz^2$ का।
9. a^3b-ab^3 व $a^3b^2+a^2b^3$ का।
10. $4(x-y)^2$, $6(x^2-y^2)$ व $8(x+y)^2$ का।
11. x^2-4x+3 व x^2-5x+6 का।
12. $a^3+2a^2x-3ax^2$ व $a^4+a^3x-6a^2x^2$ का।
13. $a^2(a^2-4)$ व $a^4+2a^3-8a^2$ का।
14. $4a^2x^2$, $2x(x^2-a^2)$ व $6a^3x(x^3+a^3)$ का।
15. $12(x^2+3x-10)$ व $16(x^2+4x-12)$ का।
16. $x^2+2x-15$, $x^2+9x+20$ व $x^2+4x-21$ का।

17. $12a^4 - 27a^2b^2$, $2a^2 + ab - 3b^2$ व $2a^2 - ab - 3b^2$ का।
18. $8a^3 + 27b^3$, $8a^3 - 27b^3$ व $16a^4 + 36a^2b^2 + 81b^4$ का।
19. $8x^4 - 50x^2y^2$, $12x^3 + 24x^2y - 15xy^2$ व $16x^2 - 48xy + 20y^2$ का।
20. $4x^2 - 12ax + 9a^2$, $6x^2 - 7ax - 3a^2$ व $6x^2 - 11ax + 3a^2$ का।
21. $2x^2 + 6x + 9$, $4x^3 - 12x^2 + 18x$ व $4x^4 + 81$ का।
22. $9a^2 - 6ax + x^2$, $6a^2 + 10ax - 4x^2$ व $9a^2 - 21ax + 6x^2$ का।
23. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ व $2x^2 + 5x - 3$ का।
24. $x^2 - 6xy + 8y^2$, $x^2 - 7xy + 12y^2$, $x^2 + 2xy - 15y^2$ व $x^2 + xy - 20y^2$ का।
25. $6x^2 - x - 1$, $3x^2 + 7x + 2$ व $2x^2 + 3x - 2$ का। [कलकत्ता, 1869.]
26. $1 + 4x + 4x^2 - 16x^4$ व $1 + 2x - 8x^3 - 16x^4$ का। [कलकत्ता, 1871.]
27. $9x^4 - 28x^2 + 3$, $27x^4 - 12x^2 + 1$, $27x^4 + 6x^2 - 1$ व $x^4 - 6x^2 + 9$ का। [कलकत्ता 1886.]

[अंतिम राशिके गुणनखंडों से पहली राशि का पता लग जाता है।]

सोलहवाँ अध्याय

सरल भिन्न (Easy Fractions)

105. परिभाषा : a व b का संख्या के हिसाब से चाहे कोई भी मूल्य हो, $\frac{a}{b}$ बीजीय भिन्न एक ऐसी राशि कही जाती है, जिसका यदि b द्वारा गुणन किया जाय तो गुणनफल a के बराबर होता है। अर्थात् $\frac{a}{b}$ को $a \div b$ के बराबर माना जाता है। इस भिन्न में a को अंश (numerator) और b को हर (denominator) कहते हैं।

टीका। किसी राशि को दूसरी एक राशि द्वारा भाग करने पर जो भजनफल प्राप्त हो, उसको यदि इस रीति से प्रकट किया जाय कि एक आड़ी रेखा खींच कर उसके उपर भाज्य और नीचे भाजक लिखें तो वह बीजीय भिन्न कहलाता है।

106. किसी भिन्न के अंश और हर को किसी एक ही राशि द्वारा गुणा या भाग करने से भिन्न के मूल्य में कोई बदलाव नहीं होता।

a, b और m कोई भी तीन राशियाँ हों तो सिद्ध करना होगा कि

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

फर्ज़ करो कि $x=\frac{a}{b}$, तो $x\times b=\frac{a}{b}\times b=a.$ [परिभाषा के अनुसार]

$\therefore\ x\times b\times m=a\times m;$ अथवा $x\times bm=am;$

$\therefore\ x=am\div bm;$ अर्थात् $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$

उल्टे ढंग से $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$; याने $\frac{am}{bm}=\frac{am\div m}{bm\div m}.$

इस प्रकार यह सिद्ध हो गया।

उपसिद्धान्त। $\frac{a}{b}=\frac{a\times(-1)}{b\times(-1)}=\frac{-a}{-b}.$ इसलिए अंश व हर इन दोनों का चिह्न बदलने से भिन्न के मूल्य में कोई परिवर्तन नहीं होता।

107. भिन्न को लघुतम पदों में तोड़ना (reduction of a fraction to its lowest terms) :

परिभाषा : किसी भिन्न के अंश व हर में यदि कोई गुणनखंड साधारण न हो तो उस भिन्न को "लघुतम पदों का भिन्न" कहते हैं। इसलिए किसी भिन्न को यदि लघुतम पदों में तोड़ना हो (अथवा जैसे संक्षेप में कहते हैं "सरल करने के लिए") तो एक ऐसा भिन्न निकालना आवश्यक होता है, जो दिये हुए भिन्न के बराबर हो और उसके अंश व हर में कोई साधारण गुणनखंड न हो ; इसलिए स्पष्ट सिद्ध है, कि दिये हुए भिन्न के अंश व हर के महत्तम समापवर्तक द्वारा दोनों को भाग करने से भिन्न लघुतम पदों में प्रकट होता है।

टीका। जिन भिन्नों में अंश व हर के मूल गुणनखंड केवल ध्यानसे देखनेसे ही निकाले जा सकते हैं, उनके अंश व हर के साधारण गुणनखंड हटा देते ही भिन्न लघुतम पदों में टूट जाता है।

उदाहरण 1. $\frac{4a^2b^3c^2}{10ab^4c^2}$ को लघुतम पदों में तोड़ो।

$$\frac{4a^2b^3c^2}{10ab^4c^2}=\frac{2\times2\times a^2\times b^3\times c^2}{2\times5\times a\times b^4\times c^2}=\frac{2a}{5b}.$$

उदाहरण 2. हल करो : $\frac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)}$.

$$\frac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)}=\frac{a^2b^3(a+b)(a-b)}{3ab^4(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a(a-b)}{3b(a^2-ab+b^2)}.$$

उदाहरण 3. $\frac{x^2+3x-40}{x^2+4x-32}$ को लघुतम पदों में तोड़ो।

$$\text{अंश}=(x+8)(x-5).$$

$$\text{हर}=(x+8)(x-4).$$

इसलिए दिया हुआ भिन्न $=\frac{(x+8)(x-5)}{(x+8)(x-4)}=\frac{x-5}{x-4}$.

उदाहरण 4. हल करो : $\frac{2a^2+3ax-2ab-3bx}{3a^2-2ax-3ab+2bx}$.

$$\text{अंश}=2a(a-b)+3x(a-b)=(a-b)(2a+3x).$$

$$\text{हर}=3a(a-b)-2x(a-b)=(a-b)(3a-2x).$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=\frac{(a-b)(2a+3x)}{(a-b)(3a-2x)}=\frac{2a+3x}{3a-2x}$.

प्रश्नमाला 54

लघुतम पदों में तोड़ो :

1. $\frac{2a^2b^3}{4a^2b^4}$.
2. $\frac{6x^2y^3}{8xy^4}$.
3. $\frac{4a^2xy^2}{10ax^2y^2}$.
4. $\frac{15x^3y^2z^4}{25x^2y^4z^3}$.
5. $\frac{18a^2bc^4d^5}{27a^3b^2c^4d^4}$.
6. $\frac{16x^2a^4y^3z^5}{40a^3z^4x^3y^4}$.
7. $\frac{70a^2b^3c^4d^7}{105c^4d^2a^3b^3}$.
8. $\frac{39m^2n^5p^3q^6}{65p^2m^3n^4q^5}$.
9. $\frac{x^2-a^2}{x^2+ax}$.
10. $\frac{x^2-3x}{9x-x^3}$.
11. $\frac{4x^2-9a^2}{4x^2+6ax}$.
12. $\frac{3a^2-12ab}{48b^2-3a^2}$.
13. $\frac{3ax-12a^2}{x^2-16a^2}$.
14. $\frac{2x^4-4a^2x^2}{x^4-4a^2x^2+4a^4}$.
15. $\frac{4x^2+8x}{x^2+5x+6}$.
16. $\frac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$.
17. $\frac{x^2+2x-15}{x^2+9x+20}$.
18. $\frac{a^2-3ab-4b^2}{a^2-4ab-5b^2}$.

19. $\dfrac{a^4-a^3b+a^2b^2}{a^3+b^3}$.

20. $\dfrac{1-7x+12x^2}{1-8x+15x^2}$.

21. $\dfrac{x^2-6xy+5y^2}{x^2+2xy-35y^2}$.

22. $\dfrac{1-9a^2+14a^4}{1-4a^2-21a^4}$.

23. $\dfrac{x^4-8x^2-65}{x^4+x^2-20}$.

24. $\dfrac{3a^3x+9a^2x^2+27ax^3}{a^3-27x^3}$.

25. $\dfrac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$.

26. $\dfrac{3x^2-5ax+2a^2}{3x^2+ax-2a^2}$.

27. $\dfrac{3x^2+16ax+5a^2}{3x^2+22ax+7a^2}$.

28. $\dfrac{6x^2-7x-20}{9x^2+6x-8}$.

29. $\dfrac{2x^2+3ax-20a^2}{3x^2+5ax-28a^2}$.

30. $\dfrac{10-17ax+3a^2x^2}{5-26ax+5a^2x^2}$.

31. $\dfrac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$.

32. $\dfrac{6ac+10bc+9ax+15bx}{6c^2+9cx-2c-3x}$.

33. $\dfrac{8bx+12ab+6xy+9ay}{12bx+8ab+9xy+6ay}$.

34. $\dfrac{2a^2+ab-b^2}{a^3+a^2b-a-b}$.

35. $\dfrac{a^2-b^2-2bc-c^2}{a^2+2ab+b^2-c^2}$.

108. दो या दो से अधिक भिन्नों को सार्व हर बनाना (Reduction of two or more fractions to a common denominator) :

फ़र्ज़ करो कि $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f}$...... आदि कई भिन्न हैं; और L उनके हरों (अर्थात् b, d, f......आदि) का लघुतम समापवर्त्य है। चूँकि किसी भिन्न के अंश व हर को किसी एक ही राशि से गुणा या भाग करने से भिन्न के मूल्य में कोई फेरफार नहीं होता, इसलिए

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times(L\div b)}{b\times(L\div b)}=\frac{a\times(L\div b)}{L};$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c\times(L\div d)}{d\times(L\div d)}=\frac{c\times(L\div d)}{L};$$

$$\frac{e}{f}=\frac{e\times(L\div f)}{f\times(L\div f)}=\frac{e\times(L\div f)}{L};\text{ आदि।}$$

इसलिए तीसरे स्तम्भ (column) के भिन्न क्रमशः दिये हुए भिन्नों के बराबर हैं और उनमें से प्रत्येक का हर L है।

इसलिए भिन्नों को सार्व हर बनाने के लिए निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है :

भिन्नों के हरों का लघुतम समापवर्त्य निकालकर, उसको एक एक हर द्वारा भाग करने से जो भजनफल प्राप्त होते हैं, उनसे दिये हुए भिन्नों के अंश व हरों को क्रमशः गुणन करो।

उदाहरण 1. $\frac{x}{a+b}$, $\frac{x^2}{a(a-b)}$ और $\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}$ को सार्व हर बनाओ।

दिये हुए हरों का लघुतम समापवर्त्य $=ab(a^2-b^2)$; और इसको प्रत्येक भिन्न के हर द्वारा भाग करने से क्रमशः $ab(a-b)$, $b(a+b)$ और a भजनफल प्राप्त होते हैं।

$$\text{इसलिए} \quad \frac{x}{a+b}=\frac{x\times ab(a-b)}{(a+b)\times ab(a-b)}=\frac{xab(a-b)}{ab(a^2-b^2)};$$

$$\frac{x^2}{a(a-b)}=\frac{x^2\times b(a+b)}{a(a-b)\times b(a+b)}=\frac{x^2b(a+b)}{ab(a^2-b^2)};$$

$$\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}=\frac{x^3\times a}{b(a^2-b^2)\times a}=\frac{x^3a}{ab(a^2-b^2)}.$$

उदाहरण 2. $\frac{x-1}{x^2-5x+6}$, $\frac{x-2}{x^2-4x+3}$ और $\frac{x-3}{x^2-3x+2}$ को सार्व हर बनाओ।

हर क्रमानुसार $(x-2)(x-3)$, $(x-1)(x-3)$ व $(x-1)(x-2)$ हैं।

और इनका लघुतम समापवर्त्य $=(x-1)(x-2)(x-3)$.

इस लघुतम समापवर्त्य को प्रत्येक हर से भाग करने से भजनफल क्रमशः $x-1$, $x-2$ व $x-3$ होते हैं। इसलिए,

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{(x-1)(x-1)}{(x^2-5x+6)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-2}{x^2-4x+3}=\frac{(x-2)(x-2)}{(x^2-4x+3)(x-2)}=\frac{x^2-4x+4}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-3}{x^2-3x+2}=\frac{(x-3)(x-3)}{(x^2-3x+2)(x-3)}=\frac{x^2-6x+9}{x^3-6x^2+11x-6}.$$

प्रश्नमाला 55

निम्नलिखित भिन्नों को सार्व हर बनाओ :

1. $\frac{a}{2b}, \frac{3c}{4d}, \frac{e}{f}$.

2. $\frac{x^2}{2bc}, \frac{y^2}{3ca}, \frac{z^2}{4ab}$.

3. $\frac{ab}{4xy^2}, \frac{bc}{6x^2y}, \frac{ca}{10x^3}$.

4. $\frac{a}{a-b}, \frac{b}{a+b}, \frac{c}{a(a+b)}$.

5. $\frac{x^2}{a^2+2ab}, \frac{y^2}{a-2b}$.

6. $\frac{2a}{a-b}, \frac{a-c}{ab-a^2}$.

7. $\frac{2a}{a-b}, \frac{3b}{b-a}, \frac{4c}{a+b}$.

8. $\frac{2x}{a^2(a+x)}, \frac{3y}{b^2(a-x)}, \frac{4z}{c^2(a^2-x^2)}$.

9. $\frac{a^2}{2xy-3y^2}, \frac{b^2}{2x^2+3xy}, \frac{c^2}{4x^3y-9xy^3}$.

10. $\frac{a^2}{x^2+x+1}, \frac{b^2}{x^2-x+1}$.

11. $\frac{3}{x^2-x-2}, \frac{4}{x^2+x-6}$.

12. $\frac{a-2b}{a(a^2-2ab+4b^2)}, \frac{bc}{a^3+8b^3}$.

13. $\frac{a}{a-3b}, \frac{b}{a^2+3ab+9b^2}, \frac{c}{a^3-27b^3}$.

14. $\frac{a}{b(a-b-c)}, \frac{b}{a(a-b+c)}, \frac{c}{a^2+b^2-c^2-2ab}$.

15. $\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}, \frac{b-a}{(a-c)(b-c)}, \frac{b-c}{(c-a)(a-b)}$.

109. भिन्नों का जोड़ : उपसिद्धान्त 3, नियम 47 से पाया जाता है कि a, b, c, d, e कैसी ही राशियाँ क्यों न हों ; $a(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae$.

इसलिए उल्टे ढंग से $\frac{ab+ac+ad+ae}{a}=b+c+d+e=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}+\frac{ad}{a}+\frac{ae}{a}$.

अब यदि क्रमशः ab, ac, ad, ae के लिए p, q, r, s लिखा जाय तो $\frac{p+q+r+s}{a}=\frac{p}{a}+\frac{q}{a}+\frac{r}{a}+\frac{s}{a}$। और p, q, r, s व a इस हालत में भी कोई संख्या हैं।

इसलिए कई बराबर हरवाले भिन्नों का योगफल एक ऐसा भिन्न है जिसका अंश दिये हुए भिन्नों के अंशों के योगफल अथवा जोड़ के बराबर है और जिसका हर उनका सार्व हर ही है।

इसलिए भिन्नों का योगफल निकालने के लिए पहले उनको साधारण हरवाला भिन्न बनाकर, प्राप्त भिन्नों के अंशों के बीजीय योगफल को सार्व हर द्वारा भाग करते हैं।

उदाहरण 1. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$ का मूल्य निकालो।

चूँकि $$\frac{b}{b-a}=\frac{b\times(-1)}{(b-a)\times(-1)}=\frac{-b}{a-b},$$

इसलिए $$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}=\frac{a}{a-b}+\frac{-b}{a-b}=\frac{a+(-b)}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1.$$

उदाहरण 2. $\frac{x}{x+a}+\frac{a}{x-a}$ का मूल्य निकालो।

चूँकि हरों का लघुतम समापवर्त्य $=x^2-a^2$,

इसलिए $$\frac{x}{x+a}=\frac{x(x-a)}{x^2-a^2} \text{ और } \frac{a}{x-a}=\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}.$$

इसलिए मूल्य $$=\frac{x(x-a)}{x^2-a^2}+\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}=\frac{x(x-a)+a(x+a)}{x^2-a^2}=\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.$$

उदाहरण 3. $\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}$ का मूल्य निकालो।

इस उदाहरण में तीनों भिन्नों को एक साथ बराबर हरवाले भिन्नों को बदलना आसान नहीं है इसलिए निम्नलिखित रीति काम में लायी जायगी।

$$\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)+b}{a^2-b^2}=\frac{a}{a^2-b^2}.$$

इसलिए मूल्य $$=\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)-a(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=\frac{2ab^2}{a^4-b^4}.$$

उदाहरण 4. हल करो: $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2+4}+\frac{32}{x^4+16}$.

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4};$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2+4}=\frac{4(x^2+4)-4(x^2-4)}{x^4-16}=\frac{32}{x^4-16}.$$

अंत में $$\frac{32}{x^4-16}+\frac{32}{x^4+16}=\frac{32(x^4+16)+32(x^4-16)}{x^8-256}$$

$$=\frac{64x^4}{x^8-256}$$; यही पूछा हुआ मूल्य है।

उदाहरण 5. हल करो : $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+4b}.$

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=\left\{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}\right\}-\left\{\frac{1}{a+3b}-\frac{1}{a+4b}\right\}.$$

अब, $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}=\frac{(a+2b)-(a+b)}{(a+b)(a+2b)}=\frac{b}{(a+b)(a+2b)};$

और $\frac{1}{a+3b}-\frac{1}{a+4b}=\frac{(a+4b)-(a+3b)}{(a+3b)(a+4b)}=\frac{b}{(a+3b)(a+4b)};$

अंत में

$$\frac{b}{(a+b)(a+2b)}-\frac{b}{(a+3b)(a+4b)}=\frac{b(a+3b)(a+4b)-b(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)};$$

$$\text{जिसका अंश}=b(a^2+7ab+12b^2)-b(a^2+3ab+2b^2)$$

$$=b(4ab+10b^2)=2b^2(2a+5b).$$

$$\text{इसलिए जवाब}=\frac{2b^2(2a+5b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)}.$$

प्रश्नमाला 56

मूल्य निकालो :

1. $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}.$

2. $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}.$

3. $\frac{a}{a-x}+\frac{x}{x-a}.$

4. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}.$

5. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{2(a+b)}.$

6. $\frac{4x^2+9y^2}{4x^2-9y^2}-\frac{2x-3y}{2x+3y}.$

7. $\frac{a}{(a+b)^2}-\frac{b}{a^2-b^2}.$

8. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}.$

9. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$

10. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}.$

11. $\frac{1}{x^2+7x+10}+\frac{1}{x^2+13x+40}.$

12. $\frac{1}{2x+3y}-\frac{(2x-3y)^2}{8x^3+27y^3}.$

13. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{2ab}{b^2-a^2}$.

14. $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a-2b}+\frac{2a}{4b^2-a^2}$.

15. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}-\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

16. $\frac{a-2x}{a+2x}-\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{8ax}{a^2+4x^2}$.

17. $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{x-3}{3x+9}-\frac{5x^2+24x}{2x^2-18}$.

18. $\frac{4a-b}{1-4ab}-\frac{4a+b}{1+4ab}-\frac{4b(1-8a^2)}{16a^2b^2-1}$.

19. $\frac{x}{x-2a}+\frac{x}{x+2a}+\frac{2x^2}{x^2+4a^2}$.

20. $\frac{b}{a-b}+\frac{b}{a+b}+\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{4a^3b}{a^4+b^4}$.

21. $\frac{x}{3x-y}+\frac{x}{3x+y}+\frac{6x^2}{9x^2+y^2}$.

22. $\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{2x+6a}-\frac{x-9a}{2x^2+18a^2}$.

23. $\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2$.

24. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$.

25. $\frac{1}{x-a}-\frac{2}{2x+a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{2x-a}$.

26. $\frac{3}{a-x}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{a+x}+\frac{1}{x-3a}$.

27. $\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^2-1}$.

28. $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\frac{b-c}{(b-a)(x-b)}$.

29. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x^2-8x+15}$.

30. $\frac{1}{x^2+5ax+4a^2}+\frac{1}{x^2+11ax+28a^2}+\frac{2}{x^2+20ax+91a^2}$.

31. $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}$.

32. $\frac{1}{1-x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{2x}{1+x^2+x^4}$.

33. $\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{1}{1-x+x^2}+\frac{2x}{1-x^2+x^4}$.

34. $\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}+\frac{6x}{x^3+8}$.

35. $\frac{11}{16(2x^2-6ax+9a^2)}-\frac{11}{32x^2+96ax+144a^2}+\frac{33ax}{4(4x^4-81a^4)}$.

110. भिन्नों का गुणन : $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो कोई भिन्न हों, तो $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ का मूल्य निकालना।

फ़र्ज़ करो कि $x = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

$$\text{तो } x \times b \times d = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d = \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d$$

$$= \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \left(\frac{c}{d} \times d\right) = a \times c;$$

अथवा $x \times bd = ac$; $\therefore\ x = \frac{ac}{bd}$; अर्थात् $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

इसलिए $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$;

और $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} = \frac{ace}{bdf} \times \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}$; आदि।

इसलिए भिन्नों का गुणनफल एक ऐसा भिन्न है जिसका अंश दिये हुए अंशों के गुणनफल के बराबर है, और जिसका हर दिये हुए हरों के गुणनफल के बराबर है।

उपसिद्धान्त। चूँकि $c = \frac{c}{1}$, इसलिए $\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$.

उदाहरण 1. गुणा करो : $\frac{x^2}{yz}$, $\frac{y^2}{zx}$ और $\frac{z^2}{xy}$.

$$\text{गुणनफल} = \frac{x^2 \times y^2 \times z^2}{yz \times zx \times xy} = \frac{x^2 \times y^2 \times z^2}{y^2 \times z^2 \times x^2} = 1.$$

उदाहरण 2. $\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}$ को $\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$ से गुणा करो।

$$\text{गुणनफल} = \frac{x(a-x) \times a(a+x)}{(a^2+2ax+x^2)(a^2-2ax+x^2)} = \frac{ax(a-x)(a+x)}{(a+x)^2(a-x)^2}$$

$$= \frac{ax}{(a+x)(a-x)} = \frac{ax}{a^2-x^2}.$$

उदाहरण 3. गुणा करो : $\frac{1-x^2}{1+y}$, $\frac{1-y^2}{x+x^2}$ और $1+\frac{x}{1-x}$.

$$\text{चूँकि} \quad 1+\frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

$$\therefore \quad \text{गुणनफल} = \frac{(1+x)(1-x)}{1+y} \times \frac{(1+y)(1-y)}{x(1+x)} \times \frac{1}{1-x}$$
$$= \frac{(1+x)(1-x)(1+y)(1-y)}{(1+y)x(1+x)(1-x)} = \frac{1-y}{x}.$$

प्रश्नमाला 57

गुणा करो :

1. $\frac{2a^2}{3ab}, \frac{9b^2}{16ac}$ व $\frac{8c^2}{9bc}$.
2. $\frac{4a^2b^2}{3c^2}, \frac{9c^2}{16d^2}$ व $\frac{4d^2}{27b^2}$.
3. $\frac{x^3}{yz}, \frac{y^3}{zx}$ व $\frac{z^3}{xy}$.
4. $\frac{7a^2b^2c^2}{12xyz}$ व $\frac{4x^3y^3z^3}{21a^4b^4c^4}$.
5. $\frac{12m^2n^3}{7xy^2z}$ व $\frac{35x^3yz}{96m^3n}$.

हल करो :

6. $\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x^2+x-2}{x^2+x}$.
7. $\frac{a^2-9b^2}{a^2+3ab} \times \frac{3a^2}{a^2-3ab}$.
8. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab} \times \frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$.
9. $\frac{a^3+8x^3}{a^3-2a^2x} \times \frac{a^2-4ax+4x^2}{a^2-2ax+4x^2}$.
10. $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-9}$.
11. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2-8x+12}$.
12. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} \times \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$.
13. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} \times \frac{a-b}{a^2+ab}$.
14. $\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2} \times \frac{3x^2+x}{4x-2}$.
15. $\frac{x^2-6x-16}{x^2-4x-21} \times \frac{x^2-11x+28}{x^2-12x+32}$.
16. $\frac{a^2-x^2}{a+b} \times \frac{a^2-b^2}{ax+x^2} \times \left(a+\frac{ax}{a-x}\right)$.
17. $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)$.
18. $\left(\frac{4a}{3x}+\frac{3x}{2b}\right)\left(\frac{2b}{3x}+\frac{3x}{4a}\right)$.
19. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{d}-\frac{d}{c}\right)$.
20. $\frac{2x^2-7x+3}{2x^2+7x-4} \times \frac{3x^2+11x-4}{3x^2+8x-3} \times \frac{2x^2+x-15}{2x^2-11x+15}$.
21. $\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac} \times \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$.
22. $\frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{b^2-c^2-a^2+2ac} \times \frac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2-2ab}$.

111. भिन्नों का भाग :

$\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो भिन्न हों, तो $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ का मूल्य निकालना।

फ़र्ज़ करो कि $x = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$. तो $x \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$;

[$\because$ $m \div n \times n = m$, चाहे m व n कोई राशि हों।]

$\therefore$ $x \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$; अथवा $x = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. $\left[\because \quad \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1.\right]$

इसलिए एक भिन्न को दूसरे एक भिन्न द्वारा यदि भाग करना हो, तो पहले भिन्न को दूसरे भिन्न के व्युत्क्रम (reciprocal) द्वारा गुणन करना होता है।

उपसिद्धान्त। $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$.

उदाहरण 1. हल करो : $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \div \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

$$\text{भजनफल} = \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \times \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} = \frac{(a^3+b^3)(a-b)}{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)}{(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)} = 1.$$

उदाहरण 2. हल करो : $\frac{x^2+x-2}{x^2+7x+12} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+x-12} \times \frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+3}$.

$$\text{भजनफल} = \frac{x^2+x-2}{x^2+7x+12} \times \frac{x^2+x-12}{x^2-3x-10} \times \frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} \times \frac{(x+4)(x-3)}{(x-5)(x+2)} \times \frac{(x-5)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)(x+4)(x-3)(x-5)(x+1)}{(x+3)(x+4)(x-5)(x+2)(x-3)(x-1)} = \frac{x+1}{x+3}.$$

उदाहरण 3. हल करो : $\dfrac{\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a-b} - \frac{b}{a+b}} \div \dfrac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}} \times \frac{a^2}{a^2+b^2}$.

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1876.]

अत्र, $$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a-b}-\frac{b}{a+b}}=\frac{\frac{a(a+b)-a(a-b)}{a^2-b^2}}{\frac{b(a+b)-b(a-b)}{a^2-b^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}\div\frac{2b^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2ab}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{2b^2}=\frac{a}{b}; \quad \dots \quad (1)$$

और $$\frac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}=\frac{\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}}{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\div\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}. \quad \dots \quad (2)$$

इसलिए (1) व (2) से दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{a}{b}\div\frac{a^2+b^2}{2ab}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a}{b}\times\frac{2ab}{a^2+b^2}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{2a^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

प्रश्नमाला 58

हल करो :

1. $\frac{4a^2bc}{15xy^2z}\div\frac{8ab^2c}{25x^2yz}$.
2. $\frac{a^2+ab}{a-b}\div\frac{ab}{a^2-b^2}$.
3. $\frac{x^2-49}{x^2-25}\div\frac{x+7}{x+5}$.
4. $\frac{a^4-b^4}{a^2+2ab+b^2}\div\frac{a^2+b^2}{a+b}$.
5. $\frac{m^2-9n^2}{m^2+5mn+6n^2}\div\frac{m^2-2mn-3n^2}{m^2-n^2}$.
6. $\frac{m^3-n^3}{m+n}\div\frac{m^2+mn+n^2}{m^2-n^2}$.
7. $\left(\frac{2x+y}{x+y}-1\right)\div\left(1-\frac{y}{x+y}\right)$.
8. $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\div\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$.
9. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$.
10. $\frac{x^2-4}{x^2+3x-18}\div\frac{x^2-5x-14}{x^2-36}$.
11. $\left(1-\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)\div\left(\frac{p^3-q^3}{p-q}-3pq\right)$.
12. $\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2-4ab}\div\frac{(a-b)^2+4ab}{a^3-b^3-3ab(a-b)}$.
13. $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+3xy}\div\frac{(x+y)^2-3xy}{x^3-y^3}\times\frac{xy}{x^2-y^2}$.

14. $\dfrac{a(a-b)^2+4a^2b}{ab+b^2} \div \dfrac{a^2-b^2}{ab} \times \dfrac{b(a+b)^2-4ab^2}{a^2-ab}$.

15. $\dfrac{x^2-x-30}{x^2-36} \div \dfrac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8} \div \dfrac{x+4}{2x^2+12x}$.

16. $\dfrac{x^2+3x-108}{x^2-64} \div \dfrac{x^2+6x-72}{x^2+x-56} \div \dfrac{x^2-16x+63}{x^2-14x+48}$.

17. $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \div \left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right)$.

18. $\left(\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) \div \left(\dfrac{a-b}{a+b} - \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$. [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1868.]

19. $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)} \div \dfrac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab} \times \dfrac{a}{(a+b)^2-2ab}$.

20. $\dfrac{(a-b)\{(a+b)^2-ab\}}{(a-b)^2+2ab} \div \dfrac{(a-b)^2+3ab}{(a+b)\{(a-b)^2+ab\}} \times \dfrac{(a+b)^2-2ab}{(a+b)^2-3ab}$.

21. $\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}}{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right)} \times \dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{ab}}$. [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1874.]

सत्रहवाँ अध्याय

सरल समीकरण और प्रश्न (Simple Equations and Problems)

I. सरल समीकरण (Simple Equations)

112. आसान "सरल समीकरणों" को हल करने की रीति पाँचवें अध्याय में बतलाई गई थी। इस अध्याय में उन सब विषयों पर और भी खुलासा विचार किया जायगा। पहले दिखलाया गया है कि समीकरण हल करने की रीति विशेष रूप से कई स्वयं-सिद्धियों (axioms) नियम 64 पर निर्भर है जिनके द्वारा साफ मालूम होता है कि समीकरणों में कोई फेरफार नहीं होता ;

(i) यदि समीकरण के किसी पद का पक्ष या तरफ बदल दी जाय ; और (ii) यदि समीकरण के दोनों पक्षों याने तरफों को किसी भी एक राशि द्वारा गुणन अथवा भाग किया जाय।

47. $\dfrac{x-1\frac{2}{3}\frac{5}{6}}{2}-\dfrac{2-6x}{13}=x-\dfrac{5x-\frac{1}{4}(10-3x)}{39}$.

48. $\dfrac{3x-\frac{2}{3}(1+x)}{4}+\dfrac{1-\frac{1}{6}x}{5\frac{1}{3}}=\dfrac{2\frac{2}{5}+\frac{1}{35}(x-1)}{2\frac{1}{5}}$.

49. $\frac{1}{3}(x-a)-\frac{1}{6}(2x-3b)-\frac{1}{2}(a-x)=10a+11b$.

50. $\dfrac{2x+a}{b}-\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{3ax+(a-b)^2}{ab}$.

51. $\dfrac{2x+1}{29}-\dfrac{402-3x}{12}=9-\dfrac{471-6x}{2}$.

52. $\dfrac{15-\frac{2}{3}x}{5}-\dfrac{2x+5}{2\frac{1}{2}}=\dfrac{17-\frac{14}{3}x}{3}$. [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1874.]

113. दशमलव भिन्नवाले समीकरण : आवश्यक हो तो दशमलव को साधारण भिन्न बनाकर समीकरण हल कर सकते हैं।

उदाहरण 1. हल करो : $\dfrac{x-2}{.0\dot{5}}-\dfrac{x-4}{.0625}=56$.

चूँकि $.0\dot{5}=\dfrac{5}{90}=\dfrac{1}{18}$ और $.0625=\dfrac{625}{10000}=\dfrac{1}{16}$,

इसलिए $\dfrac{x-2}{\frac{1}{18}}-\dfrac{x-4}{\frac{1}{16}}=56$,

अथवा $18(x-2)-16(x-4)=56$, अथवा $2x+28=56$;

$\therefore\ 2x=28$, अथवा $x=14$.

उदाहरण 2. हल करो : $.65x+\dfrac{.585x-.975}{.6}=\dfrac{1.56}{.2}-\dfrac{.39x-.78}{.9}$.

चूँकि $\dfrac{.585x-.975}{.6}=\dfrac{5.85x-9.75}{6}=\dfrac{1.95x-3.25}{2}$;

$\dfrac{1.56}{.2}=\dfrac{15.6}{2}=7.8$; और $\dfrac{.39x-.78}{.9}=\dfrac{3.9x-7.8}{9}=\dfrac{1.3x-2.6}{3}$;

इसलिए दिया हुआ समीकरण यों बन जाता है :

$$.65x+\frac{1.95x-3.25}{2}=7.8-\frac{1.3x-2.6}{3}.$$

इसलिए दोनों तरफों को 6 द्वारा गुणन करने पर

$$3.9x+(5.85x-9.75)=46.8-(2.6x-5.2).$$

तरफ बदलने पर $(3{\cdot}9+5{\cdot}85+2{\cdot}6)x=46{\cdot}8+5{\cdot}2+9{\cdot}75,$

अथवा $12{\cdot}35x=61{\cdot}75$;

$$\therefore \quad x=\frac{61{\cdot}75}{12{\cdot}35}=5.$$

प्रश्नमाला 60

नीचे दिये हुए समीकरणों को हल करो :

1. ${\cdot}5x-{\cdot}\dot{2}x={\cdot}\dot{3}x-1{\cdot}5.$

2. $3{\cdot}75x+{\cdot}5=2{\cdot}25x+8.$

3. $1{\cdot}2x-\dfrac{{\cdot}18x-{\cdot}05}{{\cdot}5}={\cdot}4x+8{\cdot}9.$

4. $\dfrac{x+{\cdot}75}{{\cdot}125}-\dfrac{x-{\cdot}25}{{\cdot}25}=15.$

5. $\dfrac{x}{{\cdot}5}-\dfrac{1}{{\cdot}05}+\dfrac{x}{{\cdot}005}-\dfrac{1}{{\cdot}0005}=0.$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1883.]

6. ${\cdot}5x+\dfrac{{\cdot}45x-{\cdot}75}{{\cdot}6}=\dfrac{1{\cdot}2}{{\cdot}2}-\dfrac{{\cdot}3x-{\cdot}6}{{\cdot}9}.$

7. ${\cdot}7x+{\cdot}\dot{4}={\cdot}6\dot{7}x+{\cdot}\dot{5}.$

8. ${\cdot}15x+\dfrac{{\cdot}135x-{\cdot}225}{{\cdot}6}=\dfrac{{\cdot}36}{{\cdot}2}-\dfrac{{\cdot}09x-{\cdot}18}{{\cdot}9}.$

9. ${\cdot}5x+\dfrac{{\cdot}02x+{\cdot}07}{{\cdot}03}-\dfrac{x+2}{9}=9{\cdot}5.$

10. ${\cdot}011x+\dfrac{{\cdot}001x-{\cdot}125}{{\cdot}6}=\dfrac{5-x}{{\cdot}03}-{\cdot}145.$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1886.]

114. आवश्यक हो तो 'पद जोड़कर' व पक्षान्तर याने तरफ बदलके समीकरण को हल करना।

उदाहरण 1. हल करो : $\dfrac{23x-29}{12}+\dfrac{19x+13}{7}=\dfrac{97x+72\frac{1}{2}}{35}-\dfrac{7x-8\frac{1}{3}}{4}.$

अब तरफ बदल करके

$$\frac{23x-29}{12}-\frac{7x-8\frac{1}{3}}{4}=\frac{97x+72\frac{1}{2}}{35}-\frac{19x+13}{7},$$

अथवा $$\frac{(23x-29)-(21x-25)}{12}=\frac{(97x+72\frac{1}{2})-(95x+65)}{35},$$

अथवा $$\frac{x-2}{6}=\frac{2x+7\frac{1}{2}}{35}.$$

अब दोनों पक्षों को 6×35 द्वारा गुणा करने पर

$35x - 70 = 12x + 45$ निकला।

इसलिए $23x = 115$; अथवा $x = 5$.

उदाहरण 2. हल करो : $\dfrac{x-a(b+c)}{bc} + \dfrac{x-b(c+a)}{ca} + \dfrac{x-c(a+b)}{ab} = 3.$

समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है ; जैसे,

$$\frac{x-a(b+c)}{bc} + \frac{x-b(c+a)}{ca} + \frac{x-c(a+b)}{ab} = 1+1+1.$$

अब तरफ़ बदल करके,

$$\left\{\frac{x-a(b+c)}{bc} - 1\right\} + \left\{\frac{x-b(c+a)}{ca} - 1\right\} + \left\{\frac{x-c(a+b)}{ab} - 1\right\} = 0;$$

अथवा $$\frac{x-a(b+c)-bc}{bc} + \frac{x-b(c+a)-ca}{ca} + \frac{x-c(a+b)-ab}{ab} = 0;$$

अथवा $$\frac{x-(ab+ac+bc)}{bc} + \frac{x-(ca+cb+ab)}{ca} + \frac{x-(ca+cb+ab)}{ab} = 0;$$

अथवा $$\{x-(ab+bc+ca)\}\left\{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right\} = 0;$$

$$\therefore \quad x-(ab+bc+ca) = 0.$$

$$\therefore \quad x = ab+bc+ca.$$

प्रश्नमाला 61

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $\dfrac{5x+6}{4} + \dfrac{64x-35}{15} = \dfrac{20x+23}{16} + \dfrac{13x-7}{3}.$

2. $\dfrac{17x-13}{9} + \dfrac{108x+75}{32} = \dfrac{27x+19}{8} + \dfrac{50\frac{7}{18}x-39}{27}.$

3. $\dfrac{29x-18}{8} + \dfrac{189x-93}{49} = \dfrac{86\frac{13}{31}x-54}{24} + \dfrac{27x-13}{7}.$

4. $\dfrac{16x-17}{9} - \dfrac{23x-15}{16} = \dfrac{142\frac{7}{18}x-153}{81} - \dfrac{92x-65}{64}.$

5. $\dfrac{18x-19}{7} + \dfrac{135x+62\frac{1}{3}}{65} = \dfrac{27x+14}{13} + \dfrac{106\frac{5}{18}x-114}{42}.$

6. $\frac{33-19x}{15}-\frac{41+27x}{28}+\frac{164+107\frac{11}{78}x}{112}-\frac{164\frac{13}{38}-95x}{75}=0.$

7. $\frac{18-41x}{9}-\frac{17-16x}{8}+\frac{9\frac{16}{31}-10x}{5}-\frac{14-32x}{7}=0.$

8. $\frac{x-a^2}{b^2+c^2}+\frac{x-b^2}{c^2+a^2}+\frac{x-c^2}{a^2+b^3}=3.$

9. $\frac{3x-bc}{b+c}+\frac{3x-ca}{c+a}+\frac{3x-ab}{a+b}=a+b+c.$

10. $\frac{ax-b^2+c^2}{c-b}+\frac{bx-c^2+a^2}{a-c}+\frac{cx-a^2+b^2}{b-a}=2(a+b+c).$

11. $\frac{x-(b^3+c^3)}{a^2-3bc}+\frac{x-(c^3+a^3)}{b^2-3ca}+\frac{x-(a^3+b^3)}{c^2-3ab}=a+b+c.$

12. $\frac{p^2x+(l^3+m^3)}{l^2-lm+m^2}+\frac{q^2x+(m^3+n^3)}{m^2-mn+n^2}+\frac{r^2x+(n^3+l^3)}{n^2-ln+l^2}=2(l+m+n).$

II. समीकरण-सम्बन्धी प्रश्न (Equational Problems).

115. "सरल समीकरण" सम्बन्धी आसान प्रश्नों को बीजीय संकेतों द्वारा प्रकट करके उनके हल करने की रीति छठे अध्याय में बतलाई गई है ; अब इस भाँति के और भी कठिन प्रश्नों पर विचार किया जायगा।

पहले ही कहा गया है इस भाँति के प्रश्नों को हल करने की असल कठिनाई है उनको संकेतों द्वारा प्रकट करना, और इस कठिनाई को दूर करने के लिए विद्यार्थियों को विशेष अभ्यास करना चाहिए।

वास्तव में इन प्रश्नों को हल करने का कोई साधारण नियम नहीं बतलाया जा सकता किन्तु नीचे दी हुई बातों पर ध्यान रखने से सहूलियत होगी :

(1) किसी प्रश्न का बार बार पढ़ कर उसका मतलब खूब समझ लो।

(2) प्रश्न के उत्तर को x द्वारा सूचित करो।

(3) प्रश्न में दी हुई शर्तों को x की सहायता से प्रकट करके एक सरल समीकरण बना लो।

(4) अन्त में यह समीकरण हल करके x का मूल्य निकालो।

निम्नलिखित उदाहरणों से इन प्रश्नों को हल करने की रीति भली भांति मालूम होगी।

[छठे अध्याय के उदाहरण भी देख लो।]

उदाहरण 1. 20 वर्ष पहले एक व्यक्ति की उम्र उसके पुत्र की उम्र की पंचगुनी थी; यदि 16 वर्ष बाद उसके पुत्र की उम्र 41 वर्ष हो जायगी, तो पिता की वर्तमान उम्र क्या होगी ?

इस प्रश्न में पिता की वर्तमान उम्र निकालनी है, इसलिए इसको x द्वारा सूचित करो।

$\therefore$ 20 वर्ष पहले पिता की उम्र $=(x-20)$ वर्ष

और 16 वर्ष के बाद पुत्र की उम्र 41 वर्ष होगी

$\therefore$ अब पुत्र की उम्र $=41-16=25$ वर्ष

इसलिए 20 वर्ष पहले पुत्र की उम्र $=25-20=5$ वर्ष

$\therefore$ प्रश्न की शर्तों के अनुसार $x-20=5\times 5$,

अथवा $x=20+5\times 5=20+25=45$ वर्ष;

इस कारण पिता की उम्र 45 वर्ष है।

उदाहरण 2. यदि पाँच लगातार (consecutive) पूर्ण संख्याओं का योगफल 1185 हो, तो उन संख्याओं को निकालो।

इनमें से सबसे छोटी संख्या को x द्वारा सूचित करो। अब, चूँकि दो लगातार संख्याओं का अंतरफल 1 है, इसलिए अन्य संख्यायें क्रम से $x+1$, $x+2$, $x+3$ और $x+4$ हैं।

इसलिए शर्त के अनुसार

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=1185;$$

अथवा $5x+10=1185$;

अथवा $5x=1185-10=1175$,

$$\therefore x=\frac{1175}{5}=235.$$

इसलिए, सबसे छोटी संख्या 235 है और अन्य संख्यायें 236, 237, 238, 239 हैं।

उदाहरण 3. दो आदमी एक ही समय A से चलते हैं; एक घोड़े पर चढ़कर घंटे में $7\frac{1}{2}$ मील जाता है और दूसरा रेलगाड़ी पर सवार होकर घंटे में 30 मील की चाल से जाता है। यदि पहला आदमी दूसरे आदमी से 30 मिनट पीछे B पर पहुँचे, तो A से B की दूरी निकालो। [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1873.]

फ़र्ज़ करो कि A से B की दूरी x मील है, तो जो घंटे में $7\frac{1}{2}$ मील जाता है उसे A से B तक जाने में $\frac{x}{7\frac{1}{2}}$ अर्थात् $\frac{2x}{15}$ घंटे लगेंगे, और दूसरे को $\frac{x}{30}$ घंटे लगेंगे।

इसलिए दी हुई शर्त के मुताबिक

$$\frac{2x}{15}=\frac{x}{30}+\frac{1}{2}\text{; [30 मिनट} = \tfrac{1}{2} \text{ घंटा]}$$

अथवा $4x=x+15$;

अथवा $3x=15$; $\therefore x=5$.

इसलिए A से B की दूरी $=5$ मील है।

उदाहरण 4. एक आदमी उम्र पूछने पर जवाब देता है, "10 वर्ष पहले मेरे पुत्र की उम्र से मेरी उम्र पंचगुनी थी किन्तु 20 वर्ष बाद मेरी उम्र मेरे पुत्र की उम्र से केवल दुगुनी रहेगी।" तो अब उस आदमी की उम्र कितनी है ?

फ़र्ज़ करो कि अब उस आदमी की उम्र x वर्ष है। तो दस वर्ष पहले उसकी उम्र $=(x-10)$ वर्ष थी; और उसके पुत्र की उम्र थी $=\frac{1}{5}(x-10)$ वर्ष। इसलिए अब पुत्र की उम्र $\{\frac{1}{5}(x-10)+10\}$ वर्ष है, और 20 वर्ष बाद पुत्र की उम्र $\{\frac{1}{5}(x-10)+30\}$ वर्ष होगी।

इसलिए दी हुई शर्तों के मुताबिक

$$x+20=2\{\tfrac{1}{5}(x-10)+30\}$$

$$=\tfrac{2}{5}(x-10)+60;$$

$$\therefore\ 5x+100=2x-20+300;$$

$$\therefore\ 3x=180; \qquad \therefore\ x=60.$$

अर्थात् अब उस आदमी की उम्र $=60$ वर्ष।

टीका। यदि इस उदाहरण में उस आदमी की उम्र $5x$ वर्ष मान लेते, तो प्राप्त समीकरण को हल करते समय कोई भिन्नवाला पद न रहता।

उदाहरण 5. A व B दोनों की आमदनी बराबर है; A अपनी आमदनी का पाँचवाँ हिस्सा जमा करता है; परन्तु B, साल में A से £80 अधिक खर्च करके चार साल के बाद £220 का क़र्ज़दार बन बैठता है। प्रत्येक की आमदनी कितनी है ?

मान लो कि प्रत्येक की सालाना आमदनी £x है। तो A साल में £$\frac{4}{5}x$ खर्च करता है; इसलिए B £$(\frac{4}{5}x+80)$ खर्च करता है; और इतना खर्च करके B चार साल में £220, अर्थात् एक साल में £55 का क़र्ज़दार बन बैठता है। इसलिए B का खर्च उसकी आमदनी से £55 अधिक है।

इसलिए $x=(\frac{4}{5}x+80)-55$; अथवा $\frac{1}{5}x=25$; $\therefore x=125$.

इसलिए साल में A व B की आमदनी £125 है।

उदाहरण 6. एक सौदागर ने कुछ अंडे एक पेंस में दो और उतने ही अंडे प्रति पेंस में तीन के भाव से मोल लेकर तमाम अंडे दो पेंस में पाँच अंडों की निरख से बेच दिये; इससे उसको 4 पेंस घाटा पड़ा, तो उसने सब कितने अंडे खरीदे थे ?

फ़र्ज़ करो कि तमाम अंडों की संख्या $=x$; तो आधे अर्थात् $\frac{x}{2}$ अंडे उसने एक पेंस में दो अंडों के भाव से खरीदे, और आधे, अर्थात् $\frac{x}{2}$ अंडे प्रति पेंस 3 अंडों की निरख से ख़रीदे।

इसलिए सब अंडों की खरीद का दाम

$$=\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) \text{ पेंस } =\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right) \text{ पेंस।}$$

सब अंडों को 2 पेंस में 5 अंडों के भाव से बेचने पर उसे $x\times\frac{2}{5}$ पेंस मिले।

इसलिए दी हुई शर्त के अनुसार $\frac{2x}{5}=\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)-4$;

अथवा, $24x=15x+10x-240$; $\quad\therefore\ x=240.$

इसलिए उसने 240 अंडे खरीदे थे।

उदाहरण 7. दो अंकवाली एक संख्या की इकाई के स्थान का अंक दहाई के स्थान के अंक का दुगुना है; और इन अंकों के योगफल से 2 घटाने पर अंतरफल उस संख्या का छठा हिस्सा है, तो उस संख्या को निकालो।

फ़र्ज़ करो कि संख्या की दहाई का अंक $=x$; इसलिए इकाई का अंक $=2x$;

$\therefore$ संख्या $=10x+2x$;

$=12x.$ [65 वें नियम का चौथा उदाहरण देखो।].

इसलिए दी हुई शर्त के अनुसार

$$(x+2x)-2=\frac{12x}{6}; \text{ अथवा } 18x-12=12x;$$

अथवा $6x=12$; $\quad\therefore\ x=2.$

इसलिए यह संख्या $=24.$

प्रश्नमाला 62

1. ज़मीन के एक टुकड़े की लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है; लम्बाई में 50 गज़ और चौड़ाई में 10 गज़ उससे बड़ी एक और ज़मीन के टुकड़े का क्षेत्रफल पहली ज़मीन के क्षेत्रफल से 6800 वर्गगज़ अधिक है। प्रत्येक ज़मीन के टुकड़े की लम्बाई व चौड़ाई निकालो।

2. एक कमरे की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 3 फ़ुट अधिक है ; उसकी लम्बाई को 3 फ़ुट बढ़ाने और चौड़ाई 2 फ़ुट घटाने से उसके क्षेत्रफल में कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता। कमरे की लम्बाई व चौड़ाई निकालो।

3. A व B बराबर रक़में लेकर जुआ खेलने लगते हैं ; B अपनी रक़म का $\frac{5}{11}$ वाँ हिस्सा हारता है ; और A, B की जो रक़म बच जाती है, उसके आधे से £6 अधिक जीतता है। उन दोनों ने कितनी रक़म लेकर खेल आरम्भ किया था ?

4. पिता व पुत्र की उम्र का योगफल 80 साल है, और पुत्र की उम्र का दुगुना पिता की उम्र से 10 वर्ष अधिक होता है ; तो दोनों की उम्र निकालो।

5. एक व्यक्ति कुछ मर्द व औरतों में 5 पाउंड ऐसे बाँटता है, कि प्रत्येक मर्द को 3 शिलिंग व प्रत्येक औरत को 2 शि० 6 पेंस मिले। तो पुरुष व स्त्रियों की संख्या निकालो।

6. दो स्थान एक दूसरे से 154 मील की दूरी पर हैं, A व B दो व्यक्ति उन स्थानों से रास्ते में मिलने के लिए एक हि समय चलते हैं ; A 2 घंटे में 3 मील के हिसाब से और B 4 घंटे में 5 मील के हिसाब से चलता है ; तो कितनी दूरी पर और किस समय उन दोनों की मुलाक़ात होगी ?

7. एक मज़दूर 36 दिन के लिए इस शर्त पर रक्खा गया, कि वह प्रति दिन 2 शि० 6 पें० मज़दूरी पायगा, और काम न करने पर प्रति दिन 1 शि० 6 पें० के हिसाब से हर्ज़ाना देगा। 36 दिन के बाद यदि उसको 58 शि० मिले हों तो उसने कितने दिन काम किया था ?

8. एक व्यक्ति ने जितना दाम देकर एक तसवीर खरीदी उतने ही रुपये में उसको बँधवाया ; यदि बँधवाने का खर्च एक पाउंड कम और तसवीर का मूल्य 15 शि० अधिक होता, तो बँधाई का खर्च तसवीर के मूल्य का ठीक आधा होता ; तसवीर का मूल्य निकालो।

[कलकत्ता प्रवेशिका, 1860.]

9. एक बाँस का $\frac{1}{2}$ हिस्सा कीचड़ में, $\frac{1}{3}$ हिस्सा पानी में और 10 फ़ुट पानी के उपर है ; तो बांस की लम्बाई कितनी होगी ? [कलकत्ता प्रवेशिका, 1863.]

10. एक मज़दूर 30 दिन के लिए इस शर्त पर रक्खा गया, कि वह प्रति दिन 2 शि० 6 पेंस के हिसाब से मज़दूरी पायगा। और काम न करने पर प्रति दिन उसका 1 शि० कट जायगा। उसे कुल 2 पौंड 7 शि० मिले ; तो निकालो कि उसने कितने दिन काम किया था, और कितने दिन वह बैठा था।

11. A एक काम को 9 दिन में कर सकता है, B को उस काम के करने में दुगुना समय लगता है; और C एक दिन में A के काम का $\frac{3}{4}$ हिस्सा कर सकता है। A, B, C एक साथ काम आरम्भ करने पर कितने दिन में वह काम समाप्त कर सकते हैं ?

[कलकत्ता प्रवेशिका, 1876.]

12. 54 पौंड 12 शि० में जितने पाउंड हैं, उतने ही शि० भी हैं। प्रत्येक की संख्या निकालो।

[कलकत्ता प्रवेशिका, 1885.]

13. A, B व C में एक रक़म इस प्रकार बाँट दी गई कि A को तमाम रक़म के आधे से 30 पौंड कम, B को तमाम रक़म की तिहाई से 10 पौंड कम, और C को तमाम रक़म की चौथाई से 8 पौंड अधिक मिला। प्रत्येक को क्या मिला ?

14. एक व्यक्ति कुछ भेड़ें खरीदने गया। उसे वहां मालूम हुआ कि यदि वह प्रति भेड़ 2 पौंड 2 शि० के भाव से खरीदे तो भेड़ों का मूल्य देते समय उसके पास 1 पौंड 8 शि० कम हो जायगा, और यदि प्रति भेड़ 2 पौंड के हिसाब से खरीदे तो सब भेड़ों का मूल्य देकर उसके पास 2 पौंड बच जायगा। बतलाओ कि वह कितनी भेड़ें खरीदने गया था और उसके पास कितनी रक़म थी।

15. यार्क व लंदन से जो कि 200 मील की दूरी पर हैं, दो गाड़ियाँ एक ही समय एक दूसरे की ओर चलीं; उनमें से एक यदि घंटे में $9\frac{1}{3}$ मील और दूसरी घंटे में $9\frac{1}{2}$ मील की चाल से चलती रहे, तो कितने समय के बाद और कितनी दूरी पर वे मिलेंगी ?

16. मैंने कुछ सेव एक पेनी में तीन के हिसाब से, और उन सेवों की संख्या का $\frac{5}{6}$ हिस्सा सेब एक पेनी में चार के हिसाब से खरीद कर उनको थोक में 6 पेन्स में 16 सेब के हिसाब से बेचकर कुल $3\frac{1}{2}$ पेंस मुनाफ़ा किया तो मैंने कितने सेब खरीदे थे ?

17. दो अंकवाली एक संख्या के अंकों का योगफल 5 है, और बाईं ओर के अंक में 1 जोड़ देने पर योगफल उस संख्या के आठवें हिस्से के बराबर हो जायगा। तो संख्या क्या है ?

18. दो अंकवाली किसी संख्या के दहाई के स्थान का अंक इकाई के स्थान के अंक से 5 बड़ा है; और उस संख्या में से दोनों अंकों के योगफल का पंचगुना घटाने से, संख्या के दोनों अंक उलट जाते हैं। तो संख्या निकालो।

19. दो अंकवाली किसी संख्या के अंकों का योगफल 5 है; और दहाई के स्थान के अंक के 10 गुने के साथ इकाई के स्थान के अंक का चौगुना जोड़ने पर संख्या के दोनों अंक उलट जाते हैं; तो संख्या निकालो।

20. 39 के ऐसे चार हिस्से करो, कि पहले हिस्से के साथ 1 जोड़ने पर, दूसरे हिस्से से 2 घटाने पर, तीसरे हिस्से को 3 द्वारा गुणा करने पर, और चौथे हिस्से को 4 द्वारा भाग करने पर, हर हालत में एक ही संख्या प्राप्त हो।

21. 60 के ऐसे चार हिस्से बनाओ, कि पहले हिस्से से 3 घटाने पर, दूसरे हिस्से के साथ 11 जोड़ने पर, तीसरे हिस्से को 4 द्वारा गुणा करने पर, और चौथे हिस्से को 2 द्वारा भाग करने पर, हर हालत में एक ही संख्या प्राप्त हो।

22. 116 के इस प्रकार चार हिस्से करो कि पहले हिस्से में 5 जोड़ने पर, दूसरे हिस्से से 4 घटाने पर, तीसरे हिस्से को 3 द्वारा गुणन करने पर, और चौथे हिस्से को 2 द्वारा भाग करने पर, हर हालत में एक ही संख्या प्राप्त हो।

अठारहवाँ अध्याय

सरल युगपत् समीकरण (Simple Simultaneous Equations)

और

उसकी प्रश्नावली (Problems)

I. सरल युगपत् समीकरण

176. परिचय : $x-y=2$ समीकरण में x व y दो अनजानी राशियाँ वर्तमान हैं, और यह साफ है कि इन दो अनजानी राशियों के असंख्य मूल्यों द्वारा समीकरण सिद्ध हो सकता है। [जैसे $x=4$, $y=2$; अथवा $x=5$, $y=3$; अथवा $x=6$, $y=4$; अथवा $x=-3$, $y=-5$ आदि।] फिर यदि x व y ऐसे हों कि x व y में, $x+y=8$ से समीकरण सिद्ध हो जाय, तो ऊपर दी हुई भिन्न भिन्न दो संख्याओं में से जिन दो संख्याओं का योगफल 8 होगा, उन्हीं को मालूम करना होगा। इसलिए यह पाया जाता है कि

$$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$$

∴ ये दो समीकरण x व y के एक ही मूल्य द्वारा एक साथ तभी सिद्ध हो सकते हैं जब $x=5$, और $y=3$ हो।

और फिर मालूम किया जा सकता है कि

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ x-y+z&=4 \\ x+y-z&=2 \end{aligned}\right\}$$

इन तीनों में से प्रत्येक समीकरण अलग अलग x, y व z के असंख्य मूल्यों द्वारा सिद्ध होने पर भी $x=3$, $y=1$ व $z=2$ इन्हीं तीन मूल्यों द्वारा एक साथ सिद्ध होंगे।

ऊपर दिये हुए समीकरणों की रीति से दो अथवा दो से अधिक समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण यदि उनमें दी हुई अनजानी राशियों के एक ही मूल्य द्वारा एक साथ सिद्ध हों तो उनको युगपत् समीकरण (simultaneous equations) कहते हैं। समीकरणों में अव्यक्त राशियों में से प्रत्येक राशि यदि एक घातवाली हो और समीकरणों में उनके दो अथवा दो से अधिक राशियों का गुणनफलवाला कोई पद न हो तो समीकरणों को सरल अथवा एक घातवाले युगपत् समीकरण कहते हैं।

पहले हम दो वर्ण (अथवा दो अनजानी राशि) वाले सरल युगपत् समीकरणों के विषय में विचार करेंगे। इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की साधारण रूप से तीन रीतियाँ हैं; उनके बारे में क्रमशः नीचे बतलाया जायगा।

117. पहली रीति : दिये हुए समीकरणों में दो अनजानी राशियों में से किसी एक का मूल्य दूसरी अनजानी राशि द्वारा प्रकट करके, प्राप्त मूल्य को दूसरे समीकरण में रक्खें।

उदाहरण 1. हल करो :
$$\left.\begin{aligned} 5x-24y&=16 \\ 4x-y&=31 \end{aligned}\right\}$$

दूसरे समीकरण से पाया जाता है कि $y=4x-31.$ ... (1)

y के इस मूल्य को पहले समीकरण में दिये हुए y के बदले रखने से प्राप्त होता है कि

$$5x-24(4x-31)=16;$$

अथवा $5x-96x+744=16$, प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad -91x=-728; \quad \therefore \ x=8.$$

इसलिए (1) से $y=4\times8-31=1$ प्राप्त हुआ।

$\therefore$ $x=8, y=1$; यही मूल्य हैं।

टीका 1. x व y के मूल्यों को प्रत्येक समीकरण में x व y के बदले रख करके देखना चाहिए कि वे वास्तव में दोनों समीकरणों को सिद्ध करते हैं या नहीं।

उदाहरण 2. हल करो : $\dfrac{3x-5y}{2}+3=\dfrac{2x+y}{5}$; $8-\dfrac{x-2y}{4}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}$.

पहले समीकरण के दोनों पक्षों याने तरफों को 10 द्वारा गुणा करने पर

$$5(3x-5y)+30=2(2x+y),$$

या $15x-25y+30=4x+2y$;

$\therefore\ 11x=27y-30.$ ... ... (1)

दूसरे समीकरण के प्रत्येक पक्ष को 12 द्वारा गुणा करने पर

$$96-3(x-2y)=6x+4y,$$

या $96-3x+6y=6x+4y$;

$\therefore\ 2y-9x+96=0.$ ... ... (2)

(1) से $x=\dfrac{27y-30}{11}.$ ... ... (3)

x के इस मूल्य को (2) में x की जगह रख कर

$$2y-\frac{9(27y-30)}{11}+96=0\ ;$$

$\therefore\ 22y-9(27y-30)+1056=0,$

अथवा $22y-243y+270+1056=0$;

$\therefore\ 221y=1326$; $\therefore\ y=6.$

इसलिए (3) से $x=\dfrac{27\times 6-30}{11}=\dfrac{132}{11}=12.$

$\therefore\ x=12$ और $y=6.$

प्रश्नमाला 63

नीचे दिये हुए समीकरणों को हल करो :

1. $\left.\begin{array}{l} x+4y=14 \\ 7x-3y=5 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} 5x-8y=9 \\ 13x+7y=79 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=32 \\ 11y-9x=3 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 9x-4y=8 \\ 13x+7y=101 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} x+ay=b \\ ax-by=c \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} 2x-\frac{1}{5}(y-3)=4 \\ 3y+\frac{1}{8}(x-2)=9 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{3}(2x+4) \\ \frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{2}(x-24) \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{4}(y-1) \\ \frac{1}{7}(4x-5y)=x-7 \end{array}\right\}$

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1872.]

9. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(3x-2y)-3=\frac{1}{4}(2x-y) \\ \frac{1}{2}(5x-4y)-3=\frac{1}{3}(4x-3y) \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{6}(2x+3y)+\frac{1}{3}x=8 \\ \frac{1}{2}(7y-3x)-y=11 \end{array}\right\}$

118. दूसरी रीति : प्रत्येक समीकरण में अनजानी राशियों में से किसी एक का (फ़र्ज़ करो y का) मूल्य दूसरी अनजानी राशि (अर्थात् x) द्वारा प्रकट करके इस तरह प्राप्त मूल्यों को समताचिह्न "=" द्वारा प्रकट करें।

उदाहरण 1. हल करो : $6x-5y=11,\ 2x+3y=27.$

पहले समीकरण से $\quad 5y=6x-11.$

$$\therefore\quad y=\frac{6x-11}{5}. \quad \dots \qquad \dots \quad (1)$$

दूसरे समीकरण से $\quad 3y=27-2x.$

$$\therefore\quad y=\frac{27-2x}{3}. \quad \dots \qquad \dots \quad (2)$$

इसलिए (1) व (2) से $\quad \dfrac{6x-11}{5}=\dfrac{27-2x}{3};$

$$\therefore\quad 3(6x-11)=5(27-2x);$$

अथवा $\quad 18x-33=135-10x;$

$$\therefore\quad 28x=168; \qquad \therefore\quad x=6.$$

इसलिए (1) से $\quad y=\dfrac{6\times 6-11}{5}=5.$

इसलिए $\quad x=6$ और $y=5.$

उदाहरण 2. हल करो :

$$\left.\begin{aligned}\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}&=3y-5\\ \frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}&=18-5x.\end{aligned}\right\}$$

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1880.]

पहले समीकरण के दोनों तरफ़ों को 20 द्वारा गुणा करने पर

$$4(7+x)-5(2x-y)=20(3y-5);$$

अथवा $\quad 28-6x+5y=60y-100;$

$$\therefore\quad 55y+6x=128. \quad \dots \qquad \dots \quad (1)$$

दूसरे समीकरण के दोनों तरफ़ों को 6 द्वारा गुणा करने पर

$$3(5y-7)+(4x-3)=6(18-5x);$$

अथवा $\quad 15y-21+4x-3=108-30x;$

$$\therefore\quad 34x+15y=132. \quad \dots \qquad \dots \quad (2)$$

$$(1) \text{ से} \qquad y=\frac{128-6x}{55}; \quad \ldots \qquad \ldots \quad (3)$$

$$\text{और } (2) \text{ से} \qquad y=\frac{132-34x}{15}. \quad \ldots \qquad \ldots \quad (4)$$

$\therefore$ (3) व (4) से

$$\frac{128-6x}{55}=\frac{132-34x}{15}; \quad \text{अथवा} \quad \frac{64-3x}{11}=\frac{66-17x}{3};$$

$$\therefore \quad 3(64-3x)=11(66-17x);$$

[दोनों पक्षों को 33 द्वारा गुणा करने पर]

$$\text{अथवा} \quad 192-9x=726-187x;$$

$$\therefore \quad 178x=534; \quad \therefore \quad x=3.$$

$$\text{इसलिए } (3) \text{ से} \qquad y=\frac{128-6\times 3}{55}=\frac{110}{55}=2.$$

इसलिए $x=3$ और $y=2$.

प्रश्नमाला 64

नीचे दिये हुए समीकरणों को हल करो :

1. $\left.\begin{aligned} 5x-3y&=9 \\ 5y+2x&=16 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 3y-4x&=1 \\ 3x+4y&=18 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} 3x-7y&=7 \\ 11x+5y&=87 \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} y(3+x)&=x(7+y) \\ 4x+9&=5y-14 \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} 32x-25y&=28 \\ 14x+15y&=116 \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{7}(3x+y)&=\tfrac{1}{5}(2x+y+1) \\ 8-\tfrac{1}{5}(x-y)&=6 \end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{13}(5x-6y)+3x&=4y-2 \\ \tfrac{1}{8}(5x+6y)-\tfrac{1}{4}(3x-2y)&=2y-2 \end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} 2x-\tfrac{1}{4}(y+3)&=7+\tfrac{1}{6}(3y-2x) \\ 4y+\tfrac{1}{8}(x-2)&=26\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}(2y+1) \end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned} 2x-\tfrac{1}{3}(2y-1)&=3\tfrac{5}{24}+\tfrac{1}{4}(3x-2y) \\ 4y-\tfrac{1}{4}(5-2x)&=6-\tfrac{1}{6}(3-2y) \end{aligned}\right\}$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1873.]

10. $\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{y}=1, \quad \dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{y}=3.$ [इलाहाबाद, 1923.]

119. तीसरी रीति : दोनों समीकरणों को ऐसी दो संख्याओं द्वारा गुणा करो कि गुणा करने पर जो दो समीकरण प्राप्त हों उनमें अनजानी राशियों में से किसी एक के गुणक दोनों में एक ही हों। तो इन दो समीकरणों को जोड़ने अथवा घटाने पर ऐसा समीकरण प्राप्त होगा जिसमें केवल एक अनजानी राशि रहेगी।

उदाहरण 1. हल करो : $\left.\begin{aligned} 3x - 4y &= 5 \\ 5x + 2y &= 17 \end{aligned}\right\}$

दूसरे समीकरण को 2 द्वारा गुणा करने पर

मिलता है $\left.\begin{aligned} 10x + 4y &= 34 \\ \text{और पहला समीकरण } 3x - 4y &= 5 \end{aligned}\right\}$

इसलिए जोड़ने पर $13x = 39$; $\therefore \; x = 3.$

पहले समीकरण में x का यह मूल्य बिठाने पर $4y = 9 - 5 = 4$; $\therefore \; y = 1.$

इसलिए $x = 3, \; y = 1.$

उदाहरण 2. हल करो : $\left.\begin{aligned} 5x + 9y &= 89 \\ 2x - 17y &= 15 \end{aligned}\right\}$

पहले समीकरण को 2 से और दूसरे को 5 से गुणा करने पर

मिलता है $\left.\begin{aligned} 10x + 18y &= 178 \\ \text{और } 10x - 85y &= 75 \end{aligned}\right\}$

इसलिए घटाने पर मिलता है $103y = 103$; $\therefore \; y = 1.$

दूसरे समीकरण में y का मूल्य बिठाने पर, मिलता है

$2x = 15 + 17 = 32$; $\therefore \; x = 16.$

इसलिए $x = 16$ व $y = 1.$

टीका। उपर दी हुई क्रिया के बदले यदि हम पहले समीकरण को 17 द्वारा और दूसरे को 9 द्वारा गुणा करते, और ऐसा करने पर जो दो समीकरण प्राप्त होते उनको जोड़ देते तो x का मूल्य निकालनेवाला समीकरण पहले मिलता। परन्तु उपर दी हुई क्रिया द्वारा हल करने का कारण यह है कि दोनों समीकरणों में x के गुणक छोटी संख्या में होने के कारण गुणन करना सरल हुआ।

उदाहरण 3. हल करो : $\left.\begin{aligned} 23x - 24y &= 21 \\ 25x - 16y &= 43 \end{aligned}\right\}$

पहले समीकरण को 2 द्वारा और दूसरे को 3 द्वारा गुणा करने से प्राप्त होता है

$\left.\begin{aligned} 46x - 48y &= 42 \\ \text{और } 75x - 48y &= 129 \end{aligned}\right\}$

इसलिए घटाने पर मिलता है $29x = 87$; $\therefore \; x = 3.$

दूसरे समीकरण में x की जगह उसका मूल्य रखने पर, मिलता है

$16y = 75 - 43 = 32$; $\therefore \; y = 2.$

$\therefore \; x = 3$ व $y = 2.$

टीका। इस बात पर ध्यान देना चाहिए कि गुणा करने के बाद जो दो समीकरण मिलते हैं उनमें y का गुणक, दिये हुए समीकरणों के y के गुणकों (24 व 16) का लघुतम समापवर्त्य है। अगर पहला समीकरण 16 व दूसरा 24 से गुणा किया जाता तो क्रिया अनावश्यक ढंग से कठिन हो जाती।

उदाहरण 4. हल करो :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x+y}{14}=\dfrac{x-y-1}{8}-\dfrac{y+12}{4},\\[2mm] \dfrac{x+7}{3}+\dfrac{y-5}{10}=1-x-\dfrac{5(y+1)}{7}\end{array}\right\}$$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1882.]

पहले समीकरण से

$$\frac{7(x-2)-(x+y)}{14}=\frac{(x-y-1)-2(y+12)}{8};$$

अथवा $$\frac{6x-y-14}{7}=\frac{x-3y-25}{4},$$

अथवा $$24x-4y-56=7x-21y-175,$$

अथवा $$17x+17y=-119;$$

अथवा $$x+y=-7. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

दूसरे समीकरण से

$$\frac{10(x+7)+3(y-5)}{30}=\frac{7(1-x)-5(y+1)}{7};$$

अथवा $$\frac{10x+3y+55}{30}=\frac{2-7x-5y}{7},$$

अथवा $$70x+21y+385=60-210x-150y;$$

अथवा $$280x+171y=-325. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) को 171 द्वारा गुणा करने से प्राप्त होता है

$$\left.\begin{array}{rl} & 171x+171y=-1197\\ \text{और} & 280x+171y=-325.\end{array}\right\}$$

इसलिए घटाने पर $109x=872$; $\therefore\ x=8.$

x का मूल्य (1) में x की जगह रखने पर प्राप्त होता है $y=-7-8=-15.$

$$\therefore \quad x=8 \text{ व } y=-15.$$

उदाहरण 5. हल करो : $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1\\[2mm] \dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{y}=1\tfrac{7}{8}\end{array}\right\}$$

पहले समीकरण को 4 से और दूसरे को 3 से गुणा करने पर मिलता है

$$\frac{8}{x}+\frac{12}{y}=4 \quad \text{और} \quad \frac{21}{x}+\frac{12}{y}=\frac{45}{8}.$$

इसलिए घटाने पर $\frac{13}{x}=\frac{13}{8}$; $\therefore$ $x=8$.

पहले समीकरण में x की जगह उसका मूल्य रखने पर

$$\frac{3}{y}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ ; \quad \therefore \ y=4.$$

इसलिए $x=8$ और $y=4$.

प्रश्नमाला 65

नीचे दिये हुए समीकरणों को हल करो :

1. $\left.\begin{array}{l}7x-5y=11\\3x+2y=13\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}13x+6y=58\\5x-11y=9\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}8x-9y=20\\7x-10y=9\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}25x-14y=8\\12x+7y=45\end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{l}12x+11y=70\\8x-7y=18\end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{l}13x-14y=22\\17x-21y=18\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}28x-15y=41\\21x+13y=55\end{array}\right\}$ 8. $\left.\begin{array}{l}19x+24y=34\\23x+36y=62\end{array}\right\}$ 9. $\left.\begin{array}{l}47x-56y=123\\25x+84y=293\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}51x-16y=3\\68x+23y=137\end{array}\right\}$ 11. $\left.\begin{array}{l}52x-9y=34\\39x+14y=67\end{array}\right\}$ 12. $\left.\begin{array}{l}12x+85y=-49\\19x-34y=91\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l}65x-14y=9\\91x-15y=31\end{array}\right\}$ 14. $\left.\begin{array}{l}15x+46y=17\\13x+69y=73\end{array}\right\}$ 15. $\left.\begin{array}{l}14x+81y=53\\17x+135y=101\end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l}5x+11y=146\\11x+5y=110\end{array}\right\}$ 17. $\left.\begin{array}{l}ax+by=c\\a^2x+b^2y=c^2\end{array}\right\}$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1881.]

18. $\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{2}+\frac{3x-5y}{4}=2\\[4pt]\frac{x}{14}+\frac{y}{18}=1\end{array}\right\}$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1876.]

19. $\left.\begin{array}{l}\frac{4x+5y}{40}=x-y\\[4pt]\frac{2x-y}{3}+2y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ 20. $\left.\begin{array}{l}\frac{4x-3y-7}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{2y}{15}-\frac{5}{6}\\[4pt]\frac{y-1}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3y}{20}=\frac{y-x}{15}+\frac{x}{6}+\frac{11}{10}\end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{aligned}\frac{5x-3y}{12}+\frac{7x-5y}{15}&=1-\frac{25x+3y}{60}\\ \frac{(3\frac{1}{2})x+2y-5}{16}+\frac{11x-(4\frac{1}{3})y+17}{11}&=\frac{19}{22}+\frac{17x-10y+2}{3}\end{aligned}\right\}$

22. $\left.\begin{aligned}\frac{3x-5y}{3}-\frac{2x-8y-33}{12}&=\frac{y}{2}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\\ 3\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{7}+\frac{y}{4}+1\tfrac{1}{3}\right)&=3\tfrac{1}{3}\left(4x-\frac{y}{8}-24\right)\end{aligned}\right\}$

23. $\left.\begin{aligned}2{\cdot}4x+{\cdot}32y-\frac{{\cdot}18x-{\cdot}025}{{\cdot}25}&={\cdot}8x+\frac{5{\cdot}2+{\cdot}01y}{{\cdot}5}\\ \frac{{\cdot}2y+{\cdot}5}{1{\cdot}5}&=\frac{{\cdot}49x-{\cdot}7}{4{\cdot}2}\end{aligned}\right\}$

24. $\left.\begin{aligned}\frac{4}{x}+\frac{10}{y}&=2\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}&=\frac{19}{20}\end{aligned}\right\}$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1879.]

25. $\left.\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}&=2\\ \frac{5}{x}+\frac{10}{y}&=5\tfrac{5}{6}\end{aligned}\right\}$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1887.]

26. $\left.\begin{aligned}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}&=m\\ \frac{b}{x}+\frac{a}{y}&=n\end{aligned}\right\}$

27. $\left.\begin{aligned}\frac{1}{3x}+\frac{1}{5y}&=1\\ \frac{1}{5x}+\frac{1}{3y}&=1\tfrac{2}{15}\end{aligned}\right\}$

28. $\left.\begin{aligned}\frac{3}{y}-\frac{1}{x}&=1\\ \frac{2}{5x}+\frac{5}{2y}&=7\end{aligned}\right\}$

29. $\left.\begin{aligned}\frac{x}{4}+\frac{2}{y}&=2\\ \frac{2x}{5}+\frac{3}{2y}&=2\tfrac{7}{20}\end{aligned}\right\}$

30. $\left.\begin{aligned}\frac{1}{5x}+\frac{y}{9}&=5\\ \frac{1}{3x}+\frac{y}{2}&=14\end{aligned}\right\}$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1870.]

II. सरल युगपत् समीकरण की प्रश्नावली

(सरल)

120. उदाहरण 1. A व B के पास कुछ आम थे। A ने B से कहा, "तुम अपने आमों में से यदि मुझे 30 आम दो तो मेरे पास तुम्हारे आमों के दुगुने आम हो जायँगे।" B ने उत्तर दिया, "यदि तुम मुझे 10 आम दो तो मेरे पास तुम्हारे आमों के तिगुने आम हो जायँगे।" प्रत्येक के पास कितने आम थे?

फर्ज़ करो कि A के पास x आम और B के पास y आम थे।

तो A के कहने के अनुसार $x+30=2(y-30)$ ... ... (1)

और B के कहने के अनुसार $y+10=3(x-10)$ ... ... (2)

(2) से $3x-y=40$;

अथवा $6x-2y=80$ ... ... (3)

(1) से $x-2y=-90.$ ... ... (4)

इसलिए घटाने पर $5x=170$; $\therefore x=34.$

(4) में x की जगह उसका मूल्य रखने पर

$$2y=34+90=124; \quad \therefore y=62.$$

इसलिए A के पास 34 और B के पास 62 आम थे।

उदाहरण 2. किसी भिन्न के अंश के साथ 7 जोड़ने पर वह 2 बन जाता है और उसके हर में से 2 घटाने पर वह 1 बन जाता है। भिन्न को निकालो।

मान लो कि भिन्न $=\frac{x}{y}$.

तो $\frac{x+7}{y}=2$; ... ... (1)

और $\frac{x}{y-2}=1.$ ... ... (2)

अब (1) से $x+7=2y$; $\therefore x=2y-7$

अब (2) से $x=y-2$

$\therefore 2y-7=y-2$; $\therefore y=5$ और $x=5-2=3$

इसलिए यह भिन्न $=\frac{3}{5}$.

उदाहरण 3. 4 मर्द और 4 लड़के जिस काम को 3 दिन में कर सकते हैं, 2 मर्द और 7 लड़के उस काम को 4 दिन में कर सकते हैं। एक मर्द या एक लड़का उस काम को कितने दिन में कर सकेगा ?

फर्ज़ करो कि एक मर्द x दिन में और एक लड़का y दिन में काम को कर सकता है; तो एक दिन में एक मर्द उस काम का $\frac{1}{x}$ हिस्सा और एक लड़का उस काम का $\frac{1}{y}$ हिस्सा कर सकता है।

इसलिए, दूसरे शर्त के अनुसार $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=\frac{1}{4}$; ... ... (1)

और पहली शर्त के अनुसार $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3}$. ... ... (2)

(1) को 2 द्वारा गुणा करके जो समीकरण प्राप्त हो उसमें से (2) को घटाने पर

$$\frac{10}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}; \quad \therefore y=60.$$

इसलिए (2) से $\frac{4}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$; $\therefore x-15.$

इसलिए एक मर्द उस काम को 15 दिन में और एक लड़का 60 दिन में पूरा कर सकता है।

उदाहरण 4. 192 गैलन पानी से भरे एक हौज़ के नीचे पानी निकालने के लिए दो नल लगाये गये हैं। दोनों नलों को एक ही साथ खोल कर, 3 घंटे के बाद एक को बन्द करने पर हौज़ इस बन्द होने के 11 घंटे के बाद खाली हुआ; परन्तु यदि इस नल को 6 घंटे बाद बन्द किया जाता, तो इस बन्द होने के 6 घंटे बाद हौज़ खाली हो जाता। यदि पानी एक ही चाल से बराबर निकलता हो तो प्रत्येक से घंटे में कितना पानी निकलता है ?

मान लो कि नलों से एक घंटे में अलग अलग x व y गैलन पानी निकलता है।

तो पहली शर्त के अनुसार पहला नल 3 घंटे और दूसरा नल $3+11=14$ घंटे खुला था।

$$\therefore \quad 3x+14y=192 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

और दूसरी शर्त के अनुसार पहला नल 6 घंटे और दूसरा नल 12 घंटे खुला था।

$$\therefore \quad 6x+12y=192 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) को 2 से गुणा करके जो समीकरण प्राप्त हो उसमें से (2) को घटाने पर

$$16y=2\times192-192=192\,; \qquad \therefore \ y=12.$$

इसलिए (2) से $6x=192-144=48\,;$ $\qquad \therefore \ x=8.$

$\therefore$ दोनों नलों से एक घंटे में क्रमशः 8 व 12 गैलन पानी निकलता है।

उदाहरण 5. आयत रूप के एक आँगन की लम्बाई व चौड़ाई ऐसी है कि उसकी लम्बाई को 3 गज़ बढ़ाने पर और चौड़ाई को 3 गज़ घटाने पर क्षेत्रफल 18 वर्गगज़ कम हो जाता है; और लम्बाई 3 गज़ और चौड़ाई 3 गज़ बढ़ाने पर क्षेत्रफल 60 वर्गगज़ बढ़ जाता है। आँगन की लम्बाई व चौड़ाई निकालो। [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1888.]

फर्ज़ करो कि आँगन की लम्बाई x गज़ और चौड़ाई y गज़ है।

तो पहली शर्त के अनुसार $(x+3)(y-3)=xy-18\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

और दूसरी शर्त के अनुसार $(x+3)(y+3)=xy+60\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) से $3y-3x=-9,$

अथवा $y-x=-3, \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

(2) से $3y+3x=51,$

अथवा $y+x=17 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

(3) व (4) को जोड़ कर $2y=14\,; \qquad \therefore \ y=7.$

इसलिए (4) से $x=17-7=10.$

इसलिए आंगन की लम्बाई 10 गज़ और चौड़ाई 7 गज़ हुई।

उदाहरण 6. दो अंकवाली किसी संख्या के दोनों अंकों के योगफल के साथ 7 जोड़ने पर जोड़ दहाई के स्थान के अंक का तिगुना हो जायगा ; परन्तु उस संख्या से 18 घटाने पर उसके दोनों अंक उलट जाते हैं। तो संख्या निकालो।

फर्ज़ करो कि x दहाई और y इकाई के स्थान का अंक है।

तो प्रश्न की शर्तों के अनुसार

$$x+y+7=3x \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

और $$(10x+y)-18=10y+x \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) से $$2x-y=7\,; \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

और (2) से $$9x-9y=18, \quad \text{अथवा} \quad x-y=2 \quad \ldots \quad (4)$$

(3) से (4) घटाने पर $x=5$; $\therefore$ (4) से $y=5-2=3$.

इसलिए यह संख्या $=53$.

उदाहरण 7. A व B इस शर्त पर जुआ खेलते हैं कि जितनी बार A बाज़ी जीतेगा वह हर मर्तबा B से 2 शि० पायगा ; और जितनी बार हारेगा हर मर्तबा B को 3 शि० देगा। कई बार खेलने के बाद मालूम पड़ा कि A ने 3 शि० जीते हैं। परन्तु यदि A प्रत्येक बार हारने पर B को 5 शि० देता, और जितनी बार खेल हुआ है उस में A एक बार और हारता तो उसे 30 शि० का नुक़सान होता। प्रत्येक ने कितनी बाज़ियाँ जीतीं ?

$x=A$ को जीती बाज़ियों की संख्या

$y=B$,, ,, ,,

तो स्पष्ट मालूम होता है कि $x+y$ बार खेल हुआ।

अब, चूँकि A प्रति बार जीतने पर B के पास से 2 शि० पाता है, और प्रति बार हारने पर (अर्थात् B के प्रति बार जीतने पर) B को 3 शि० देता है, तो A को $2x-3y$ शि० नफ़ा हुआ। इसलिए $2x-3y=3$. ... ... (1)

और दूसरी शर्त के अनुसार A को $2(x-1)$ शि० नफ़ा और $5(y+1)$ शि० नुक़सान होता है।

इसलिए उसका कुल नुक़सान $[5(y+1)-2(x-1)]$ शि० होता,

इसलिए $$5(y+1)-2(x-1)=30\,;$$

अथवा $$5y-2x=23. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर $2y=26$; $\therefore y=13$.

$$\text{इसलिए (1) से } x=\frac{3+39}{2}=21.$$

इसलिए A ने 21 बाज़ियाँ और B ने 13 बाज़ियाँ जीतीं।

प्रश्नमाला 66

1. किसी भिन्न के अंश को दुगुना करने और हर के साथ 7 जोड़ने पर उसका मूल्य $\frac{2}{3}$ होता है, किन्तु हर को दुगुना करने और अंश के साथ 2 जोड़ने पर उसका मूल्य $\frac{3}{5}$ होता है ; तो निकालो भिन्न क्या है।

2. दो संख्याओं में से पहली को दूसरी के पँचगुने के साथ जोड़ने पर योगफल 52 होता है ; किन्तु दूसरी को पहली संख्या के अठगुने के साथ जोड़ने पर योगफल 65 होता है ; तो निकालो, ये दो संख्यायें क्या हैं।

3. दो संख्याओं में बड़ी का पँचगुना, छोटी संख्या के चार गुने से 22 अधिक है, और बड़ी संख्या के तिगुने और छोटी संख्या के सात गुने का योगफल 32 है ; तो दोनों संख्यायें क्या हैं ?

4. दो संख्याओं का अन्तर 45 और भजनफल 4 है, तो संख्याओं को निकालो।

5. ऐसी दो संख्यायें निकालो जिनमें से बड़ी संख्या का $\frac{1}{4}$ हिस्सा और छोटी संख्या के $\frac{1}{3}$ हिस्से का योगफल 11 हो और अगर बड़ी संख्या का $\frac{1}{5}$ हिस्सा और छोटी संख्या का $\frac{1}{6}$ हिस्सा घटाया जाय तो शेष कुछ न रहे।

6. किसी भिन्न के हर से 1 घटाने पर वह $\frac{1}{3}$ बन जाता है, और अंश के साथ 7 जोड़ने पर वह 1 बन जाता है ; तो भिन्न निकालो।

7. किसी भिन्न के अंश के साथ 1 जोड़ने पर उसका मूल्य 1 होता है, किन्तु हर के साथ 1 जोड़ने पर उसका मूल्य $\frac{1}{2}$ होता है ; तो भिन्न निकालो। [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1862.]

8. किसी भिन्न के अंश के साथ 1 जोड़ने पर वह $\frac{1}{2}$ बन जाता है और हर के साथ 1 जोड़ने पर उसका मूल्य $\frac{1}{3}$ होता है ; तो बतलाओ कि भिन्न क्या है।

9. A व B के पास मिलाकर 39 रुपये हैं, किन्तु A यदि अपनी रक़म का $\frac{2}{3}$ हिस्सा और B अपनी रक़म का $\frac{3}{4}$ हिस्सा खो डाले, तो उन दोनों के पास केवल 11 रुपया रह जायगा ; तो बतलाओ कि प्रत्येक के पास कितने रुपये हैं।

10. दो संख्यायें ऐसी हैं कि छोटी संख्या के साथ 7 जोड़ने पर योगफल बड़ी संख्या का दुगुना होगा, और बड़ी संख्या के साथ 4 जोड़ने पर योगफल छोटी संख्या का तिगुना होगा ; तो बतलाओ कि ये दो संख्यायें क्या क्या हैं।

11. दो मनुष्य 27 मील की दूरी से, एक ही समय चलकर एक ही ओर जाते हैं, और 9 घंटे में मिलते हैं, परन्तु उलटी ओर चलने पर 3 घंटे में मिलते हैं, तो प्रत्येक की चाल निकालो।

12. एक साहूकार को 10 पाउंड की रक़म सावरेन (sovereign) और अर्द्धक्राउनों में इस प्रकार देने को कहा गया, कि अर्द्धक्राउनों की संख्या सावरेनों की संख्या की दूनी हो; तो वह किस प्रकार यह रक़म देगा ?

13. एक मर्द और एक लड़का एक काम को एक साथ 15 दिन में कर सकते हैं; और उसी काम को 7 मर्द और 9 लड़के 2 दिन में कर सकते हैं। तो एक आदमी कितने दिन में उस काम को कर सकेगा ?

14. एक आयत खेत दूसरे एक खेत के क्षेत्रफल के बराबर है, जो कि लम्बाई में 6 गज़ बड़ा और चौड़ाई में 4 गज़ छोटा है; और तीसरे एक खेत के बराबर है जो कि लम्बाई में 8 गज़ बड़ा और चौड़ाई में 5 गज़ छोटा है। उसका क्षेत्रफल कितना है ?

15. 15 पाउंड चाय और 17 पाउंड काफ़ी का मूल्य मिलाकर 3 पा० 5 शि० 6 पें० है; और 25 पाउंड चाय और 13 पाउंड काफ़ी का मूल्य मिलाकर 4 पा० 6 शि० 2 पें० है, तो बतलाओ कि प्रत्येक के एक एक पाउंड का मूल्य कितना है।

16. 30 मील जाने पर A को B से 3 घंटे अधिक समय लगा; परन्तु चाल तेज़ करने पर उसे B से 2 घंटे कम समय लगा। तो दोनों की चाल की तेज़ी बतलाओ।

17. राम ने कृष्ण से कहा, "यदि तुम अपनी गोलियों में से मुझे 10 गोलियां दो तो मेरे पास तुमसे दुगुनी गोलियां हो जायंगी।" कृष्ण ने राम से कहा कि यदि तुम मुझे अपनी 10 गोलियां दो तो मेरे पास तुमसे तिगुनी गोलियां हो जायंगी। बतलाओ कि प्रत्येक के पास कितनी गोलियां थीं।

18. A, B व C में 1100 रुपये इस प्रकार बंटे कि रुपया बंटने के बाद A, B को 200 रुपये देता, तो B, A का दुगुने और C का तिगुने रुपये पाता। बतलाओ कि पहले A, B व C प्रत्येक को कितने रुपये मिले थे। [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1872.]

19. दो अंकवाली किसी संख्या को उसके दोनों अंकों के योगफल द्वारा भाग देने पर भजनफल 6 और अन्तर 3 होता है; दोनों अंकों को उल्टे रूप में लिखने पर जो संख्या प्राप्त हो उसको दोनों अंकों के योगफल द्वारा भाग करने पर भजनफल 4 और शेष 9 होता है। बतलाओ संख्या क्या है।

20. दो अंकवाली एक ऐसी संख्या बतलाओ, कि उसके अंकों को उलटकर लिखने पर जो संख्या प्राप्त होती है, उसको दी हुई संख्या के साथ जोड़ने पर योगफल 121 होता है और छोटी संख्या को बड़ी में से घटाने पर शेषफल 9 होता है।

21. क्राउन और आधी गिन्नियों द्वारा 25 गिन्नियों का एक बिल अदा किया गया; आधी गिन्नियों की संख्या का दुगुना यदि क्राउनों की संख्या के तिगुने से 17 अधिक हो, तो बतलाओ कि प्रत्येक की संख्या क्या है।

22. एक मनुष्य किसी गाहक के पास 9 घोड़े और 7 गायें 300 पाउंड में बेचता है; वह दूसरे एक गाहक के पास उसी दर और मूल्य में 6 घोड़े और 13 गायें भी बेचता है; बतलाओ एक घोड़े और एक गाय का मूल्य कितना है।

23. A और B क्रमशः 15 दिन और 14 दिन काम करके 5 पा॰ 17 शि॰ मजूरी पाते हैं। B की तीन दिन की मजूरी से A के चार दिन की मजूरी 11 शि॰ अधिक हो तो बतलाओ प्रत्येक की एक दिन की मजूरी कितनी है।

24. A व B एक काम 16 दिन में कर सकते हैं; 4 दिन एक साथ काम करने के बाद A बैठ गया, और B ने उस काम को 36 दिन में ख़तम किया। ये दोनों अलग अलग कितने दिन में काम को खतम कर सकते हैं?

25. किसी भिन्न के अंश में 2 और हर में 1 जोड़ने पर भिन्न $\frac{5}{6}$ बन जाता है; और अंश व हर प्रत्येक में से 1 घटाने पर भिन्न $\frac{1}{2}$ बन जाता है; तो बतलाओ भिन्न क्या है।

26. एक मनुष्य कुछ दूर तक चलता है; यदि वह प्रति घंटे $\frac{1}{2}$ मील और तेज़ चलता तो वह उतनी दूर उस समय के $\frac{4}{5}$ वें हिस्से में जा सकता; परन्तु यदि वह घंटे में आध मील कम चले तो उसे $2\frac{1}{2}$ घंटे अधिक समय लगता। तो बतलाओ कि वह मनुष्य कितनी दूर तक चला था।

27. 10 और 100 के बीच एक ऐसी संख्या बतलाओ जो कि उसके अंकों के योगफल का अठगुना हो; और जिसमें से 45 घटाने पर जो अंतरफल निकले वह उस संख्या के अंकों का उल्टा हो।

28. A व B 10 शि॰ की बाज़ी लगाते हैं; यदि A हारे, तो उसके पास जो रक़म बच रहेगी वह B के उस समय की रक़म के दुगुने से 25 शि॰ कम होगी। परन्तु B यदि हारे तो B के पास जो रक़म बच रहेगी वह A के पास की उस समय की रक़म का $\frac{5}{17}$ हिस्सा होगी। तो बतलाओ कि प्रत्येक के पास कितनी रक़म थी।

29. एक मनुष्य ने कुछ भेड़ें खरीदनी चाहीं; और वह देखता है कि यदि एक भेड़ का मूल्य 2 पा॰ 2 शि॰ हो, तो उसके पास 1 पा॰ 8 शि॰ की कमी होगी; परन्तु यदि एक भेड़ का मूल्य 2 पाउंड हो, तो उसके पास आवश्यक मूल्य से 2 पा॰ अधिक बचेगा। बतलाओ कि वह कितनी रक़म लेकर कितनी भेड़ें खरीदने गया था।

30. दो अंकवाली एक संख्या अपने दोनों अंकों का योगफल की तिगुनी है; और उस संख्या को 3 से गुणन करने पर गुणनफल उन दो अंकों का योगफल का वर्ग होगा। बतलाओ कि वह संख्या क्या है।

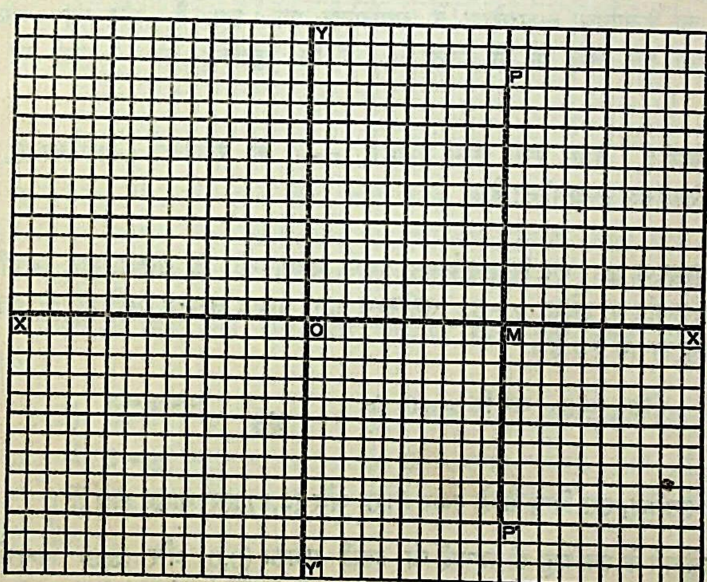
उन्नीसवाँ अध्याय

सरल समीकरणों के रेखाचित्र

(Graphs of Simple Equations)

121. संख्याओं के रेखागणित के रेखाबिन्दु द्वारा किस प्रकार प्रकट करते हैं वह सातवें अध्याय में बतलाया गया है ; अब सरल समीकरणों को रेखाचित्र द्वारा किस प्रकार प्रकट किया जा सकता है, इस पर विचार किया जायगा। नीचे दिये हुए उदाहरणों से यह विषय अच्छी तरह स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण 1. एक विन्दु यदि इस प्रकार चलता रहे कि उसका भुज (abscissa) हमेशा 5 इकाई हो तो उस विन्दु का पथ क्या है बतलाओ।



फ़र्ज़ करो कि छोटे-छोटे वर्गों के एक बाहु का दूना, लम्बाई की इकाई है।

OX (अर्थात् x-अक्षरेखा) के ऊपर एक विन्दु M इस प्रकार लो कि $OM=5$ इकाई हो। M विन्दु से YOY' के समानान्तर PMP' रेखा खींचो।

अब स्पष्ट मालूम होता है कि PMP' रेखा पर किसी भी विन्दु का भुज 5 इकाई होगा इसलिए उस विन्दु का पथ हमेशा PMP' रेखा होगी।

$\therefore$ एक विन्दु यदि इस प्रकार चलता रहे कि उसका भुज हमेशा 5 इकाई है, तो उसका विन्दुपथ PMP' रेखा द्वारा सूचित होता है। इसी को संक्षेप में कहा जाता है PMP' सरल रेखा $x=5$ इस समीकरण का रेखाचित्र है।

टीका 1. इससे यह स्पष्ट विदित होता है कि $y=5$ समीकरण का रेखाचित्र XOX' के समानान्तर एक सरल रेखा है।

टीका 2. साधारण रूप से कहा जा सकता है कि $x=a$ समीकरण का रेखाचित्र y-अक्षरेखा के समानान्तर एक रेखा है, और x-अक्षरेखा के ऊपर ऐसी एक विन्दु से जाती है जो कि मूलविन्दु (origin) से a-इकाई की दूरी पर है; इसी प्रकार $y=b$ समीकरण का रेखाचित्र x-अक्षरेखा के समानान्तर एक रेखा है, और वह y-अक्षरेखा के ऊपर ऐसी एक विन्दु पर से जाती है, जो कि मूलबिन्दु से b-इकाई की दूरी पर है।

टीका 3. इससे स्पष्ट जाना जाता है, $x=0$ का रेखाचित्र y-अक्षरेखा है, और $y=0$ का रेखाचित्र x-अक्षरेखा है।

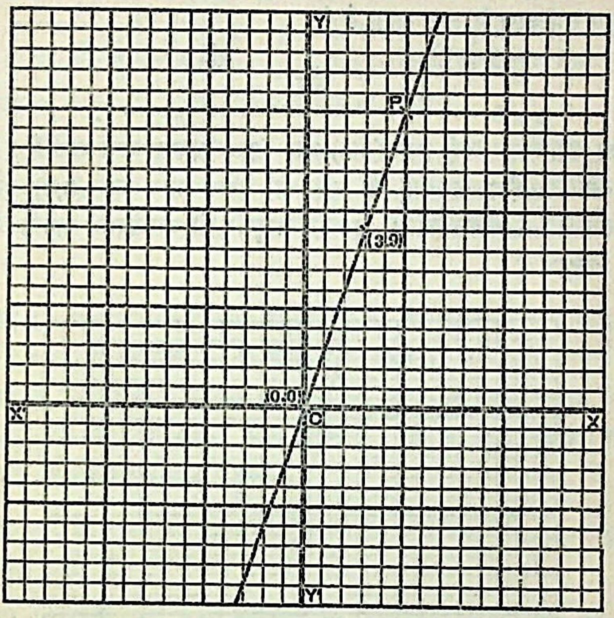
उदाहरण 2. एक विन्दु यदि इस प्रकार चलता रहे कि उसका भुज (अर्थात् x) और कोटि (अर्थात् y) हमेशा $y=3x$ समीकरण द्वारा परस्पर सम्बन्ध रखते हों, तो बतलाओ कि उस विन्दु का पथ क्या है।

$$\text{चूँकि } y=3x, \text{ जब कि } \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \text{और} \quad \left.\begin{array}{r} \text{जब } x=3 \\ y=9 \end{array}\right\},$$

इसलिए, उस विन्दु के दो स्थान (0,0) और (3,9) द्वारा मालूम होते हैं।

छोटे वर्ग के एक बाहु की लम्बाई को इकाई मानकर (0,0) और (3,9) बिन्दुओं को चित्र में रक्खो। इस बिन्दुओं को जोड़नेवाली अनन्त सरल रेखा ही उस विन्दु का बिन्दुपथ है।

फर्ज़ करो कि इस अनन्त सरल रेखा पर P बिन्दु है। चित्र से जाना जाता है कि P के भुज-कोटि (co-ordinates) क्रमशः 5 और 15 हैं; और इन दो संख्याओं



द्वारा यह समीकरण सिद्ध हो जाता है। इसी प्रकार जाना जा सकता है कि इस रेखा पर और भी सब बिन्दुओं के भुज-कोटि द्वारा यह समीकरण सिद्ध हो जाता है। परन्तु इस रेखा के बाहर किसी बिन्दु के भुज-कोटि द्वारा यह समीकरण सिद्ध नहीं होता।

इसलिए यह बिन्दु सदा OP सरल रेखा पर रहेगा और उसके बाहर कभी भी न रहेगा।

इसलिए यह सिद्धान्त निकला कि कोई बिन्दु यदि इस प्रकार चले कि उसके भुज-कोटि (याने x व y) सदा $y=3x$ समीकरण द्वारा परस्पर सम्बन्ध रखते हों तो उसका बिन्दु-पथ OP रेखा द्वारा सूचित होता है अर्थात् OP सरलरेखा $y=3x$ समीकरण का रेखाचित्र है।

टीका। साधारण रूप से कहा जा सकता है कि यदि m कोई भी संख्या हो, $y=mx$ का रेखाचित्र एक ऐसी सरल रेखा है जो मूलबिन्दु पर से जाती है।

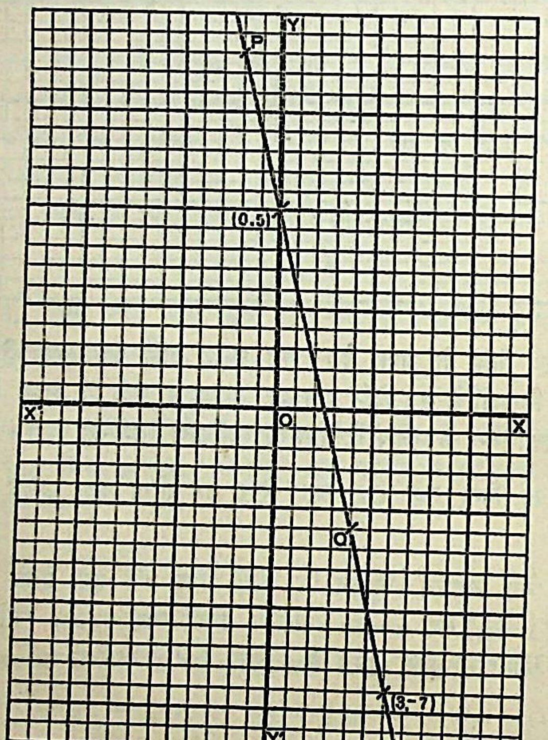
उदाहरण 3. एक विन्दु यदि इस प्रकार चलता रहे कि उसके भुज-कोटि (अर्थात् x व y) सर्वदा $y = -4x + 5$ समीकरण द्वारा परस्पर सन्वन्ध रखते हों तो उस बिन्दु का विन्दुपथ बतलाओ।

दिये हुए समीकरण से जाना जाता है कि

जब $x = 0$ हो तो $y = 5$ और   यदि $x = 3$ हो तो $y = -7$.

इसलिए, उस विन्दु के दो स्थान (0,5) और (3, −7) द्वारा जाने जाते हैं।

अब छोटे वर्गक्षेत्र के बाहु के दूने को इकाई मान कर (0,5) और (3, −7) विन्दुओं को रेखाचित्र में अंकित करो। इन दो विन्दुओं को जोड़नेवाली अनन्त सरल रेखा ही इस बिन्दु का विन्दुपथ है।



फर्ज़ करो कि इस सरल रेखा पर P कोई एक विन्दु है; चित्र से देखा जाता है कि

P के भुज-कोटि क्रमशः -1 व 9 हैं; और इन दो संख्याओं द्वारा दिया हुआ समीकरण सिद्ध होता है। इस रेखा पर और एक विन्दु Q लेकर देखा जा सकता है, कि उसके भुज-कोटि (2 व -3) भी समीकरण को सिद्ध करते हैं। इसी प्रकार मालूम होगा कि रेखा पर के सब विन्दुओं के भुज-कोटि यह समीकरण को सिद्ध करते हैं। किन्तु रेखा के बाहर किसी भी विन्दु के भुज-कोटि द्वारा यह समीकरण सिद्ध न होगा। इसलिए यह विन्दु सदा PQ रेखा पर रहेगा और कभी भी उसके बाहर न रहेगा।

इसलिए यदि कोई बिन्दु इस प्रकार चलता हो कि उसके भुज-कोटि $y=-4x+5$ समीकरण द्वारा परस्पर सम्बन्ध रखते हों, तो उसका विन्दुपथ PQ इस अनन्त सरल रेखा द्वारा सूचित होगा। अर्थात् PQ सरल रेखा ही $y=-4x+5$ समीकरण का रेखाचित्र है।

टीका 1. साधारण रूप से कहा जा सकता है कि यदि m व c कोई भी संख्यायें हों, तो $y=mx+c$ का रेखाचित्र (o,c) विन्दु पर से जाती हुई एक सरल रेखा होगी।

टीका 2. चूँकि दो अनजानी राशि (x व y समझ लो) वाले प्रत्येक सरल समीकरण को $y=mx+c$, के रूप में प्रकट कर सकते हैं; इसलिए सब सरल समीकरणों के रेखाचित्र सरल रेखाओं द्वारा प्रकट होंगे।

टीका 3. $y=mx+c$, इस समीकरण के रेखाचित्र को $mx+c$, इस व्यंजक का रेखाचित्र भी कहते हैं।

टीका 4. किसी दिये हुए समीकरण का रेखाचित्र किसी विन्दु का विन्दुपथ तब कहलायेगा, जब उस विन्दु के किसी भी स्थान के भुज-कोटि के मूल्य दिये हुए समीकरण को सिद्ध करें।

उदाहरण 4. $7x+3y=11$ समीकरण का रेखाचित्र खींचो।

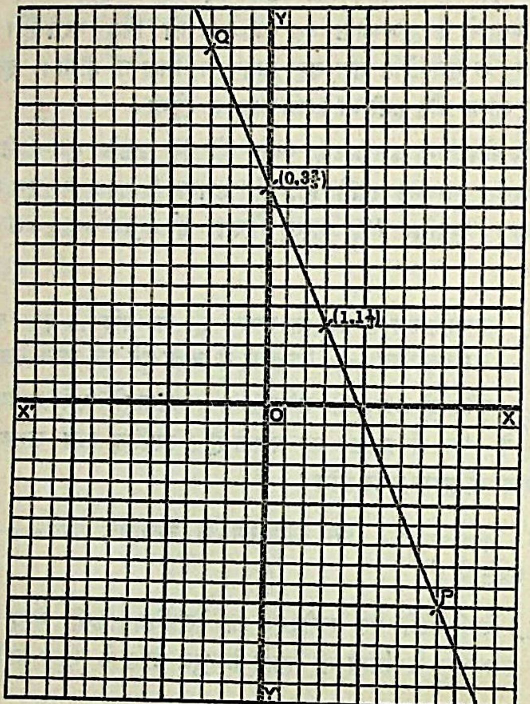
यहाँ यदि $x=0$ हो, $y=3\frac{2}{3}$. } और { यदि $x=1$ हो, $y=1\frac{1}{3}$.

इसलिए स्पष्ट मालूम होता है कि $(0, 3\frac{2}{3})$ और $(1, 1\frac{1}{3})$ दो बिन्दु रेखाचित्र पर हैं।

अब छोटे वर्गों के एक बाहु के तिगुने को इकाई मानकर $(0, 3\frac{2}{3})$ व $(1, 1\frac{1}{3})$ विन्दुओं को वर्गांकित कागज़ में अंकित करो; उनको जोड़नेवाली अनन्त सरल रेखा वह रेखाचित्र है जो हम निकालना चाहते हैं।

इस अनन्त सरल रेखा पर कोई भी बिन्दु P लेकर देखा जा सकता है कि उसके भुज-कोटि (अर्थात् 3 व $-3\frac{1}{3}$) दिये हुए समीकरण को सिद्ध करते हैं। इस रेखा पर

और भी एक बिन्दु Q लेकर देखा जा सकता है कि इसके भुज-कोटि -1 व 6 समीकरण को सिद्ध करते हैं। इसी प्रकार दिखाया जा सकता है कि इस अनन्त सरल रेखा PQ



पर के सब विन्दुओं के भुज-कोटि के मूल्य समीकरण को सिद्ध करते हैं। किन्तु इसके बाहर के किसी भी विन्दु के भुज-कोटि समीकरण को सिद्ध नहीं करते। इसलिए PQ ही समीकरण का रेखाचित्र है।

टीका 1. $7x+3y=11$ के रेखाचित्र को $\frac{11-7x}{3}$ इस बीजीय व्यंजक का रेखाचित्र भी कहा जा सकता है।

टीका 2. चूँकि PQ सरल रेखा $7x+3y=11$ समीकरण का रेखाचित्र है, इसलिए इस समीकरण को PQ सरल रेखा का समीकरण (Equation of the straight line PQ) कहते हैं।

टीका 3. किसी दी हुई सरल रेखा का समीकरण निकालना हो, तो एक ऐसा समीकरण निकालना होता है, जो उस रेखा के उपर के किसी बिन्दु के भुज-कोटि के मूल्य द्वारा सिद्ध होता है।

उदाहरण 5. $(1, 1)$ और $(3, -\frac{1}{2})$ दो बिन्दुओं से होकर खींची हुई सरल रेखा का समीकरण निकालो।

फर्ज़ करो कि $y = mx + c$ वह समीकरण है।

चूँकि $(1,1)$ और $(3, -\frac{1}{2})$ दोनों में से प्रत्येक के मूल्य द्वारा समीकरण सिद्ध होता है, इसलिए

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m + c \\ \text{और}\quad -\tfrac{1}{2} &= 3m + c \end{aligned}\right\} \quad \therefore\ 2m = -\tfrac{3}{2};\ \text{और}\ \therefore\ m = -\tfrac{3}{4};\quad \text{और}\ c = 1 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{4}.$$

इसलिए यह समीकरण $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$;

अथवा $3x + 4y = 7.$

प्रश्नमाला 67

1. निम्नलिखित समीकरणों का रेखाचित्र अंकित करो :

(1) $x = 8.$ (2) $x = 13.$ (3) $x + 11 = 0.$
(4) $y = -7.$ (5) $y - 9 = 0.$ (6) $y + 10 = 0.$

2. निम्नलिखित समीकरणों का रेखाचित्र अंकित करो :

(1) $y = x.$ (2) $y = -x.$ (3) $y = 2x.$
(4) $y + 2x = 0.$ (5) $y = -3x.$ (6) $3y = 5x.$
(7) $7y + 8x = 0.$ (8) $6y + 13x = 0.$

3. निम्नलिखित समीकरणों का रेखाचित्र अंकित करो :

(1) $y = 3x + 4.$ (2) $y = 7x - 8.$ (3) $y = -5x + 9.$
(4) $y = -8x - 11.$ (5) $3y = 7x + 4.$ (6) $-6y = 7x - 10.$

4. निम्नलिखित समीकरणों का रेखाचित्र अंकित करो :

(1) $2x + 7y = 10.$ (2) $4x - 5y - 7 = 0.$
(3) $5x + 6y + 8 = 0.$ (4) $-3x + 7y + 8 = 0.$
(5) $10y - 9x = 13.$ (6) $8x - 11y + 13 = 0.$

5. निम्नलिखित समीकरणों का रेखाचित्र अंकित करो :

(1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$ (2) $\frac{x}{7} + \frac{y}{-9} = 1.$ (3) $\frac{x}{-8} + \frac{y}{13} = 1.$

(4) $y = \frac{5 - 7x}{6}.$ (5) $y = \frac{9x - 13}{4}.$ (6) $\frac{3x}{4} - \frac{4y}{3} = 1.$

6. निम्नलिखित व्यंजकों का रेखाचित्र अंकित करो :

(1) $x-3$. (2) $3x+4$. (3) $-7x+8$.

(4) $\frac{7-4x}{3}$. (5) $\frac{5x-9}{4}$. (6) $\frac{8x+11}{5}$.

7. नीचे दिये हुए दो बिन्दुओं पर से खींची हुई सरल रेखाओं का समीकरण निकालो :

(1) (0, 0), (5, 6). (2) (0, 5), (7, 0).

(3) (6, −8), (−7, 5). (4) (−4, 8), (−9, −13).

(5) (−11, 0), (7, −10).

वीसवाँ अध्याय

सहज वर्गसमीकरण और प्रश्न

(Easy Quadratic Equations and Problems)

122. परिभाषा : जिन समीकरणों में अव्यक्त या अनजानी राशि का वर्गात्मक या दूसरी घातवाला पद हो और उससे अधिक घातवाले कोई पद न हों तो उसको **वर्गसमीकरण** (quadratic equation) अथवा **दो घात का समीकरण** (equation of the second degree) कहते हैं।

यदि किसी वर्ग समीकरण में अनजानी राशि का केवल वर्गवाला पद ही वर्तमान हो (एक घातवाला पद वर्तमान न हो) तो उसे **"शुद्ध वर्गसमीकरण"** (pure quadratic equation) और जिसमें पहला घातवाला पद भी वर्तमान हो, उसे **मिश्रित वर्गसमीकरण** (adfected quadratic) कहते हैं। जैसे,

$3x^2=75$ यह एक शुद्ध वर्गसमीकरण है ;

$3x^2-7x=6$,, ,, मिश्रित ,, ,,।

123. शुद्ध वर्गसमीकरण को हल करना : शुद्ध वर्गसमीकरणों को हल करने के लिए, सरल समीकरणों को हल करने के नियम के अनुसार, अनजानी राशि के वर्ग का मूल्य (value of the square of the unknown quantity) निकालकर फिर उस मूल्य का वर्गमूल निकालना पड़ता है।

उदाहरण 1. हल करो : $5(x^2+1)-2=3(x^2+7)$.

इसमें $5x^2+5-2=3x^2+21$;

अथवा $5x^2+3=3x^2+21$;

अथवा $2x^2=18$;

$\therefore \quad x^2=9$.

$\therefore \quad x=3$ अथवा -3.

अब चूँकि अनजानी राशि का वर्ग 9 के बराबर है ; $\therefore$ या तो यह $+3$ या -3 होगा। इस हालत में x के दोनों मूल्य दिये हुए समीकरण को सिद्ध करते हैं। विद्यार्थी दोनों मूल्यों को काममें लाकर जांच सकते हैं।

टीका। ऊपर दिये हुए उदाहरण में ध्यान देना चाहिए कि शेष क्रिया यह प्रश्न हल करने के समान है, कि "किस संख्या का वर्ग लेने से 9 प्राप्त होता है ?"

उदाहरण 2. हल करो : $\frac{1}{3}(x-2)(x-3)-\frac{1}{21}(x-21)(x-14)=2$.

दोनों पक्षों को 21 द्वारा गुणा करने पर प्राप्त होता है :

$$7(x-2)(x-3)-(x-21)(x-14)=42.$$

$$\text{वायां पक्ष}=(7x^2-35x+42)-(x^2-35x+294)$$
$$=7x^2-35x+42-x^2+35x-294$$
$$=6x^2-252.$$

इसलिए समीकरण को लिख सकते हैं,

$$6x^2-252=42,$$

अथवा $6x^2=252+42=294$;

दोनों पक्षों को 6 द्वारा भाग करने पर $x^2=49$.

अब चूँकि अनजानी राशि ऐसी है कि उसका वर्ग 49 के समान है, इसलिए यह या तो $+7$ है या -7 है।

इसलिए $x=+7$ अथवा -7.

उदाहरण 3. 9 गज़ लम्बे और 4 गज़ चौड़े एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर वर्ग के एक बाहु की लम्बाई बतलाओ।

फर्ज़ करो कि वर्ग के एक बाहु की लम्बाई x गज़ है।

तो वर्ग का क्षेत्रफल $=x\times x$ वर्गगज़ $=x^2$ वर्गगज़

और आयत का क्षेत्रफल $=4\times 9$ वर्गगज़ $=36$ वर्गगज़

$\therefore$ दी हुई शर्त के मुताबिक x^2 वर्गगज़ $=36$ वर्गगज़

अथवा $x^2=36$; $\therefore \quad x=6$ अथवा -6.

अब चूँकि किसी वर्गक्षेत्र के बाहु की लम्बाई धनात्मक राशि होनी चाहिए इसलिए -6 मूल्य को छोड़ देंगे।

टीका। वर्गसमीकरण के प्रश्नों में समीकरण की अनजानी राशि के जो मूल्य प्रश्न के शर्त के मुताबिक लागू नहीं होते, उनको छोड़ देना चाहिए।

प्रश्नमाला 68

नीचे दिये हुए समीकरणों से x का मूल्य निकालो :

1. $3x^2 = 27.$ 2. $a^2x^2 = a^4.$ 3. $\frac{1}{7}x^2 = 28.$

4. $8x + \frac{7}{x} = \frac{65}{7}x.$ 5. $2(x^2 - 5) + x(3 - x) = 3(x + 5).$

6. $(x-7)(x-10) + (x-3)(x-2) = (x-17)(x-5).$

7. $\frac{2x^2 + 10}{15} = 7 - \frac{50 + x^2}{25}.$ 8. $(x + a)^2 - 2a(a + x) = 3a^2.$

9. $x^2 + 2bx - b^2 = a^2 - b(b - 2x).$ 10. $2x(3x + 5) - 5x(x + 2) = 36.$

11. $\frac{3x^2 + 15}{7} + \frac{2x^2 + 9}{3} = \frac{2x^2 + 87}{21} + 2.$

12. किसी संख्या का चौगुना उसके व्युत्क्रम का 16 गुना है, तो बतलाओ वह संख्या क्या है।

13. एक वर्ग के क्षेत्रफल का तिगुना, 9 गज लम्बे और 3 गज़ चौड़े एक आयत के क्षेत्रफल के चौगुने के समान है ; वर्ग के एक बाहु की लम्बाई बतलाओ।

14. A के पास एक वर्ग ज़मीन है, वह उसे B की 91 वर्गगज़ क्षेत्रफलवाली एक आयत रूप की ज़मीन के साथ बदल कर 10 वर्गगज़ ज़मीन अधिक पाता है ; तो वर्ग ज़मीन का बाहु कितना है ?

15. 10 फुट लम्बी एक सरल रेखा के इस प्रकार दो हिस्से बनाओ कि पहले हिस्से के वर्ग के पंचगुने और दूसरे हिस्से के वर्ग का अंतर पहले हिस्से के 20 गुने के समान हो।

124. गुणनखंड निकालकर मिश्रित वर्गसमीकरणों को हल करना : मिश्रित वर्गसमीकरणों को सरल करके और पदों का पक्ष बदल के $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में प्रकट कर सकते हैं। अब जो बायां पक्ष प्राप्त हो उसके यदि गुणनखंड निकाले जा सकते हों, तो उन गुणनखंडों की सहायता से अनजानी राशियों के मूल्य निकाले जा सकते हैं। जैसे,

उदाहरण 1. हल करो : $x^2 - 5x + 6 = 0.$

स्पष्ट है कि बायाँ पक्ष (तरफ) $= (x-2)(x-3).$

इसलिए $(x-2)(x-3)=0.$

$\therefore\ x-2=0$, $\therefore\ x=2$; अथवा $x-3=0$, $\therefore\ x=3.$

इसलिए 2 और 3 इस दिये हुए समीकरण की अनजानी राशियों के मूल्य हैं।

उदाहरण 2. हल करो : $2x^2-10x=3x-15.$

तरफ़ बदल करके $2x(x-5)-3(x-5)=(2x-3)(x-5).$

$\therefore\ (2x-3)(x-5)=0.$

$2x-3=0$, $\therefore\ x=\frac{3}{2}$; अथवा $x-5=0$, $\therefore\ x=5.$

$\therefore$ $\frac{3}{2}$ और 5 ही मूल्य हैं।

टीका। ऊपर दिये हुए समीकरण में, अर्थात् $2x^2-10x=3x-15$ अथवा $2x(x-5)=3(x-5)$ में पाया जाता है कि $x-5$ गुणनखंड दोनों तरफ़ वर्तमान है। इसलिए $x-5=0$ अर्थात् $x=5$ मानने पर समीकरण के दोनों तरफ़ों का मूल्य बराबर होगा, अर्थात् समीकरण सिद्ध होगा और यदि $x-5$ का मूल्य शून्य (0) न हो तो दोनों पक्षों को $x-5$ द्वारा भाग करने पर $2x=3$, अर्थात् $x=\frac{3}{2}$ निकलता है ; $\therefore$ यदि $x=5$ अथवा $x=\frac{3}{2}$ हो तो समीकरण सिद्ध होता है। इसलिए 5 अथवा $\frac{3}{2}$ समीकरण को अनजानी राशियों के मूल्य हैं।

इससे यह जाना जाता है कि समीकरण को हल करने के लिए उसके सब पदों को एक ही तरफ़ लाने की कोई विशेष आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण 3. हल करो : $10(2x+3)(x-3)+(7x+3)^2=20(x+3)(x-1).$

अब $10(2x^2-3x-9)+(49x^2+42x+9)=20(x^2+2x-3)$;

तरफ़ बदलने व सरल करने पर $49x^2-28x-21=0$

$\therefore\ 7x^2-4x-3=0$;

अथवा $(7x^2-7x)+(3x-3)=0,$

अर्थात् $(7x+3)(x-1)=0.$

इसलिए $7x+3=0$, $\therefore\ x=-\frac{3}{7}$; अथवा $x-1=0$, $\therefore\ x=1.$

इसलिए x के मूल्य $-\frac{3}{7}$ और 1 हैं।

उदाहरण 4. एक ऐसी संख्या बतलाओ जो अपने व्युत्क्रम के 65 गुने से 64 अधिक है।

फ़र्ज़ करो कि वह संख्या $=x$

तो दी हुई शर्त के अनुसार $x-\frac{65}{x}=64.$

अब x द्वारा दोनों तरफों को गुणा करने पर निकलता है

$$x^2-65=64x,$$

अथवा $x^2-64x-65=0,$ [तरफ बदलने पर]

अथवा $(x-65)(x+1)=0,$ [गुणनखंड निकालकर]

$\therefore\ x-65=0$ अथवा $x+1=0$

अर्थात् $x=65$ अर्थात् $x=-1.$

इसलिए मूल्य 65, या -1 है।

प्रश्नमाला 69

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $3x^2-12x+1=6x-23.$
2. $4x^2-4x=80.$
3. $x+2-\frac{6}{x+2}=1.$
4. $x^2+9x-52=0.$
5. $x^2-\frac{5}{3}x-4=0.$
6. $6x^2+5x-4=0.$
7. $3(x-2)^2=18+(8x+1).$
8. $x-\frac{x^3-8}{x^2+5}=2.$
9. $\frac{21x^3-16}{3x^2-4}-7x=5.$
10. $x^2-(a+b)x+ab=0.$
11. दो ऐसी संख्यायें बतलाओ जिनका गुणनफल 399 और योगफल 40 है।
12. एक ऐसी संख्या बतलाओ जिसका वर्ग संख्या के 10 गुने से 96 अधिक है।
13. कोई संख्या 12 से जितनी अधिक है, उसके व्युत्क्रम का 39-गुना 4 से उतनी ही कम है ; तो बतलाओ कि संख्या क्या है।
14. पिता व पुत्र की वर्तमान आयुओं का अन्तर 25 है ; 10 वर्ष पहले उन दोनों की आयु सूचित करनेवाली संख्याओं का गुणनफल यदि 150 हो, तो पिता की वर्तमान आयु बतलाओ।
15. 100 वर्गगज़ क्षेत्रफलवाली किसी आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 15 गज़ अधिक है। प्रति गज़ आठ आने मूल्य के तार के जाल से उस खेत को घेरना चाहें तो कितना खर्च होगा ?

विविध प्रश्नमाला IV

I

1. दो अथवा दो से अधिक बीजीय व्यंजकों के महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य की परिभाषा लिखो। $36x^2a^4c^5$, $24xy^2a^3b^4$ और $240y^3a^6b^2c$ का म० स० अ० और ल० स० स० अ० निकालो।

2. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखंड निकालकर म० स० अ० निकालो :
$$x^2-6x+9 \text{ और } 4x^2-11x-3.$$

3. $ab-ac-b^2+bc$ और $b^2-12ac-4a^2-9c^2$ का ल० स० अ० निकालो।

4. $x^3+y^3+3xy-1$ के अभाज्य गुणनखंड निकालो और सिद्ध करो कि इसका और $2(x^2+xy-x)+3y(x+y)-(7+3y)+7x+7y$ का म० स० अ० $x+y-1$ है।

5. यदि $2s=a+b+c$ हो तो सिद्ध करो कि
$$\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{2bc-(b^2+c^2-a^2)}=\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}.$$

6. हल करो : $\dfrac{x^6}{x^2-1}-\dfrac{x^4}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+1}.$

7. हल करो : $ax+1=by+1=ay+bx.$

8. एक हौज़ में दो नल लगे हैं, उनमें से एक नल a घन्टों और दूसरा b घन्टों में हौज़ को भर सकता है। दोनों नल एक साथ हौज़ को कितने घन्टों में भरेंगे ? और यदि एक तीसरा नल भरे हुए हौज़ को c घन्टों में खाली कर सकता है, तो तीनों नल एक साथ खुले रहकर कितने घन्टों में भरे हुए हौज़ को खाली करेंगे ?

II

1. $7x^2-26x+15$ और $5x(x-1)+3(3x-11)-24$ का म० स० अ० निकालो।

2. $x^3+bx^2+ax+ab$ और $x^2-(a-b)x-ab$ का ल० स० अ० निकालो।

3. निम्नलिखित व्यंजकों को सरल करो :
$$\text{(i)}\ \frac{(3x^4y^2-3x^2y^4)^2}{(2x^3y-2xy^3)^2}\ ; \quad \text{(ii)}\ \frac{3(x^2-x-30)(x^2-9x+14)}{(x^2-13x+42)(x^2+3x-10)}.$$

4. मूल्य निकालो :

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}, \text{ यदि } x=a^2+b^2 \text{ और } y=a^2-b^2 \text{ हो ।}$$

5. हल करो : $\dfrac{(2x-9)^2-(x-6)^2}{3(x^2-10x+25)}+\dfrac{2(x-3)^2}{3(x^2-8x+15)}$.

6. सिद्ध करो कि

$\dfrac{x^4}{3}-\dfrac{11x^3}{12}+\dfrac{41x^2}{8}-\dfrac{23x}{4}+6$ का एक गुणनखंड $\dfrac{2x^2}{3}-\dfrac{5x}{6}+1$ होगा।

7. $\dfrac{5}{7}(2x-11)-\dfrac{3}{4}(x-5)=\dfrac{x}{3}-(10-x)$ हो, तो x का मूल्य निकालो।

8. हल करो : $ax+by=c^2$ और $\dfrac{a+x}{b}-\dfrac{b+y}{a}=0.$

III

1. महत्तम समापवर्तक निकालो : $a^2x^3+a^5-2abx^3+b^2x^3+a^3b^2-2a^4b$ और $2a^3x^4-5a^4x^2+3a^6-2b^2x^4+5a^2b^2x^2-3a^4b^2$ का।

2. लघुत्तम समापवर्त्य निकालो : $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ और $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$ का।

3. महत्तम समापवर्तक निकालो : x^2-9, $(x+3)^2$ और x^2+x-6 का।

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1910.]

4. दो बीजीय व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्त्य निकालने का नियम बतलाओ और उसको ठीक तरह से सिद्ध करो।

लघुत्तम समापवर्त्य निकालो :

$$x^2+(a+b)x+ab,\ x^2-b^2 \text{ और } x^2+(a-b)x-ab \text{ का ।}$$

5. सरल करो : $\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{x+3}{x^2+x-6}-\dfrac{x-5}{x^2-3x-10}\right)-\dfrac{1}{x^2+4}$.

6. हल करो : $ax+y=x+by=\frac{1}{2}(x+y)+1.$

7. किसी रक़म का एक हिस्सा 4 प्रति सैकड़ा और दूसरा हिस्सा 7 प्रति सैकड़ा सूद पर लगाने पर कुल आय 196 पौंड हुई; परन्तु यदि सूद की दर क्रमशः 5 प्रति शत और 6 प्रति शत होती तो 212 पौंड सूद मिलता। तो इस रक़म के दोनों हिस्से निकालो।

8. यदि $3(x^2-4)=15$ हो, तो x निकालो।

IV

1. दो अथवा दो से अधिक बीजीय व्यंजकों के महत्तम समापवर्तक व लघुतम समापवर्त्य की परिभाषा लिखो।

यदि A और B बीजीय व्यंजकों के महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य क्रमशः H और L हों, तो सिद्ध करो कि $H \times L = A \times B$.

2. $x^2 - y^2, x^2 - 2xy + y^2$ और $x^3 - y^3$ का महत्तम समापवर्तक निकालो, और सिद्ध करो कि उनके लघुतम समापवर्त्य को $x^2 + xy + y^2$ द्वारा भाग करने पर भजनफल $(x-y)(x^2-y^2)$ होगा।

3. $\dfrac{x+5}{x^2+3x-10}$, $\dfrac{x+6}{x^2+5x-6}$ से कितना छोटा है बतलाओ।

4. सरल करो : $\dfrac{1}{m^2+m+1} + \dfrac{2m}{m^4+m^2+1}$.

5. सिद्ध करो कि $(x+y)^3 - (y+z)^3 = 3(x-z)\{(x+y)(y+z) + \frac{1}{3}(x-z)^2\}$.

6. तीन अंकवाली किसी संख्या की इकाई के स्थान पर 5 है, और दहाई के स्थान का अंक दूसरे दोनों अंकों के योगफल का आधा है। और इस संख्या के साथ 108 जोड़ने पर जो संख्या प्राप्त होती है, उस संख्या की इकाई का अंक उपर दी हुई संख्या के सैकड़े के अंक के, और उस संख्या की दहाई का अंक उपर दी हुई संख्या की इकाई के अंक के बराबर है तो दी हुई संख्या निकालो।

7. किसी एक भिन्न के हर और अंश के साथ 3 जोड़ने पर भिन्न $\frac{3}{5}$ बन जाता है; परन्तु हर और अंश में से 5 घटाने पर भिन्न $\frac{1}{3}$ बन जाता है; तो भिन्न निकालो।

8. हल करो : $5(x^2 - 3x + 11) + 3(x^2 + 2x + 4) = 3(3x^2 - 3x + 1)$.

V

1. महत्तम समापवर्तक निकालो : $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2$ और $x^4 - (a+b)^2x^2 + 2ab(a+b)x - a^2b^2$ का।

2. लघुतम समापवर्त्य निकालो : $35x^2 - 11x - 6$ और $40x^2 - 29x + 3$ का।

3. लघुतम पदों में तोड़ो :

$$\left\{\frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{2y}{x-y}\right\} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \left\{\frac{3}{x-y} - \frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right\}.$$

4. हल करो : $\dfrac{a^2+bc+ca+ab}{a^2+2bc+2ca+ab}\times\dfrac{a^3+8c^3}{a^4+a^2c^2+6ac^3+4c^4}$.

5. सिद्ध करो कि $\dfrac{x+2}{1+x+x^2}-\dfrac{x-2}{1-x+x^2}-\dfrac{2x^2-4}{1-x^2+x^4}=\dfrac{4x^4+8}{x^8+x^4+1}$.

6. A और B रेल पर 120 मील की यात्रा करते हैं। A ड्योढ़ा किराया देकर एक वापसी टिकट लेता है। वापस आकर उन्हों ने देखा कि A, B से प्रति 100 मील के सफ़र में 4 आना 2 पाई कम किराया देता है। तो सिद्ध करो कि प्रति मील का किराया 2 पाई है।

7. यदि $x=5$ हो तो $ax+b$ का मूल्य 13 और यदि $x=13$ हो तो उस व्यंजक का मूल्य 29 है। तो यदि $x=\cdot5$ हो तो सिद्ध करो कि उस व्यंजक का मूल्य 4 होगा।

8. किसी संख्या के वर्ग के दूने से 4 कम करने से 28 रहता है; तो संख्या क्या है ?

VI

1. म० स० अ० निकालो :

$3x^3-18x^2+33x-18$, x^2-5x+6 और x^2-3x+2 का।

2. ल० स० अ० निकालो : $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b$, $bx^2-(b^2+bc)x+b^2c$ और $cx^2-(c^2+ac)x+c^2a$ का।

3. दो राशियाँ a और b का ल० स० अ० है x और म० स० अ० है y. यदि $x+y=ma+\dfrac{b}{m}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3=m^3a^3+\dfrac{b^3}{m^3}$.

4. हल करो : $\dfrac{z(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{x(y^3-z^3)}{y^2+yz+z^2}+\dfrac{y(z^3-x^3)}{z^2+zx+x^2}$.

5. यदि $x=\dfrac{a}{a+b}$ और $y=\dfrac{b}{a+b}$ हो, तो सिद्ध करो

(i) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; (ii) $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}=\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

6. हल करो :

$$\tfrac{1}{3}(7x-5)+\tfrac{1}{35}(34x+10)-\frac{(3x-2)(5x-3)}{4}=\frac{(4-x)(2+15x)}{4}-18.$$

7. फल बेचनेवाली एक औरत कुछ सेव प्रति पेन्स में तीन के हिसाब से और फिर प्रति पेन्स में चार के हिसाब से उतने ही सेव खरीद कर, दो पेन्स में 7 के हिसाब से कुल सेव बेचने पर देखती है कि उसको 3 पेन्स का घाटा हुआ। कितने मूल्य में उसने कुल सेव खरीदे थे ?

8. हल करो : $(2x+3)(x-5)+(x+5)(3x+1)=34+(x+4)(x+5)$.

VII

1. म० स० अ० निकालो : $x^3-7x^2+5x-35$, x^4+8x^2+15 और $x^3(x^2+8)-7(x^4+15)+15x-56x^2$ का।

2. ल० स० अ० निकालो : $ab-ac+bc-b^2$, $bc-ab+ac-c^2$ और $ac-bc+ab-a^2$ का।

3. यदि दो संख्याएं x और y के म० स० अ० और ल० स० अ० क्रमशः 3 व 105 हों और यदि $x+y=36$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{35}$.

4. हल करो : $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-1)}$.

5. मूल्य निकालो : $\frac{x+y}{x-y}$ का यदि $x=\frac{a+b}{a-b}$ और $y=\frac{a-b}{a+b}$.

6. दो अंकवाली कोई संख्या यदि अपने दो अंकों के योगफल का चौगुना हो, तो सिद्ध करो कि उन दो अंकों को उलट कर लिखने पर जो संख्या प्राप्त होती है वह उन दोनों अंकों के योगफल का सातगुना होगी।

7. हल करो ;

$$\left.\begin{aligned}3x+20&=4y-10\\4(x-1)-3(y-3)&=0\end{aligned}\right\}$$

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1895.]

8. किसी संख्या का वर्ग 7 से जितना बड़ा है, उस संख्या के आधे का वर्ग 13 से उतना ही छोटा है ; तो वह संख्या निकालो।

इक्कीसवां अध्याय

कठिन सूत्रावली (Harder Formulæ)

चौथे अध्याय में बतलाए हुए सूत्रों से कठिन सूत्रों पर यहां विचार किया जायगा।

125. सूत्र : $(x+a)(x+b)(x+c)$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$$

टीका। विद्यार्थी को आसानी से इसकी सचाई मालूम हो सकती है। नीचे दिये हुए सूत्र इसी सूत्र में शामिल हैं।

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc\,;$$
$$(x+a)(x+b)(x-c)=x^3+(a+b-c)x^2-(bc+ca-ab)x-abc\,;$$
$$(x+a)(x-b)(x-c)=x^3+(a-b-c)x^2+(bc-ca-ab)x+abc.$$

दृष्टान्तरूप से दिखाया जा सकता है कि

$$(x-a)(x-b)(x-c)=\{x+(-a)\}\{x+(-b)\}\{x+(-c)\}$$
$$=x^3+\{(-a)+(-b)+(-c)\}x^2+\{(-b)(-c)$$
$$+(-c)(-a)+(-a)(-b)\}x+(-a)(-b)(-c)$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc.$$

इसी प्रकार और दो सूत्र भी सिद्ध किये जा सकते हैं, जो काम विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए छोड़ दिया जाता है।

उदाहरण 1. $x+2$, $x+4$ और $x+6$ का गुणनफल लिखो।

$$2+4+6=12,$$
$$4\times6+6\times2+2\times4=24+12+8=44,$$
$$2\times4\times6=48.$$

इसलिए गुणनफल $\quad=x^3+12x^2+44x+48.$

उदाहरण 2. गुणनफल लिखो : $x-3$, $x-5$ और $x-7$ का।

$$(-3)+(-5)+(-7)=-15,$$
$$(-5)(-7)+(-7)(-3)+(-3)(-5)=35+21+15=71,$$
$$(-3)(-5)(-7)=-105.$$

इसलिए गुणनफल $\quad=x^3-15x^2+71x-105.$

उदाहरण 3. गुणनफल निकालो : $x-4, x+5$ और $x-3$ का।

$$(-4)+5+(-3)=-2,$$
$$(5)(-3)+(-3)(-4)+(-4)(5)=-15+12-20=-23,$$
$$(-4)\times 5\times(-3)=60.$$

इसलिए गुणनफल $=x^3-2x^2-23x+60.$

उदाहरण 4. गुणनफल लिखो : $x+3, x+5$ और $x-8$ का।

$$3+5+(-8)=0,$$
$$(5)(-8)+(-8)(3)+(3)(5)=-40-24+15=-49,$$
$$3\times 5\times(-8)=-120.$$

$\therefore$ गुणनफल $=x^3-0.x^2-49x-120$
$=x^3-49x-120.$

प्रश्नमाला 70

गुणनफल लिखो :

1. $x+1, x+2$ और $x+3.$
2. $x+2, x+5$ और $x+7.$
3. $x+3, x-6$ और $x+2.$
4. $x+4, x+5$ और $x-10.$
5. $x-8, x+3$ और $x+1.$
6. $x-5, x-2$ और $x+8.$
7. $x-3, x+7$ और $x-4.$
8. $x+6, x-5$ और $x-7.$
9. $x-5, x-7$ और $x-11.$
10. $x-3, x-6$ और $x-9.$
11. $x+4, x-5$ और $x-12.$
12. $x+5, x+9$ और $x+11.$
13. $x-6, x+8$ और $x-2$
14. $x-3, x-7$ और $x-13.$
15. $x-3, x+12$ और $x+4.$
16. $x-9, x-10$ और $x+12.$
17. $x+9, x-5$ और $x-7.$
18. $x+8, x+12$ और $x+15$
19. $x-14, x+8$ और $x+6.$
20. $x-5, x-10$ और $x-16.$

126. बहुपद व्यंजक का वर्ग निकालना : नियम 54 के उदाहरण 4 व 5 में क्रमशः दिखलाया गया है कि

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

और $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$

उपर दिये हुए दोनों उदाहरणों से पाया जाता है कि यदि किसी पूरे व्यंजक का वर्ग निकालना हो तो उसमें दिये हुए प्रत्येक पद के वर्ग के योगफल के साथ प्रत्येक पद को

उसके बादवाले सब पदों से गुणा करके, उन गुणनफलों के दुगुने को जोड़ना चाहिए। उपर दिये हुए सिद्धान्तों को निम्नलिखित रूप में याद करना आसान है। जैसे,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+2bc;$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd.$$

यह दिखलाया जा सकता है कि हर हालत में यही नियम काम में लाया जा सकता है। दृष्टान्त रूप में $a+b+c+d+e$ का वर्ग निकाला जा रहा है।

अब $(a+b+c+d+e)^2$

$$=\{(a+b+c)+(d+e)\}^2$$
$$=(a+b+c)^2+2(a+b+c)(d+e)+(d+e)^2$$
$$=\{a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+2bc\}$$
$$+\{2a(d+e)+2b(d+e)+2c(d+e)\}+(d^2+e^2+2de)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2a(b+c+d+e)+2b(c+d+e)$$
$$+2c(d+e)+2de.$$

इसलिए यही सिद्धान्त निकलता है कि किसी बहुपद व्यंजक का वर्ग निकालना हो तो उसमें दिये हुए प्रत्येक पद के वर्ग के योगफल के साथ, प्रत्येक पद को उसके बादवाले प्रत्येक पद द्वारा गुणा करके जो गुणनफल प्राप्त हो, उसका दूना जोड़ना पड़ता है।

बहुपद व्यंजक में एक या एक से अधिक ऋणात्मक पद रहने पर भी उपर बतलाया हुआ नियम लागू होगा; कारण इस नियम में पदों के चिह्न बहुत व्यापक रूप में प्रयोग किये गये हैं और उनमें से चाहे कोई चिह्न धनात्मक या ऋणात्मक राशि सूचित कर सकता है।

टीका। चूँकि $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$,

इसलिए $2(ab+ac+bc)=\{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\}-(a^2+b^2+c^2)$

$$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2).$$

उसी प्रकार $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.

उदाहरण 1. $x-y+z-v$ का वर्ग निकालो।

$$(x-y+z-v)^2=x^2+y^2+z^2+v^2+2x(-y+z-v)$$
$$+2(-y)(z-v)+2z(-v)$$
$$=x^2+y^2+z^2+v^2-2xy+2xz-2xv$$
$$-2yz+2yv-2zv.$$

उदाहरण 2. $-a+2b-3c-d$ का वर्ग निकालो।

$$(-a+2b-3c-d)^2=a^2+4b^2+9c^2+d^2+2(-a)(2b-3c-d)$$
$$+2(2b)(-3c-d)+2(-3c)(-d)$$
$$=a^2+4b^2+9c^2+d^2-4ab+6ac+2ad$$
$$-12bc-4bd+6cd.$$

उदाहरण 3. मूल्य निकालो : $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ यदि $a=19$, $b=18$ और $c=32$ हो।

दिया हुआ व्यंजक $=a^2+b^2+c^2+2a(b-c)+2b(-c)=(a+b-c)^2$.

इसलिए मूल्य $=(19+18-32)^2=(5)^2=25.$

उदाहरण 4. यदि $x=b+c$, $y=c-a$ और $z=a-b$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=4b^2.$$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1883.]

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=x^2+y^2+z^2+2x(-y-z)+2(-y)(-z)$$
$$=(x-y-z)^2=\{(b+c)-(c-a)-(a-b)\}^2$$
$$=(2b)^2=4b^2.$$

प्रश्नमाला 71

वर्ग निकालो :

1. $x+y-z.$
2. $x-y+z.$
3. $-x+y+z.$
4. $-x-y+z.$
5. $x-y-z.$
6. $a-x+y-z.$
7. $a-x-y-z.$
8. $m+n+p+q+r.$
9. $p-q+r-x-y.$
10. $-a+b-c+x-y-z.$
11. $a-2x-3y-4z.$
12. $2a-b+2c-d.$

मूल्य निकालो :

13. $l^2+m^2+n^2-2lm+2ln-2mn$, यदि $l=17$, $m=23$ $n=13$ हो।
14. $p^2+q^2+r^2+2pq-2pr-2qr$, यदि $p=16$, $q=12$ $r=25$ हो।
15. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$, यदि $a=28$, $b=13$ $c=15$ हो।
16. $x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$, यदि $x=6$ और $y=7$ हो।
17. $x^2+y^2+2xy-2x-2y+36$, यदि $x=23$ और $y=18$ हो।
18. $x^2+4y^2+1-4xy-2x+4y$, यदि $x=26$ और $y=12$ हो।
19. $x^2+9y^2-6xy-2x+6y+64$, यदि $x=49$ और $y=16$ हो।
20. $9x^2+y^2-6xy+6x-2y-24$, यदि $x=14$ और $y=38$ हो।

21. यदि $a+b+c=12$ और $a^2+b^2+c^2=50$ हो, तो $ab+ac+bc$ का मूल्य निकालो।

22. यदि $a+b+c=13$ और $ab+ac+bc=50$ हो, तो $a^2+b^2+c^2$ का मूल्य निकालो।

127. द्विपद व्यंजकों का घात निकालना : घातक्रिया (Involution) :

गुणन करके देखा जा सकता है कि

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^4&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4&=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\(a-b)^5&=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^6&=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\\(a-b)^6&=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6\end{aligned}\right\}$$

टीका 1. एक व्यंजक को उसी व्यंजक द्वारा एक या एक से अधिक बार लगातार गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस व्यंजक का घात (power) कहते हैं ; और यह कहा जाता है कि वह व्यंजक गुणन क्रिया द्वारा सूचित घात में लाया गया है ; किसी व्यंजक को किसी घात में लाने की क्रिया को घातक्रिया (involution) कहते हैं और किसी व्यंजक की घातक्रिया द्वारा जो व्यंजक प्राप्त होता है, उसको उस व्यंजक का विस्तार (expansion) कहते हैं।

टीका 2. उपर दिये हुए फलों की जांच से मालूम होता है कि

(1) द्विपद व्यंजकों के किसी घात के विस्तार से प्राप्त पदों की संख्या घातांक से (एक) अधिक है। जैसे, पांचवें घात के विस्तार में पद संख्या 6 है ; और छठे घात के विस्तार में पद-संख्या 7 है ; आदि।

(2) $a-b$ के किसी भी घात के बिस्तार और $a+b$ के उसी घात के विस्तार में केवल इतना ही भेद है कि पहले विस्तार के पद बारी बारी से (alternately) एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक हैं, परन्तु दूसरे विस्तार के सब पद धनात्मक हैं।

(3) किसी द्विपद व्यंजक के घात में जो घातांक होता है, द्विपद व्यंजक के पहले पद a और दूसरे पद b को उसी घातांक में लाने पर क्रमशः विस्तार का पहला व शेष पद

निकलता है। जैसे $a+b$ के चौथे घात के विस्तार में a^4 पहला पद और b^4 शेष पद है; $a+b$ के पंचम घात के विस्तार में a^5 पहला पद और b^5 शेष पद है; आदि। और पदों में से किसी में भी a का घातांक उसके पूर्वपदवाले a के घातांक से 1 (एक) कम, और b का घातांक उसके पूर्वपदवाले b के घातांक से 1 (एक) अधिक होता है।

(4) विस्तार के दूसरे पद का अंकगुणक द्विपद व्यंजक के घातांक के समान है; और किसी भी पद के अंकगुणक को उस पद के a के घातांक द्वारा गुणा करने से प्राप्त गुणनफल को उस पद का स्थान बतलानेवाले अंक द्वारा भाग करने पर उसके बाद के पद का अंकगुणक प्राप्त होता है। जैसे दूसरे पद के अंकगुणक को उस पद के a के घातांक द्वारा गुणा करके गुणनफल को 2 से भाग देने से तीसरे पद का अंकगुणक मिलता है; और तीसरे पद के अंकगुणक को उस पद के a के घातांक द्वारा गुणा करके गुणनफल को 3 से भाग देने से चौथे पद का अंकगुणक निकलता है; आदि।

(5) विस्तार में पहले व शेष पद से बराबर दूरीपर रहनेवाले दो पदों के अंकगुणक बराबर हैं। जैसे, आरम्भ से गिनकर चौथे पद का अंकगुणक अन्त से गिनकर चौथे पद के अंकगुणक के बराबर है; उसी प्रकार आरम्भ से पाँचवें पद का अंकगुणक अंत से पाँचवें पद के अंकगुणक के बराबर है, आदि।

उपर दिये हुए नियमों को साधारण रूप से सिद्ध करना इस पुस्तक के विषय के बाहर है। परन्तु इन नियमों को याद रखने से द्विपद व्यंजकों के किसी भी घात के विस्तार को विना गुणा किये बहुत आसानी से लिखा जा सकता है।

उदाहरण 1. $(a+b)^7$ का विस्तार लिखो।

विस्तार की कुल पदसंख्या $=8$;

$$\left.\begin{aligned} \text{अब पहला पद} &= a^7, \\ \text{दूसरा पद} &= 7a^6b, \\ \text{तीसरा पद} &= \frac{7\times 6}{2}a^5b^2 = 21a^5b^2, \\ \text{चौथा पद} &= \frac{21\times 5}{3}a^4b^3 = 35a^4b^3. \end{aligned}\right\} \quad [\text{ नियम (3) और (4) }]$$

अब चूँकि पहले व शेष पद से बराबर दूरीवाले पदों के अंकगुणक बराबर हैं [नियम (5)] इसलिए विस्तार का पाँचवाँ, छठा, सातवाँ और आठवाँ पद क्रमशः $35a^3b^4$, $21a^2b^5$, $7ab^6$ और b^7 होंगे।

इसलिए $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

उदाहरण 2. $(x-y)^8$ का विस्तार निकालो।

स्पष्ट है कि विस्तार की कुल पद-संख्या $= 9$.

पहला पद $= x^8$;

दूसरा पद $= -8x^7y$;

तीसरा पद $= \dfrac{8\times 7}{2}x^6y^2 = 28x^6y^2$;

चौथा पद $= -\dfrac{28\times 6}{3}x^5y^3 = -56x^5y^3$;

पाँचवाँ पद $= \dfrac{56\times 5}{4}x^4y^4 = 70x^4y^4$.

अब, चूँकि इसके बाद के चार पदों के अंकगुणक उल्टे क्रमसे पहले चार पदों के अंकगुणकों के बराबर हैं, इसलिए विस्तार का छठा, सातवाँ, आठवाँ और नवाँ पद क्रमशः $-56x^3y^5$, $28x^2y^6$, $-8xy^7$ और y^8 हैं।

इसलिए $(x-y)^8 = x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$.

उदाहरण 3. $(2x-3y)^7$ का विस्तार निकालो।

स्पष्ट है कि विस्तार की कुल पद-संख्या $= 8$.

चूँकि यहाँ a के बदले $2x$ और b के बदले $3y$ दिया गया है, इसलिए विस्तार में

पहला पद $= (2x)^7$;

दूसरा पद $= -7(2x)^6(3y)$;

तीसरा पद $= \dfrac{7\times 6}{2}(2x)^5(3y)^2 = 21(2x)^5(3y)^2$;

चौथा पद $= -\dfrac{21\times 5}{3}(2x)^4(3y)^3 = -35(2x)^4(3y)^3$.

इसलिए पाचवाँ, छठा, सातवाँ, और आठवाँ पद क्रमशः

$35(2x)^3(3y)^4$, $-21(2x)^2(3y)^5$, $7(2x)(3y)^6$, $-(3y)^7$ होंगे।

इसलिए
$$\begin{aligned}(2x-3y)^7 &= (2x)^7 - 7(2x)^6(3y) + 21(2x)^5(3y)^2 - 35(2x)^4(3y)^3 \\ &\quad + 35(2x)^3(3y)^4 - 21(2x)^2(3y)^5 + 7(2x)(3y)^6 - (3y)^7 \\ &= 128x^7 - 7(64x^6)(3y) + 21(32x^5)(9y^2) - 35(16x^4)(27y^3) \\ &\quad + 35(8x^3)(81y^4) - 21(4x^2)(243y^5) + 7(2x)(729y^6) - 2187y^7 \\ &= 128x^7 - 1344x^6y + 6048x^5y^2 - 15120x^4y^3 + 22680x^3y^4 \\ &\quad - 20412x^2y^5 + 10206xy^6 - 2187y^7.\end{aligned}$$

उदाहरण 4. मूल्य निकालो : $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x-8$ का, यदि $x=\sqrt[3]{3}-1$ हो।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)-9$

$$=(x+1)^6-9=(\sqrt[3]{3})^6-9=9-9=0.$$

प्रश्नमाला 72

विस्तार लिखो :

1. $(x+1)^5$. 2. $(x+1)^6$. 3. $(a+b)^8$. 4. $(a+b)^9$.
5. $(x-y)^5$. 6. $(m-n)^7$. 7. $(x+2)^4$. 8. $(x+2)^5$.
9. $(x+1)^8$. 10. $(x+3)^4$. 11. $(x-1)^5$. 12. $(2-z)^6$.
13. $(2x-1)^4$. 14. $(x-y)^9$. 15. $(3x-2)^5$. 16. $(1-a)^8$.
17. $(1-c)^7$. 18. $(1-3x)^6$. 19. $(1-2x)^7$. 20. $(2x-a)^8$.
21. $(x-a)^{10}$. 22. $(3x-2a)^5$.

हल करो :

23. $(x+1)^5-(x-1)^5$. 24. $(x-1)^6+(x+1)^6$. 25. $(x+a)^7-(x-a)^7$.

निम्नलिखित विस्तारों के अंकगुणकों का योगफल लिखो :

26. $(x+a)^4$. 27. $(x+a)^5$. 28. $(x+a)^6$.
29. $(x+a)^7$. 30. $(x+a)^8$.

मूल्य निकालो :

31. $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+32$, यदि $x=-2$ हो।
32. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x$, यदि $x=\sqrt[3]{2}+1$ हो।
33. $16x^4-32x^3+24x^2-8x-80$, यदि $x=2$ हो।
34. $x^4+12x^3+54x^2+108x+81$, यदि $x=-5$ हो।
35. $x^4+8x^3+24x^2+32x-609$, यदि $x=-7$ हो।

128. सूत्र : $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

[$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$$=(a+b+c)\{(a^2+b^2-ab)-(ac+bc)+c^2\}$$
$$=(a+b+c)\{\overline{(a+b)^2-3ab}-c(a+b)+c^2\}$$
$$=\overline{(a+b+c)}\{\overline{(a+b)^2-c(a+b)+c^2}-3ab\}$$
$$=\overline{(a+b)^3+c^3}-3ab(\overline{a+b}+c)$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$]

उपसिद्धान्त। उल्टे क्रम से $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$. इसलिए $a^3+b^3+c^3-3abc$ रूप के किसी व्यंजक के गुणनखंड निकाल सकते हैं।

टीका। चूँकि $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$, इसलिए $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

उदाहरण 1. $x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz$ को $x-y-z$ से गुणा करो।

फ़र्ज़ करो कि a है x, b है $-y$ और c है $-z$,

इसलिए $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz)$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=x^3-y^3-z^3-3xyz.$$

उदाहरण 2. $m^3-n^3+1+3mn$ के गुणनखंड निकालो।

m की जगह a, $-n$ की जगह b और 1 की जगह c लिखने से

$$m^3-n^3+1+3mn=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=(m-n+1)(m^2+n^2+1+mn-m+n).$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो :

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

फ़र्ज़ करो $x-y=a$, $y-z=b$ व $z-x=c$,

इसलिए $a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0.$

और $\{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\}-3(x-y)(y-z)(z-x)$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=0\times(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0;$$

$\therefore\ (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$

प्रश्नमाला 73

गुणा करो :

1. $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz$ को $x+y-z$ से।
2. $p^2+4q^2+r^2+2pq+pr-2qr$ को $p-2q-r$ से।

3. $4x^2+9y^2+z^2+6xy+2xz-3yz$ को $2x-3y-z$ से ।

4. $a^2+4b^2+2ab-3a+6b+9$ को $a-2b+3$ से ।

5. $9a^2+25b^2+15ab+12a-20b+16$ को $3a-5b-4$ से ।

गुणनखंड निकालो :

6. $x^3-y^3-1-3xy$. 7. $x^3-y^3+6xy+8$.

8. $x^3-8y^3-27z^3-18xyz$.

मूल्य निकालो :

9. $x^3+y^3+18xy-216$ का, जब कि $x+y=6$.

10. $a^3-8b^3-24ab-64$ का, जब कि $a-2b=4$.

11. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$ का,
जब कि $3s=a+b+c$.

12. सिद्ध करो : $(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3$
$=3(a-2b)(2b-3c)(3c-a)$.

13. सिद्ध करो : $(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3$
$=3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)$.

14. सिद्ध करो : $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$
$=3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b)$.

15. सिद्ध करो : $(2p-5q+3r)^3+(2q-5r+3p)^3+(2r-5p+3q)^3$
$=3(2p-5q+3r)(2q-5r+3p)(2r-5p+3q)$.

16. मूल्य निकालो : $x^6+y^6-z^6+3x^2y^2z^2$ का, यदि $x=a^2-b^2$, $y=2ab$, $z=a^2+b^2$ हो ।

17. मूल्य निकालो : $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का, यदि $x=658$, $y=668$, $z=674$ हो ।

129. सूत्र : $(a-b)(a-c)(b-c)$

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b).$$

[$(a-b)(a-c)(b-c)=\{a^2-a(b+c)+bc\}(b-c)$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.]

उपसिद्धान्त 1. उल्टे क्रम से $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$$=(a-b)(a-c)(b-c).$$

इसलिए $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ रूप के किसी व्यंजक के गुणनखंड आसानी से निकाले जा सकते हैं।

उपसिद्धान्त 2. चूँकि $a-c=-(c-a)$,
इसलिए $(a-b)(a-c)(b-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

फलतः यह सूत्र निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है :
$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

उपसिद्धान्त 3. चूँकि $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ को $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ रूप में भी लिखा जा सकता है।

इसलिए $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

उदाहरण 1. हल करो : $(a+2b+3c)^2(a-2b+c)+(b+2c+3a)^2(b-2c+a)+(c+2a+3b)^2(c-2a+b)+(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b)$.

$a+2b+3c$ की जगह x,
$b+2c+3a$ की जगह y,
और $c+2a+3b$ की जगह z
लिखने से
$$\left.\begin{aligned} y-z&=a-2b+c\\ z-x&=b-2c+a\\ x-y&=c-2a+b \end{aligned}\right\}$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक
$$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)$$
$$=-(y-z)(z-x)(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)=0.$$

प्रश्नमाला 74

1. सिद्ध करो कि $(x-2y+z)(2x-y-z)(y-2z+x)=(x-y)^2(y-2z+x)+(y-z)^2(z-2x+y)+(z-x)^2(x-2y+z)$.

2. सिद्ध करो : $(a+b)^2(b-a)+(b+c)^2(c-b)+(c+a)^2(a-c)+(b-a)(c-b)(a-c)=0$.

3. गुणनखंड निकालो :
$$2(a-b+c)^2(a-c)+2(b-c+a)^2(b-a)+2(c-a+b)^2(c-b).$$

4. गुणनखंड निकालो : $(x+y)^2(y-x)+(y+z)^2(z-y)+(z+x)^2(x-z)$.

5. हल करो : $2(a-b-c)^2(b-c)+2(b-c-a)^2(c-a)$
$+2(c-a-b)^2(a-b)+8(a-b)(b-c)(c-a)$.

6. हल करो : $(x-y)(y-z)(x-2y+z)+(y-z)(z-x)(y-2z+x)$
$+(z-x)(x-y)(z-2x+y)+(x-2y+z)(y-2z+x)(z-2x+y)$.

130. सूत्र : $(b+c)(c+a)(a+b)$

$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.$$

[$(b+c)(c+a)(a+b)=(b+c)\{(a+b)(a+c)\}$

$$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$
$$=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2$$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc.$$

[पदों को हेरफेर से सजाकर]

किन्तु $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$

[पदों को हेरफेर से सजाकर]

$$=(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)+(a^2b+ab^2)$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$$
$$=bc(a+b+c-a)+ca(a+b+c-b)+ab(a+b+c-c)$$
$$=bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)-bca-cab-abc$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc.$$

इसी से सूत्र में दिखलाये हुए सब तादात्म्य निकलते हैं।

131. सूत्र : $(a+b+c)(bc+ca+ab)=P+3abc$,

जब कि P निम्नलिखित तीन व्यंजकों में से किसी को भी सूचित करता हो :

(i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$;
(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$;
(iii) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

नियम 130 से तरफ़ बदल करके अथवा वास्तविक गुणन द्वारा

$$[\ (a+b+c)(bc+ca+ab)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc.\ ]$$

उदाहरण 1. गुणनफल निकालो : $(2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)$.

यदि क्रमशः $2x$, $3y$ व $5z$ की जगह पर a, b व c रक्खें, तो

$$a+b+c=2x+3y+5z,$$
$$bc+ca+ab=15yz+10zx+6xy\ ;$$

$$\therefore\ (2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$$
$$=4x^2(3y+5z)+9y^2(5z+2x)+25z^2(2x+3y)+3.2x.3y.5z$$
$$=12x^2y+20x^2z+45y^2z+18y^2x+50z^2x+75z^2y+90xyz.$$

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि $(x+3y+12z)(12yz+4zx+xy)-12xyz$
$$=(y+4z)(12z+x)(x+3y).$$

यदि क्रमशः x, $3y$ व $12z$ की जगह पर a, b व c लिखें, तो

$$a+b+c=x+3y+12z,$$
$$bc+ca+ab=36yz+12zx+3xy=3(12yz+4zx+xy),$$
और $abc=36xyz$;

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=\frac{1}{3}\{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc\}$

$=\frac{1}{3}(b+c)(c+a)(a+b)$ [नियम 130]

$=\frac{1}{3}(3y+12z)(12z+x)(x+3y)$ [a, b व c के मूल्य बिठाने पर]

$=(y+4z)(12z+x)(x+3y)$.

प्रश्नमाला 75

निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनफल लिखो :

1. $(x+2y)(2y+3z)(3z+x)$.
2. $(8x+y)(y+5z)(5z+8x)$.
3. $(a+2b)(2b+3c)(3c+a)$.
4. $(3x+y+10z)(10yz+30zx+3xy)$.
5. $(x+2y+z)(2x+y+z)(x+y+2z)$.
6. $(a-2b)(2b-3c)(3c+a)$.

सरल करो :

7. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$

8. $c(b+c-a)(c+a-b)+a(c+a-b)(a+b-c)$
$+b(a+b-c)(b+c-a)+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$

9. $(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)+(x+y)^2(x+y+2z)$
$-(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y).$

10. $2a(b+c-a)^2+2b(c+a-b)^2+2c(a+b-c)^2-3abc$
$+2(a+b+c)\{(c+a-b)(a+b-c)+(a+b-c)(b+c-a)$
$+(b+c-a)(c+a-b)\}.$

11. सिद्ध करो : $(x+y-z)\{(y+z-x)^2+(z+x-y)^2\}+(y+z-x)$
$\times\{(z+x-y)^2+(x+y-z)^2\}+(z+x-y)\{(x+y-z)^2+(y+z-x)^2\}$
$+2(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=8xyz.$

132. सूत्र : $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

[$(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$

$=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c\{(a+b)+c\},$ [नियम 57]

$=\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}+c^3+3(a+b)c(a+b+c)$

$=a^3+b^3+c^3+\{3ab(a+b)+3(a+b)c(a+b+c)\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{ab+c(a+b+c)\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{c^2+c(a+b)+ab\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(c+b)(c+a)$ [नियम 61]

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$]

उपसिद्धान्त । $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$

उदाहरण 1. $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$ के गुणनखंड निकालो ।

फ़र्ज़ करो कि a, b व c क्रमशः $y+z$, $z+x$ व $x+y$ के बराबर हैं ।

इसलिए $a+b+c=2(x+y+z).$

B—17

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=\{2(x+y+z)\}^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$

$=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$=3(b+c)(c+a)(a+b)$ [उपसि०]

$=3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$

[a, b और c के मूल्य बिठाने पर]

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि

$$(x+y+z)^3=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

फर्ज़ करो कि a, b व c क्रमशः $y+z-x$, $z+x-y$, $x+y-z$ के बराबर हैं।

तो $a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z,$

$b+c=(z+x-y)+(x+y-z)=2x,$

$c+a=(x+y-z)+(y+z-x)=2y,$

और $a+b=(y+z-x)+(z+x-y)=2z.$

$\therefore$ $(x+y+z)^3=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$

$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z$

$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$

प्रश्नमाला 76

1. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^3+b^3+c^3=3a(c+a)(a+b)$
$=3b(b+c)(b+a)=3c(c+a)(c+b)=3abc.$

2. यदि $2s=x+y+z$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3xyz=s^3.$$

3. सिद्ध करो कि $(2x-y-z)^3+(2y-z-x)^3+(2z-x-y)^3$
$=3(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y).$

4. सरल करो : $(3x-y-z)^3+(3y-z-x)^3+(3z-x-y)^3$
$+24(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)-x^3-y^3-z^3$
$-3(y+z)(z+x)(x+y).$

5. सिद्ध करो कि $(2x-y-z)^3+y^3+z^3+3(y+z)(2x-y)(2x-z)$
$=(2x-y-3z)^3+y^3+27z^3+3(y+3z)(2x-y)(2x-3z).$

6. यदि $2s=x+y+z$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$s^3+(s-2x)^3+(s-2y)^3+(s-2z)^3-24(s-x)(s-y)(s-z)=0.$$

7. यदि $3s = 2(x+y+z)$ हो, तो सिद्ध करो कि $(s-y-z)^3 + (s-z-x)^3 + (s-x-y)^3 + 3(y+z-s)(z+x-s)(x+y-s) = 0.$

सरल करो :

8. $(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 - (a+b+c)^3 + 108abc.$

9. $(x+y+z)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3 - (x+y)^3 + x^3 + y^3 + z^3.$

10. गुणनखंड निकालो : $x^3 - (2x-y-z)^3 - (2y-z-x)^3 + (y-2z)^3.$

11. गुणनखंड निकालो : $64(x+y+z)^3 - (2x+y+z)^3 - (x+2y+z)^3 - (x+y+2z)^3.$

मूल्य निकालो :

12. $a^3 + b^3 + c^3$, जब कि $b+c=10$, $c+a=16$ व $a+b=20$ है।

13. $x^3 + y^3 + z^3$, जब कि $x=32$, $y=-25$ व $z=-7$ है।

14. $(x+y+z)^3 - (x+z-y)^3 - (y+z-x)^3 - (x+y-z)^3 - 23xyz$,
जब कि $x=10$, $y=64$ व $z=2$ है।

15. $(6x-y-z)^3 + y^3 + z^3 + 3(y+z)(6x-y)(6x-z)$,
जब कि $x=\frac{11}{6}$, $y=\frac{115}{113}$ व $z=17$ है।

133. सूत्रों की आवृत्ति : चौथे और इस अध्याय में बतलाये हुए नाना सूत्रों को प्रयोजन के समय काम में लाने की आसानी के लिए वे फिर नीचे एक साथ लिखे गये हैं। किन्तु विद्यार्थियों को इन सूत्रों को इस प्रकार याद करना चाहिए कि काम में लाने के समय उनको फिर देखना न पड़े।

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$

IV. $\left.\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b).\end{aligned}\right\}$

V. $\left.\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b).\end{aligned}\right\}$

VI. $\left.\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b)\\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2).\end{aligned}\right\}$

VII. $\left.\begin{aligned}a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b)\\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}\right\}$

VIII. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

IX. $(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab.$

X. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab.$

XI. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$

XII. $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc.$

XIII. $$\left.\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\\&=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.\end{aligned}\right\}$$

XIV. $$\left.\begin{aligned}(a-b)(a-c)(b-c)&=-(b-c)(c-a)(a-b)\\&=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\\&=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}.\end{aligned}\right\}$$

XV. $$\left.\begin{aligned}(b+c)(c+a)(a+b)&=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\\&=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc\\&=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc\\&=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.\end{aligned}\right\}$$

XVI. $$\left.\begin{aligned}&(a+b+c)(bc+ca+ab)\\&\quad=(b+c)(c+a)(a+b)+abc\\&\quad=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc\\&\quad=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc\\&\quad=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc.\end{aligned}\right\}$$

XVII. $$\left.\begin{aligned}(a+b+c)^3&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)\\&=a^3+b^3+c^3+3\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+6abc,\\ \text{अथवा}\quad (a+b+c)^3&-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).\end{aligned}\right\}$$

निम्नलिखित फलों को ध्यान में रखना चाहिए। वे या तो उपर दिये हुए सूत्रों की सहायता से, या वास्तविक गुणन द्वारा सिद्ध किये जा सकते हैं।

XVIII. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2).$

XIX. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,$ अथवा $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$

XX. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab.$

XXI. $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c).$

XXII. $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$

XXIII. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.$

XXIV. $\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

XXV. $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$.

XXVI. $(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3$.

XXVII. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

XXVIII. $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.$$

XXIX. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

XXX. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

बाईसवाँ अध्याय

कठिन गुणनखंड और तादात्म्य

(Harder Factors and Identities)

I. गुणनखंड (Factors)

बारहवें अध्याय में a^2-b^2, a^3+b^3, a^3-b^3 और ax^2+bx+c आदि व्यंजकों की गुणनखंडीकरण की रीति बतलाई गई है। इस अध्याय में और भी कठिन व्यंजकों के गुणनखंडीकरण की रीति बतलाई जायगी।

134. $a^3+b^3+c^3-3bac$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखंड निकालना :

चूँकि $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$,

इसलिए $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=a^3+\{(b+c)^3-3bc(b+c)\}-3abc$$
$$=\{a^3+(b+c)^3\}-3bc\{(b+c)+a\}$$
$$=\{a+(b+c)\}\{a^2-a(b+c)+(b+c)^2\}-3bc(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2-3bc\}$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

उदाहरण 1. $a^3-b^3+c^3+3abc$ के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=a^3+(-b)^3+c^3-3a(-b)c$
$$=\{a+(-b)+c\}\{a^2+(-b)^2+c^2-(-b)c-ca-a(-b)\}$$
$$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab).$$

उदाहरण 2. $x^3-y^3+6xy+8$ के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक

$$=x^3+(-y)^3+(2)^3-3x(-y).2$$
$$=\{x+(-y)+2\}\{x^2+(-y)^2+2^2-(-y).2-2x-x(-y)\}$$
$$=(x-y+2)(x^2+y^2+4+2y-2x+xy).$$

उदाहरण 3. x^6+32x^3-64 के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक

$$=x^6+8x^3-64+24x^3$$
$$=(x^2)^3+(2x)^3+(-4)^3-3.x^2.2x.(-4)$$
$$=\{x^2+2x+(-4)\}\{(x^2)^2+(2x)^2+(-4)^2-2x(-4)-(-4)x^2-x^2.2x\}$$
$$=(x^2+2x-4)(x^4+4x^2+16+8x+4x^2-2x^3)$$
$$=(x^2+2x-4)(x^4-2x^3+8x^2+8x+16).$$

उदाहरण 4. भजनफल निकालो : $a^3+b^3+1-3ab$ का $a+b+1$ से।

$$a^3+b^3+1-3ab=a^3+b^3+1^3-3ab.1$$
$$=(a+b+1)\{a^2+b^2+1^2-b.1-1.a-ab\}$$
$$=(a+b+1)(a^2+b^2+1-b-a-ab);$$

$\therefore$ भजनफल $=a^2+b^2+1-b-a-ab.$

प्रश्नमाला 77

गुणनखंड निकालो :

1. $x^3+y^3-z^3+3xyz.$
2. $p^3-8q^3-r^3-6pqr.$
3. $8x^3-27y^3-z^3-18xyz.$
4. $a^3+8b^3+1-6ab.$
5. $8a^3+27b^3-64+72ab.$
6. भजनफल निकालो : $x^3-y^3+6xy+8$ का $x-y+2$ से।

गुणनखंड निकालो :

7. $x^6+5x^3+8.$
8. $(x-y)^3-(y-z)^3+(z-x)^3+3(y-z)(z-x)(x-y).$
9. $a^6-18a^3+125.$

भजनफल निकालो :

10. $x^3+27-5y(25y^2-9x)$ का $x^2+25y^2+9+5xy-3x+15y$ से।
11. $a^3+b^3-c^3+3abc$ का $a+b-c$ से।

12. $x^3-y^3-1-3xy$ का $x-y-1$ से।

13. $x^3-8y^3+27z^3+18xyz$ का $x-2y+3z$ से।

14. $8a^3-27b^3-c^3-18abc$ का $4a^2+9b^2+c^2+6ab+2ac-3bc$ से।

15. $14a^3-4b^3+9a^2b$ के गुणनखंड निकालो।

135. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखंड निकालना :

उपर दिया हुआ व्यंजक

$$=\{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\}-abc$$
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)=(b+c)(c+a)(a+b).$$

उपसिद्धान्त 1. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)=abc.$

उपसिद्धान्त 2. $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

136. नीचे दिये हुए व्यंजकों का गुणनखंड निकालना :

(i) $P+2abc$ और (ii) $P+3abc,$

जब कि P, नीचे दिये हुए व्यंजकों में से किसी को भी सूचित करता हो :

(1) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$

(2) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$

(3) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$

(i) यदि P, (1) द्वारा सूचित व्यंजक हो, तो

$$P+2abc=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2$$

[a के घातों में सजाने पर]

$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)=(b+c)(c+a)(a+b).$$

(ii) यदि P, (2) द्वारा सूचित व्यंजक हो, तो

$$P+3abc=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+abc+abc+abc$$
$$=\{bc(b+c)+abc\}+\{ca(c+a)+abc\}+\{ab(a+b)+abc\}$$
$$=bc(a+b+c)+ca(c+a+b)+ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

137. नीचे दिये हुए व्यंजकों में यदि कोई भी Q द्वारा सूचित हो, तो Q के गुणनखंड निकालना :

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(2) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

(3) $-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$.

यदि Q पहले रूप का व्यंजक हो, तो

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2$$

[a के घातों में सजाने पर]

$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

उपसिद्धान्त। a, b, c के बदले क्रमशः a^2, b^2 व c^2 लिखने पर

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$$
$$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

उदाहरण। गुणनखंड निकालो :

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b).$$

दिया हुआ व्यंजक $=(x^2-2ax+a^2)(b-c)+(x^2-2bx+b^2)(c-a)$
$+(x^2-2cx+c^2)(a-b)$

[x के घातों में सजाने पर]

$$=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}-2x\{a(b-c)+b(c-a)$$
$$+c(a-b)\}+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
$$=x^2.0-2x.0-(b-c)(c-a)(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

138. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ के गुणनखंड निकालना :

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$$

[a के घातों में सजाकर]

$$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$$
$$=(b-c)\{-b^2(a-c)-bc(a-c)+a(a^2-c^2)\}$$

[b के घातों में सजाकर]

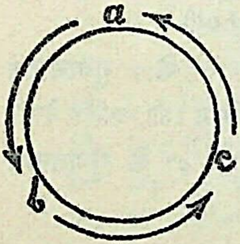
$$=(b-c)(a-c)\{-b^2-bc+a(a+c)\}$$
$$=(b-c)(a-c)\{c(a-b)+a^2-b^2\}$$

[अंतिम गुणनखंड को c के घातों में सजाकर]

$$=(b-c)(a-c)(a-b)(c+b+a)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

टीका। इस बात पर ध्यान देना चाहिए कि दिये हुए व्यंजक को (i) a के घातों में सजाने पर $(b-c)$ गुणनखंड आसानी से प्राप्त होता है ; (ii) इसके बाद धनु कोष्ठक के अन्दर के व्यंजक को b के घातों में सजाने पर, दूसरा गुणनखंड $(a-c)$ आसानी से प्राप्त होता है ; (iii) अंत में फिर धनु कोष्ठक के अन्दर के व्यंजक को c के घातों में सजाने पर तीसरा गुणनखंड $(a-b)$ आसानी से प्राप्त होता है।

139. चक्रीय क्रम (Cyclic order) : 137 वें व 138 वें नियमों में दिये हुए व्यंजकों में तीन अक्षर a, b, c जिस रीति से लिखे गये हैं, उस पर ध्यान देना चाहिए।



दृष्टान्तरूप से 137 वें नियम में दिये हुए Q के लिए जो तीन व्यंजक लिखे गये हैं और जो परस्पर समान हैं उनमें से किसी एक के पहले पद में a, b, c के बदले क्रमशः b, c, a लिखने पर उसका दूसरा पद प्राप्त होता है ; और दूसरे पद में b, c, a के बदले क्रमशः c, a, b लिखने पर तीसरा पद और तीसरे पद में c, a, b के बदले क्रमशः a, b, c लिखने पर पहला पद प्राप्त होता है। a, b, c तीन अक्षरों को किस क्रम से बार बार बदलना होगा वह निम्नलिखित उपाय से आसानी से मालूम होगा।

a, b, c तीन अक्षरों को (जिस प्रकार चित्र में दिखलाया गया है) एक वृत्त के चारों ओर लिखो ; अब a से आरम्भ करके तीर चिह्न द्वारा सांकेतिक दिशा में चलते रहने से, परिधि के उपर दिये हुए तीन अक्षर abc इस क्रम में पाये जाते हैं। उसी प्रकार क्रमशः b व c से आरम्भ करके और जैसा बतलाया गया है उसी ओर चलने से यही तीन अक्षर क्रमशः bca व cab इन क्रमों में पाये जाते हैं।

यदि तीन अक्षर a, b, c उपर दी हुई रीति से लिखे जायं तो इस रीति को चक्रीय क्रम (cyclic order) कहते हैं।

a, b, c के चक्रीय क्रम में लिखे हुए कई व्यंजक दिये जाते हैं :

(i) $b+c$, $c+a$ व $a+b$; (ii) $b-c$, $c-a$ व $a-b$;

(iii) $b+c-a$, $c+a-b$ व $a+b-c$; (iv) bc, ca व ab ;

(v) $a^2(b-c)$, $b^2(c-a)$ व $c^2(a-b)$; आदि।

140. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ **के गुणनखंड निकालना :**

यहाँ पर चूँकि अक्षर चक्रीय क्रम के अनुसार लिखे गये हैं, इसलिए पूर्व उदाहरण की रीति काम में लायी जायगी।

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$$
[पदों को a के घातों में सजाकर]
$$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$$
$$=(b-c)\{-b^2(a^2-c^2)+ba^2(a-c)+a^2c(a-c)\}$$
[पदों को b के घातों में सजाकर]
$$=(b-c)(a-c)\{-b^2(a+c)+ba^2+a^2c\}$$
$$=(b-c)(a-c)\{c(a^2-b^2)+ab(a-b)\}$$
[पदों को c के घातों में सजाकर]
$$=(b-c)(a-c)(a-b)\{c(a+b)+ab\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

141. सूत्र : $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ **के गुणनखंड निकालना :**

[नियम 132, उपसि० देखो]

142. सूत्र : $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ **के गुणनखंड निकालना :**

दिया हुआ व्यंजक $=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$
$$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$$
$$=\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}$$
$$=\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}$$
$$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$$
$$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}$$
$$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

प्रश्नमाला 78

गुणनखंड निकालो :

1. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b).$
2. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2).$

3. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$.

4. $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3)$.

5. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$.

6. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$.

7. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.

8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.

9. $(x^2+2x+4)(y-z)+(y^2+2y+4)(z-x)+(z^2+2z+4)(x-y)$.

10. $\{x^2-(b+c)x+bc\}(b-c)+\{x^2-(c+a)x+ca\}(c-a)$
$+\{x^2-(a+b)x+ab\}(a-b)$.

11. $(x+b)(x+c)(b-c)+(x+c)(x+a)(c-a)+(x+a)(x+b)(a-b)$.

12. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-3abc$.

13. $8x^3-(y-z)^3-(z+x)^3-(x-y)^3$.

14. $a^6(b^3-c^3)+b^6(c^3-a^3)+c^6(a^3-b^3)$.

15. $x^6(y^4-z^4)+y^6(z^4-x^4)+z^6(x^4-y^4)$.

16. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$.

17. $yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)-x^3-y^3-z^3-2xyz$.

18. $(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)$.

19. $(x+1)^3(y-z)+(y+1)^3(z-x)+(z+1)^3(x-y)$.

20. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.

21. $2b^2c^2y^2z^2+2c^2a^2z^2x^2+2a^2b^2x^2y^2-a^4x^4-b^4y^4-c^4z^4$.

22. $72y^2z^2+18z^2x^2+8x^2y^2-x^4-16y^4-81z^4$.

23. मूल्य निकालो : $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$,
यदि $b+c-a=7$, $c+a-b=10$ व $a+b-c=3$.

24. मूल्य निकालो : $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.
यदि $a+b+c=20$, $bc+ca+ab=18$ व $abc=37$.

25. मूल्य निकालो : $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3+3abc$,
यदि $a+b+c=13$ व $a^2+b^2+c^2=69$.

143. व्युत्क्रम व्यंजकों (reciprocal expression) का गुणनखंडीकरण :

परिभाषा। जिन व्यंजकों में पहले व शेष पद से सम-दूरस्थ दा पदों के गुणक एक ही हों उनको **व्युत्क्रम व्यंजक** (Reciprocal or recurring expression) कहते हैं। जैसे, $x^4+4x^3+5x^2+4x-1$ एक व्युत्क्रम व्यंजक है।

उदाहरण 1. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(x^4+1)+(2x^3+2x)+3x^2$

[समान गुणकवाले दो पदों को एक साथ रखकर]

$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+2x(x^2+1)+3x^2$

$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+3x^2-2x^2$

$=(x^2+1)^2+2(x^2+1).x+x^2$

$=\{(x^2+1)+x\}^2=(x^2+x+1)^2.$

उदाहरण 2. $a^4-5a^3-12a^2-5a+1$ के गुणनखंड निकालो।

दिया हुआ व्यंजक $=(a^4+1)-(5a^3+5a)-12a^2$

[समान गुणकवाले दो पदों को एक साथ रखकर]

$=\{(a^2+1)^2-2a^2\}-5a(a^2+1)-12a^2$

$=(a^2+1)^2-5(a^2+1).a-2a^2-12a^2$

$=x^2-5xa-14a^2,$ [a^2+1 के स्थान पर x विठाने पर]

$=(x+2a)(x-7a)$

$=(a^2+1+2a)(a^2+1-7a)$ [x के स्थान पर a^2+1 विठाने पर]

$=(a+1)^2(a^2-7a+1).$

144. परीक्षा-द्वारा गुणनखंड निकालना :

उदाहरण 1. गुणनखंड निकालो : $x^3-2x^2-5x+6.$

परीक्षा-द्वारा देखा जाता है कि दिये हुए व्यंजक के सब पदों को इस प्रकार भिन्न भिन्न अंशों में सजाया जा सकता है कि प्रत्येक अंश $x-1$ द्वारा विभाज्य है। जैसे,

दिया हुआ व्यंजक $=x^3-x^2-x^2+x-6x+6$

$=(x^3-x^2)-(x^2-x)-(6x-6)$

$=x^2(x-1)-x(x-1)-6(x-1)$

$=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3).$

टीका। इस पर ध्यान देना चाहिए कि यदि दिये हुए व्यंजक में x के बदले 1, -2 अथवा 3 बिठाया जाय तो व्यंजक का मूल्य हर हालत में 0 (शून्य) होता है। इसके अनुसार साधारण रूप से कहा जा सकता है कि x-वाले किसी व्यंजक में यदि x के बदले a विठाने पर व्यंजक का मूल्य 0 हो, तो उस व्यंजक का एक गुणनखंड $x-a$ होगा।

उपर दिये हुए साधारण नियम से निम्नलिखित विशेष सिद्धान्त निकलते हैं :

x-वाली राशियों में x के घातों को सूचक पूर्ण संख्या होने से,

(1) यदि उसके भिन्न भिन्न पदों के गुणकों का बीजीय योगफल 0 हो, तो $x-1$ उस व्यंजक का गुणनखंड होगा।

(2) यदि व्यंजक के विषम (odd) घातांकवाले पदों के गुणकों का योगफल, बाक़ी पदों के गुणकों के योगफल के बराबर हो तो $x+1$ उस व्यंजक का एक गुणनखंड होगा। जैसे, पहले उदाहरण में भिन्न भिन्न पदों के गुणकों का योगफल

$$=1+(-2)+(-5)+6=1-2-5+6=0.$$

इसलिए $x-1$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड है।

और x^3+3x^2+3x+1 में x^3 और x ही x के विषम घातांकवाले पद हैं। इन दो पदों के गुणकों का योगफल $=1+3=4$; और बाक़ी पदों के गुणकों का योगफल $=3+1=4$. और चूँकि दोनों योगफल बराबर हैं इसलिए मालूम होता है कि x^3+3x^2+3x+1 का एक गुणनखंड $x+1$ होगा।

उदाहरण 2. गुणनखंड निकालो : $x^3+6x^2+11x+6$.

x के विषम घातांकवाले पदों के गुणकों का योगफल $1+11=12$; और बाक़ी पदों के गुणकों का योगफल $=6+6=12$; इसलिए $x+1$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड होगा। अब पदों को इस प्रकार भिन्न भिन्न अंशों में मिलाना होगा कि प्रत्येक अंश $x+1$ द्वारा विभाज्य हो। इस प्रकार करने पर,

$$\begin{aligned}\text{दिया हुआ व्यंजक} &= x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6\\ &=(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)\\ &=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)\\ &=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3).\end{aligned}$$

उदाहरण 3. गुणनखंड निकालो : $8x^3+16x-9$.

$$\begin{aligned}2x \text{ के स्थान पर } y \text{ रखने पर दिया हुआ व्यजक} &=(2x)^3+8.(2x)-9\\ &=y^3+8y-9.\end{aligned}$$

अब y^3+8y-9 के गुणकों का योगफल $=1+8-9=0$.

इसलिए इस व्यंजक का एक गुणनखंड $y-1$ होगा। अब इसके पदों को इस प्रकार भिन्न भिन्न अंशों में लिखो कि प्रत्येक अंश $y-1$ द्वारा विभाज्य हो। इस क्रिया से

$$\begin{aligned}y^3+8y-9 &= y^3-y+9y-9=y(y^2-1)+9(y-1)\\ &=(y-1)\{y(y+1)+9\}=(y-1)(y^2+y+9)\\ &=(2x-1)(4x^2+2x+9). \qquad [\,y \text{ के स्थान पर } 2x \text{ रखने पर}\,]\end{aligned}$$

उदाहरण 4. गुणनखंड निकालो : $x^5+4x^4-13x^3-13x^2+4x+1$.

इस प्रश्न में देखा जाता है कि x के विषम घातवाले पदों के गुणकों का योगफल

$$=1+(-13)+4=-8\ ;$$

और बाक़ी गुणकों का योगफल $=4+(-13)+1=-8$.

अब चूँकि दोनों योगफल बराबर हैं इसलिए दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड $x+1$ होगा।

अब व्यंजक के पदों को इस प्रकार अंशों में लिखो कि प्रत्येक अंश $x+1$ द्वारा विभाज्य हो। इस क्रिया द्वारा

दिया हुआ व्यंजक $=(x^5+x^4)+(3x^4+3x^3)-(16x^3+16x^2)+(3x^2+3x)+(x+1)$

$$=x^4(x+1)+3x^3(x+1)-16x^2(x+1)+3x(x+1)+(x+1)$$
$$=(x+1)(x^4+3x^3-16x^2+3x+1).$$

अब चूँकि यह $x^4+3x^3-16x^2+3x+1$ गुणनखंड एक व्युत्क्रम व्यंजक (reciprocal expression) है, इसलिए 143 वें नियम के अनुसार

$$x^4+3x^3-16x^2+3x+1=(x^4+1)+(3x^3+3x)-16x^2$$

[समान गुणकवाले पदों को एक साथ सजाकर]

$$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+3x(x^2+1)-16x^2$$
$$=(x^2+1)^2+3(x^2+1).x-2x^2-16x^2$$
$$=y^2+3yx-18x^2,$$ [अब x^2+1 के स्थान पर y रखकर]
$$=(y-3x)(y+6x)$$
$$=(x^2+1-3x)(x^2+1+6x),$$

[y के बदले उसका मूल्य x^2+1 रखने पर]

$$=(x^2-3x+1)(x^2+6x+1).$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=(x+1)(x^2-3x+1)(x^2+6x+1).$

उदाहरण 5. गुणनखंड निकालो : $x^3+x^2-21x-38.$

ध्यानपूर्वक देखने से मालूम होता है कि x के स्थान पर -2 रखने से व्यंजक का मूल्य 0 हो जाता है। इसलिए $x-(-2)$ अर्थात् $x+2$ उसका एक गुणक होगा। इसलिए

$$x^3+x^2-21x-38=(x^3+2x^2)-(x^2+2x)-(19x+38),$$

[पदों के ऐसे अंश बनाये गये हैं कि $x+2$ द्वारा विभाज्य हों]

$$=x^2(x+2)-x(x+2)-19(x+2)$$
$$=(x+2)(x^2-x-19).$$

145. दूसरे परिमाण (dimension) वाले समघातिक व्यंजकों (homogeneous expression) का गुणनखंड निकालना :

निम्नलिखित उदाहरणों से गुणनखंडीकरण की रीति मालूम होगी।

उदाहरण 1. गुणनखंड निकालो : $6a^2+7ab+2b^2+11ac+7bc+3c^2$

दिये हुए व्यंजक में $a=0$ मानने पर बाक़ी अंश $=2b^2+7bc+3c^2$

$$=(2b+c)(b+3c). \quad \cdots \quad (1)$$

दिये हुए व्यंजक में $b=0$ मानने पर बाक़ी अंश $=6a^2+11ac+3c^2$

$$=(3a+c)(2a+3c). \quad \cdots \quad (2)$$

दिये हुए व्यंजक में $c=0$ मानने पर बाक़ी अंश $=6a^2+7ab+2b^2$

$$=(3a+2b)(2a+b). \quad \cdots \quad (3)$$

अब (1), (2) व (3) द्वारा सूचित फलों से स्पष्ट जाना जाता है कि दिया हुआ व्यंजक $=(3a+2b+c)(2a+b+3c)$; [कारण, इन दो गुणनखंडों में यदि (i) $a=0$ माना जाय तो (1) द्वारा सूचित गुणनखंड, (ii) $b=0$ माना जाय तो (2) द्वारा सूचित गुणनखंड और (iii) $c=0$ माना जाय तो (3) द्वारा सूचित गुणनखंड प्राप्त होता है।

विकल्प विधि (Alternative Method) : दिये हुए व्यंजकों को उसके किसी अक्षर, फ़र्ज़ करो a, के घातों के अवरोहक्रमानुसार पदों को लिखने पर,

दिया हुआ व्यंजक $=6a^2+(7b+11c)a+(2b^2+7bc+3c^2)$

$$=6a^2+(7b+11c)a+(2b+c)(b+3c).$$

अब $(2b+c)(b+3c)$ और (a^2 के गुणक) 6 के गुणनफल के ऐसे दो गुणनखंड निकालो जिनका बीजीय योगफल a के गुणक (अर्थात् $7b+11c$) के बराबर हो। ध्यानपूर्वक विचार से देखा जाता है कि $2(2b+c)$ और $3(b+3c)$ ये दो गुणनखंड हैं।

अब दिया हुआ व्यंजक $=6a^2+2(2b+c)a+3(b+3c)a+(2b+c)(b+3c)$

$$=2a\{3a+(2b+c)\}+(b+3c)\{3a+(2b+c)\}$$

$$=(3a+2b+c)(2a+b+3c).$$

उदाहरण 2. गुणनखंड निकालो : $x^2-3xy+2y^2-2yz-4z^2$.

स्पष्ट है कि यह एक x, y व z वाला समघातिक व्यंजक है।

यदि $x=0$ मान लें तो इनका बाक़ी अंश

$$=2y^2-2yz-4z^2=2(y^2-yz-2z^2)$$

$$=2(y+z)(y-2z) \;=(2y+2z)(y-2z). \quad \cdots \quad (1)$$

अब दिये हुए व्यंजक में $y=0$ मानने से इसका बाक़ी अंश

$$=x^2-4z^2=(-x+2z)(-x-2z). \quad \cdots \quad (2)$$

और दिये हुए व्यंजक में $z=0$ मानने पर इसका बाक़ी अंश

$$=x^2-3xy+2y^2=(-x+2y)(-x+y). \quad \cdots \quad (3)$$

अब (1), (2) व (3) द्वारा सूचित फलों से स्पष्ट है कि दिया हुआ व्यंजक

$$=(-x+2y+2z)(-x+y-2z)$$

$$=(x-2y-2z)(x-y+2z).$$

विकल्प रीति : दिये हुए व्यंजक को उसके किसी अक्षर, फर्ज़ करो x, के घातों के अवरोहक्रमानुसार पदों को लिखने पर,

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = x^2 - 3yx + (2y^2 - 2yz - 4z^2)$$
$$= x^2 - 3yx + 2(y+z)(y-2z).$$

अब x^2 का गुणक (अर्थात् 1) और विना x वाला पद (terms independent of x) [अर्थात् $2(y+z)(y-2z)$] के गुणनफल के इस प्रकार दो गुणनखंड निकालो जिनका बीजीय योगफल x के गुणक (अर्थात् $-3y$) के बराबर है। परीक्षा द्वारा देखा जाता है कि $-2(y+z)$ और $-(y-2z)$ ये गुणनखंड हैं।

$$\text{इसलिए दिया हुआ व्यंजक} = x^2 - 2(y+z)x - (y-2z)x + 2(y+z)(y-2z)$$
$$= x\{x - 2(y+z)\} - (y-2z)\{x - 2(y+z)\}$$
$$= (x - 2y - 2z)(x - y + 2z).$$

146. दो या दो से अधिक अक्षरवाले द्विघातीय (of the second degree) व्यंजकों का गुणनखंड निकालना :

उदाहरण 1. गुणनखंड निकालो : $6a^2 + 7ab + 2b^2 + 11a + 7b + 3.$

दिये हुए व्यंजक को उसके किसी अक्षर, मान लो a, के घातों के अवरोहक्रमानुसार सजाने पर

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = 6a^2 + (7b+11)a + (2b^2 + 7b + 3)$$
$$= 6a^2 + (7b+11)a + (2b+1)(b+3).$$

अब a^2 का गुणक (अर्थात् 6) और विना a वाला अंश [अर्थात् $(2b+1)(b+3)$] के गुणनफल के ऐसे दो गुणनखंड निकालो जिनका बीजीय योगफल a के गुणक अर्थात् $7b+11$ के बराबर है। स्पष्ट है कि ये दो गुणनखंड $2(2b+1)$ और $3(b+3)$ हैं।

$$\text{इसलिए यह दिया हुआ व्यंजक} = 6a^2 + 2(2b+1)a + 3(b+3)a + (2b+1)(b+3)$$
$$= 2a\{3a + (2b+1)\} + (b+3)\{3a + (2b+1)\}$$
$$= (3a + 2b + 1)(2a + b + 3).$$

147. उचित रूप से पदों का सजाना (arrangements of terms) और उनको सामूहिक रूप देकर (grouping) गुणनखंड निकालना :

कुछ ऐसे व्यंजक हैं जिनके पदों को विशेष रूप से सजाने पर उनके गुणनखंड स्पष्ट हो जाते हैं; परन्तु ऐसे भी व्यंजक हैं जिन पर यह बात लागू नहीं हो।

सकती। इसलिए इस नियम के भीतर ऐसी कोई विशेष रीति नहीं है जिसका प्रयोग हर हालत में हो सके। इसलिए विद्यार्थियों को कुछ विशेष और अलग अलग ढंग के उदाहरण बतलाये जायंगे जिनमें परस्पर कोई सम्बन्ध नहीं है ; उनके द्वारा इस विषय का खासा ज्ञान हो जायगा।

उदाहरण 1. गुणनखंड निकालो : $(3x^2-4b^2)a+(3a^2-4x^2)b$.

दिया हुआ व्यंजक $=3x^2a-4b^2a+3a^2b-4x^2b$

$=(3x^2a+3a^2b)-(4b^2a+4x^2b)$

[पहले व तीसरे दो पदों और दूसरे और चौथे दो पदों को एक साथ रखकर]

$=3a(x^2+ab)-4b(ab+x^2)$

$=(x^2+ab)(3a-4b)$.

उदाहरण 2. गुणनखंड निकालो : $x^4+x^2y^2-y^2z^2-z^4$.

[पहले व चौथे दो पदों और दूसरे व तीसरे दो पदों को एक साथ रखकर]

$=(x^4-z^4)+(x^2y^2-y^2z^2)$

$=(x^2+z^2)(x^2-z^2)+y^2(x^2-z^2)$

$=(x^2-z^2)\{(x^2+z^2)+y^2\}$

$=(x+z)(x-z)(x^2+y^2+z^2)$.

उदाहरण 3. गुणनखंड निकालो : $x^3+7x^2-21x-27$.

दिया हुआ व्यंजक $=(x^3-27)+(7x^2-21x)$

$=(x-3)(x^2+3x+9)+7x(x-3)$

$=(x-3)\{(x^2+3x+9)+7x\}$

$=(x-3)(x^2+10x+9)$

$=(x-3)(x+9)(x+1)$.

उदाहरण 4. गुणनखंड निकालो : $4a^2+12ab+9b^2-8a-12b$.

दिया हुआ व्यंजक $=(4a^2+12ab+9b^2)-(8a+12b)$

$=(2a+3b)^2-4(2a+3b)=(2a+3b)\{(2a+3b)-4\}$

$=(2a+3b)(2a+3b-4)$.

उदाहरण 5. गुणनखंड निकालो : $2a^2-2bc+6b^2+ac-7ab$.

इसमें पहला, तीसरा और पाँचवाँ पद a व b अक्षरों के दूसरे घात (degree)-वाला है। और दूसरा और चौथा पद उन्हीं अक्षरों के पहले घातवाला है।

B—18

पहले पदों को एक साथ (group) में और बादवाले पदों को अलग एक साथ लिखने पर दिया हुआ व्यंजक का रूप बन जाता है,

$$=(2a^2-7ab+6b^2)+c(a-2b)$$
$$=(a-2b)(2a-3b)+c(a-2b)$$
$$=(a-2b)\{(2a-3b)+c\}$$
$$=(a-2b)(2a-3b+c).$$

उदाहरण 6. गुणनखंड निकालो : $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z.$

दिया हुआ व्यंजक $=(x^2-y^2-z^2+2yz)+(x+y-z)$

$$=\{x^2-(y-z)^2\}+(x+y-z)$$
$$=(x+y-z)(x-y+z)+(x+y-z)$$
$$=(x+y-z)\{(x-y+z)+1\}$$
$$=(x+y-z)(x-y+z+1).$$

उदाहरण 7. गुणनखंड निकालो :

$$a^2x^3+a^5-2abx^3+b^2x^3+a^3b^2-2a^4b.$$

इसमें पहले, तीसरे और चौथे पद में x^3 एक सार्व गुणनखंड (common factor) है ; और बाक़ी पदों में a^3 एक सार्व गुणनखंड है।

इसलिए पहले, तीसरे और चौथे पदों को एक साथ और बाक़ी पदों को अलग एक साथ रखने से, दिया हुआ व्यंजक $=(a^2x^3-2abx^3+b^2x^3)+(a^5+a^3b^2-2a^4b)$

$$=x^3(a^2-2ab+b^2)+a^3(a^2+b^2-2ab)$$
$$=(a^2-2ab+b^2)(x^3+a^3)$$
$$=(a-b)^2(x+a)(x^2-xa+a^2).$$

प्रश्नमाला 79

गुणनखंड निकालो :

1. $x^3+x^2+x+1.$
2. $x^3+x^2-x-1.$
3. $x^3-x^2-x+1.$
4. $bc(a^2+1)+a(b^2+c^2).$
5. $x^4-ab^3+xb^3-x^3a.$
6. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2).$
7. $x^2+xy-yz-z^2.$
8. $xb-ac-xc+ab.$
9. $(2x^2+3b^2)a-(2a^2+3x^2)b.$
10. $a(a+c)-b(b+c).$
11. $4a^2+8ac-12bc-9b^2.$
12. $a^2x^2+acxz-b^2y^2-bcyz.$

13. $x^4-y^3z+y^2x^2-y^2z^2$.
14. $16x^2-15ab+12bx-25a^2$.
15. $a^2(a+2b)+b^2(2a+b)$.
16. $m^3-2m^2n+2mn^2-n^3$.
17. $a^4+2a^3b-2ab^3-b^4$.
18. $x^3(x-2y)+y^3(2x-y)$.
19. $a^3+5a^2+10a+8$.
20. $x^3-17x^2+85x-125$.
21. $8a^3+18a^2b-27ab^2-27b^3$.
22. $x^2-2xy+y^2-x+y$.
23. $4a^2-4ab+b^2-6a+3b$.
24. $x^4-2ax^3+2a^2x^2-2a^3x+a^4$.
25. $a^4-3a^3b+4a^2b^2-6ab^3+4b^4$.
26. $a^2+3ab+2b^2+ac+2bc$.
27. $x^2-4xy+3y^2+xz-3yz$.
28. $m^2+2pm-5mn-4pn+6n^2$.
29. $a^2-10ab-15bc+21b^2+5ac$.
30. $2x^2+4a(4b-3a)+x(4b+5a)$.
31. $a^2-3a(2b-1)+4b(2b-3)$.
32. $3x(x+2)-2y(4x-1)-3y^2$.
33. $a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c$.
34. $x^2-4y^2-9z^2+12yz+4x-8y+12z$.
35. $9x^2-4z^2-24xy+16y^2+20y-15x+10z$.
36. $2a^2x^4-5a^4x^2+3a^6-2b^2x^4+5a^2b^2x^2-3a^4b^2$.
37. $2x^3+(2a-3b)x^2-(2b+3ab)x+3b^2$.
38. $(a^2+b^2)x^2-a^2b(2a+b)+a(2bx^2-a^3)$.
39. $2a^4-5a^3+6a^2-5a+2$.
40. $a^5-4a^4-13a^3+13a^2+4a-1$.
41. $2x^2+6xy+4y^2+5xz+6yz+2z^2$.
42. $2x^2+xy-3y^2-xz-4yz-z^2$.
43. $a^8-5a^6-12a^4-5a^2+1$.
44. $4x^2-4xy-3y^2+12yz-9z^2$.
45. $x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$.
46. $x^3+7x^2+14x+8$.

148. विविध उदाहरण :

उदाहरण 1. $a^3+7ab^2=22b^3$ के गुणनखंड निकालो।

दिये हुए व्यंजक के पदों का नीचे दिये हुए दो प्रकारों में से किसी एक की भाँति दो समूह बनाने से देखा जाता है कि प्रत्येक समूह $a-2b$ द्वारा विभाज्य है।

(i) $(a^3-8b^3)+7b^2(a-2b)$; (ii) $a(a^2-4b^2)+11b^2(a-2b)$.

पहले ढंग से सजाकर

$$\begin{aligned}a^3+7ab^2-22b^3&=(a^3-8b^3)+7b^2(a-2b)\\&=(a-2b)\{(a^2+2ab+4b^2)+7b^2\}\\&=(a-2b)(a^2+2ab+11b^2)\end{aligned}$$

उदाहरण 2. गुणनखंड निकालो : $x^2+2(a^2+b^2)+3ax-b(3x+5a)$.

x के घातों को अवरोहक्रम से सजाकर होता है

$$=x^2+3(a-b)x+(2a^2-5ab+2b^2)$$
$$=x^2+3(a-b)x+(2a-b)(a-2b)$$
$$=x^2+\{(2a-b)+(a-2b)\}x+(2a-b)(a-2b)$$
$$=x\{x+(2a-b)\}+(a-2b)\{x+(2a-b)\}$$
$$=\{x+(2a-b)\}\{x+(a-2b)\}$$
$$=(x+2a-b)(x+a-2b).$$

उदाहरण 3. गुणनखंड निकालो : $x^2-6xy+8y^2-z^2+2yz$.

दिया हुआ व्यंजक $=(x^2-6xy+9y^2)-(y^2+z^2-2yz)$

$$=(x-3y)^2-(y-z)^2$$
$$=\{(x-3y)+(y-z)\}\{(x-3y)-(y-z)\}$$
$$=(x-2y-z)(x-4y+z).$$

उदाहरण 4. गुणनखंड निकालो : $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$.

दिया हुआ व्यंजक $=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+4abxy$

$$=(a^2x^2+b^2y^2+2abxy)-(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)$$
$$=(ax+by)^2-(ay-bx)^2$$
$$=\{(ax+by)+(ay-bx)\}\{(ax+by)-(ay-bx)\}$$
$$=\{(a-b)x+(a+b)y\}\{(a+b)x-(a-b)y\}.$$

उदाहरण 5. गुणनखंड निकालो : $x^4+6x^3+4x^2-15x+6$.

दिया हुआ व्यंजक $=(x^4+6x^3+9x^2)-(5x^2+15x)+6$

$$=(x^2+3x)^2-5(x^2+3x)+6$$
$$=\{(x^2+3x)-2\}\{(x^2+3x)-3\}$$
$$=(x^2+3x-2)(x^2+3x-3).$$

उदाहरण 6. गुणनखंड निकालो : $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.

दिया हुआ व्यंजक $=(x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2+(2x^3y+2xy^3)$

$$=(x^2+y^2)^2+(xy)^2+2(xy)(x^2+y^2)$$
$$=\{(x^2+y^2)+xy\}^2=(x^2+xy+y^2)^2.$$

उदाहरण 7. गुणनखंड निकालो : $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$.

अब $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}$

$$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8).$$

और x^2+2x के लिए 'z' रखने पर दिया हुआ व्यंजक

$$=(z-3)(z-8)+4$$
$$=z^2-11z+28=(z-4)(z-7)$$
$$=(x^2+2x-4)(x^2+2x-7).$$

टीका। इस बात पर विशेष ध्यान देना चाहिए कि उपर दिखलाये हुए द्विपद-व्यंजकों (binomial) को गुणा करते समय $x+3$ को $x-1$ के साथ और $x+4$ को $x-2$ के साथ गुणा किया गया है।

उदाहरण 8. यदि $x+y=a$ व $xy=b^2$ हो, तो

(i) x^4+y^4 व (ii) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ का मूल्य a व b द्वारा प्रकट करो।

(i) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2x^2y^2$,

$$=(a^2-2b^2)^2-2b^4=a^4-4a^2b^2+2b^4.$$

(ii) $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$$=(x-y)(x^2-y^2)$$
$$=(x-y)^2(x+y)$$
$$=\{(x+y)^2-4xy\}(x+y)$$
$$=(a^2-4b^2)a.$$

उदाहरण 9. $x^4-x^3+x^2+2$ का मूल्य निकालो, यदि $x^2+2=2x$ हो।

$$x^4-x^3+x^2+2=(x^4+x^3+x^2)-2(x^3-1)$$
$$=x^2(x^2+x+1)-2(x-1)(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)\{x^2-2(x-1)\}$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-2x+2).$$

इसलिए मूल्य $=(x^2+x+1)\times 0=0.$

उदाहरण 10. $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ का मूल्य निकालो, यदि $a+b=c$ हो।

दिया हुआ व्यंजक $=-(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)$

$=-(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b+c-a)$ [नियम 142]

$\therefore$ $=0$, कारण $a+b=c$.

प्रश्नमाला : 80

गुणनखंड निकालो :

1. $x^3+8x^2+19x+12$.
2. $x^3+9x^2+26x+24$.
3. $x^3-6x^2+11x-6$.
4. $x^3+5x^2-2x-24$.
5. x^3-4x^2+x+2.
6. x^3+5x^2-2x-6.
7. $x^3-6x^2+13x-10$.
8. $x^4-3x^3-9x^2+12x+20$.
9. $x^4-3x^3-x^2+13x-10$.
10. $x^4-5x^3+x^2+13x+6$.
11. $x^4+5x^3-8x^2-30x+36$.
12. $x^4-7x^3+9x^2+26x-56$.
13. $x^3-7x^2+13x-15$.
14. $x^3-5x+12$.
15. x^3-6x^2+32.
16. $2x^3-3x^2-4$.
17. $x^3-9xy^2-10y^3$.
18. $a^3+4a^2b-9b^3$.
19. $5a^3-3a^2b-28b^3$.
20. $8x^3+4x-3$.
21. $2x^3+5x^2-4x-3$.
22. x^3-3x-2.
23. $2a^3-a^2b-b^3$.
24. $3x^3+8x^2-8x-3$.
25. $x^3-6xy^2+9y^3$.
26. $x^2+bx-(a^2-3ab+2b^2)$.
27. $x^4+4abx^2y^2-(a^2-b^2)^2y^4$.
28. $a^4+2(x^2+y^2)a^2b^2+(x^2-y^2)^2b^4$.
29. $a^2+(x+y)a-2x^2+5xy-2y^2$.
30. $x(x+a)-2a^2+3b(a+x)+2b^2$.
31. $x^2+4xy+3y^2+2yz-z^2$.
32. $4a^2-4ab-3b^2+12bc-9c^2$.
33. $x^4+6x^3+8x^2+6x-9$.
34. $a^4-4a^3b-5a^2b^2+6ab^3-b^4$.
35. $4x^4-20x^3+24x^2+6x-9$.
36. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$.
37. $a^4-9a^2+30a-25$.
38. $a^2-2abx-(ac-b^2)x^2+bcx^3$.
39. $x^4y^4+x^2y^2-z^2+2xyz+1$.
40. $x^2(y^2-z^2)+4xyz-y^2+z^2$.
41. $(a^2-b^2)(x^2+y^2)+2(a^2+b^2)xy$.
42. $x^4-4x^3-x^2+10x+4$.
43. $a^4-6a^3+15a^2-18a+5$.
44. $4x^4+12x^3-5x^2-21x+12$.
45. $x^4-5x^3y+6x^2y^2-5xy^3+y^4$.
46. $x^4-5x^3+14x^2-20x+16$.
47. $a^4-7a^3b+14a^2b^2-14ab^3+4b^4$.
48. $x^4+4x^3-11x^2+20x+25$.
49. $a^4+4a^3b-10a^2b+4ab^3+b^4$.

50. $x^4+8x^3+24x^2+32x-20$.

51. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$.

52. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-360$.

53. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$.

54. $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+3xyz$ का मान निकालो, यदि $x=a(b-c)$, $y=b(c-a)$, $z=c(a-b)$ हो।

55. $(y-z)(y^2-z^2)-x\{(y-z)^2+x(y+z)\}+x^3$ का मान निकालो, यदि $x=a^2-b^2$, $y=b^2-c^2$, $z=a^2-c^2$ हो।

56. $x^2-2(y-2)x-3y^2+20y-32$ का मान निकालो, यदि $x+y=4$ हो।

57. $x^2-y^2+4x+14y-45$ का मान निकालो, यदि $x+y=25$ व $x-y=6$ हो।

58. $8xy(x^2+y^2)$ का मान निकालो, यदि $x+y=\sqrt{3}$ व $x-y=\sqrt{2}$ हो।

II. तादात्म्य (Identities)

149. यहां पहले बतलाये हुए सूत्र और नियमों की सहायता से तेरहवें अध्याय में दिये हुए तादात्म्य की अपेक्षा कुछ और कठिन लेकिन बहुत ज़रूरी तादात्म्यों पर विचार किया जायगा।

तादात्म्यों को सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित साधारण नियम सदा याद रखने चाहिए :

(i) किसी तादात्म्य का जो पक्ष याने तरफ अधिक कठिन हो उसको सरल करके दूसरे पक्ष के समान बना लो।

(ii) किसी तादात्म्य में, यदि दोनों पक्ष कठिन हों तो उन दोनों का सरल रूप बनाकर सिद्ध करो कि वे आपस में बराबर हैं।

(iii) किसी किसी हालत में तादात्म्य के किसी पद का पक्ष बदलकर या दोनों पक्षों में कुछ जोड़कर तादात्म्य सिद्ध किये जा सकते हैं।

(iv) कभी कभी तादात्म्य में दिये हुए कुछ पदों के बदले कोई एक अक्षर रख करके तादात्म्य की बराबरी बहुत आसानी से दिखलाई जा सकती है।

निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा हल करने की रीति मालूम होगी :

उदाहरण 1. सिद्ध करो : $(x-a)(x-b)(a-b)+(x-b)(x-c)(b-c)$
$+(x-c)(x-a)(c-a)=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

फ़र्ज़ करो कि $p=x-a$, $q=x-b$ व $r=x-c$ हैं।

तो $q-p=a-b$, $r-q=b-c$, $p-r=c-a$.

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=pq(q-p)+qr(r-q)+rp(p-r)$

$$=-(q-p)(r-q)(p-r)$$

$$=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

[$q-p$, $r-q$, $p-r$ के मूल्य बिठाने पर]

उदाहरण 2. सिद्ध करो :

$$(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)$$
$$+(x+y)^2(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

फ़र्ज़ करो कि $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ हैं।

तो $b+c=2x+y+z$, $c+a=x+2y+z$, $a+b=x+y+2z$.

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$$=(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो : $x^3+6(y+z)x^2+12(y+z)^2x+8(y+z)^3$
$=4(3x+2y+6z)y^2+(x+6y+2z)(x+2z)^2$. [मद्रास, 1881.]

बायाँ पक्ष $=x^3+3x^2.\{2(y+z)\}+3.x.\{2(y+z)\}^2+\{2(y+z)\}^3$

$$=[x+2(y+z)]^3=(x+2y+2z)^3=\{2y+(x+2z)\}^3$$
$$=(2y)^3+3(2y)^2(x+2z)+3(2y)(x+2z)^2+(x+2z)^3$$
$$=8y^3+12y^2(x+2z)+6y(x+2z)^2+(x+2z)^3$$
$$=4y^2\{2y+3(x+2z)\}+\{6y+(x+2z)\}(x+2z)^2$$
$$=4(3x+2y+6z)y^2+(x+6y+2z)(x+2z)^2.$$

उदाहरण 4. सिद्ध करो : $x^3+y^3+z^3+24xyz$

$$=(x+y+z)^3-3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}.$$

पक्ष याने तरफ बदलकर मालूम होता है कि इसे निम्नलिखित तादात्म्य के रूप में प्रकट किया जा सकता है।

$$3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}+24xyz$$
$$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

अगर पिछला तादात्म्य सिद्ध किया जा सके तो तरफ बदलने से पहला तादात्म्य निकाला जा सकता है।

अब $3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}+24xyz$

$$=3\{x(y^2-2yz+z^2)+y(z^2-2zx+x^2)+z(x^2-2xy+y^2)\}+24xyz$$

$$=3\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)-2xyz-2yzx-2zxy+8xyz\}$$

$$=3\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz\}$$

$$=3(y+z)(z+x)(x+y)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\ ;$$

∴ तरफ बदलने पर $x^3+y^3+z^3+24xyz$

$$=(x+y+z)^3-3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}.$$

उदाहरण 5. सिद्ध करो : $-x(b-c)(c-a)(a-b)$

$$=a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a-b)(x-a)(x-b).$$

दायीं ओर का पहला व्यंजक $=a(b-c)\{x^2-x(b+c)+bc\}$

$$=x^2a(b-c)-xa(b^2-c^2)+abc(b-c).$$

दायीं ओर का दूसरा व्यंजक $=b(c-a)\{x^2-x(c+a)+ca\}$

$$=x^2b(c-a)-xb(c^2-a^2)+abc(c-a).$$

दायीं ओर का तीसरा व्यंजक $=c(a-b)\{x^2-x(a+b)+ab\}$

$$=x^2c(a-b)-xc(a^2-b^2)+abc(a-b).$$

∴ दायीं तरफ (स्तम्भों के पदों को जोड़ने पर)

$$=x^2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}-x\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$$

$$=x^2.0-x\{(b-c)(c-a)(a-b)\}+abc.0,$$

[सूत्र XXII, XIV व XXIII, नियम 133]

$$=-x(b-c)(c-a)(a-b).$$

उदाहरण 6. सिद्ध करो :

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-(x+yz)(y+zx)(z+xy)=(1+xyz)(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)$$

बायाँ पक्ष

$$=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-\frac{(xyz+x^2)}{x}.\frac{(xyz+y^2)}{y}.\frac{(xyz+z^2)}{z}$$

$$=\{1-(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-x^2y^2z^2\}-\frac{1}{xyz}\{(xyz)+(xyz)^2(x^2+y^2+z^2)+(xyz)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+x^2y^2z^2\}$$

$$=(1-x^2-y^2-z^2)+(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-x^2y^2z^2-x^2y^2z^2$$
$$-xyz(x^2+y^2+z^2)-(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-xyz$$
$$=(1-x^2-y^2-z^2)-xyz-xyz(x^2+y^2+z^2)-2x^2y^2z^2$$
$$=1-x^2-y^2-z^2-2xyz+xyz-xyz(x^2+y^2+z^2)-2x^2y^2z^2$$
$$=(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)+xyz(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)$$
$$=(1+xyz)(1-x^2-y^2-z^2-2xyz).$$

150. शर्तवाले या सापेक्ष तादात्म्य (Conditional identities) : अब कुछ शर्तवाले ज़रूरी तादात्म्यों को सिद्ध करके उनके द्वारा अन्य तादात्म्यों की सचाई स्थापित की जायगी।

151. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

(1) $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$.

अब $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab,$

$$\therefore\quad 0^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab).$$

$\therefore$ तरफ बदलने पर $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$.

(2) $a^3+b^3+c^3=3abc$.

अब $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=0\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0.$$

$\therefore$ तरफ बदलने पर $a^3+b^3+c^3=3abc$. [नियम 99 का उदाहरण 10 देखो]

(3) $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$.

अब $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$

$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc\times 0$$
$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.$$

ऊपर दिखलाये हुए (1) से $bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

$$\therefore\quad (bc+ca+ab)^2=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

इसलिए $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$.

(4) $a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

अब $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
$$=0\times(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \quad \text{[नियम 142]}$$
$$=0.$$

इसलिए तरफ़ बदल के

$$a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2. \quad \text{[(3) से]}$$

(5) $a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab)$
$$=\tfrac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3).$$

चूँकि $a+b+c=0$, इसलिए तरफ़ बदलने पर $a+b=-c$.

$$\therefore \quad (a+b)^5=(-c)^5\ ;$$

अथवा $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=-c^5$. [नियम 127]

इसलिए तरफ़ बदलने पर $a^5+b^5+c^5$

$$=-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4$$
$$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$$
$$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2) \quad \text{[गुणनखंड निकालकर]}$$
$$=-5ab(-c)\{(a+b)^2-ab\} \quad \text{[चूँकि } a+b=-c \text{]}$$
$$=5abc\{(a+b)(-c)-ab\}=5abc(-ac-bc-ab)$$
$$=-5abc(bc+ca+ab)=\frac{5abc}{2}(a^2+b^2+c^2) \quad \text{[(1) द्वारा]}$$
$$=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2).3abc$$
$$=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3). \quad \text{[चूँकि } a^3+b^3+c^3=3abc \text{]}$$

(6) $a^7+b^7+c^7=7abc(bc+ca+ab)^2$
$$=\tfrac{7}{12}(a^2+b^2+c^2)^2(a^3+b^3+c^3).$$

चूँकि $a+b+c=0$, इसलिए तरफ़ बदलने पर $a+b=-c$.

$$\therefore \quad (a+b)^7=(-c)^7,$$

अथवा $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$
$$=-c^7 \quad \text{[127 नियम]}$$

तरफ़ बदलने पर $a^7+b^7+c^7$

$$= -7a^6b-21a^5b^2-35a^4b^3-35a^3b^4-21a^2b^5-7ab^6$$
$$= -7ab(a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5)$$
$$= -7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)$$

[गुणनखंड निकालकर]

$$= -7ab(-c)(a^2+ab+b^2)^2 = 7abc(a^2+ab+b^2)^2$$
$$= 7abc(bc+ca+ab)^2 \qquad [(5) \text{ वें नियमानुसार }]$$
$$= \tfrac{7}{3}(bc+ca+ab)^2.3abc$$
$$= \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2\cdot(a^3+b^3+c^3) \qquad [(2) \text{ व } (3) \text{ से }]$$
$$= \tfrac{7}{12}(a^2+b^2+c^2)^2(a^3+b^3+c^3).$$

उदाहरण 1. सिद्ध करो : $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$
$$= 3(y-z)(z-x)(x-y).$$

$a=(y-z)$, $b=(z-x)$, $c=(x-y)$ हो,

तो $a+b+c=y-z+z-x+x-y=0.$

$$\therefore \quad a^3+b^3+c^3=3abc. \qquad [(3) \text{ से }]$$

इसलिए a, b, c के मूल्य रखने पर

$$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y).$$

उदाहरण 2. सिद्ध करो :

$$\frac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5} = \frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}\cdot\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}.$$

फ़र्ज़ करो कि $a=(y-z)$, $b=(z-x)$ व $c=(x-y)$,

तो $a+b+c=y-z+z-x+x-y=0.$

$$\therefore \quad a^5+b^5+c^5=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3),$$

अथवा
$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

$\therefore$ a, b, c के मूल्य रखने पर

$$\frac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5} = \frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2} \times \frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}$$

उदाहरण 3. सिद्ध करो : $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz$ यदि $x+y+z=0$.

फर्ज़ करो कि $a=y+z-x$, $b=z+x-y$ व $c=x+y-z$,

$a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z=0$.

इसलिए $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$\therefore$ a, b, c के मूल्य रखने पर $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

फिर चूँकि $a+b+c=0$, इसलिए तरफ बदलने पर

$$a=-(b+c)=-\{(z+x-y)+(x+y-z)\}=-2x,$$

$$b=-(c+a)=-\{(x+y-z)+(y+z-x)\}=-2y,$$

$$c=-(a+b)=-\{(y+z-x)+(z+x-y)\}=-2z.$$

$$\therefore \quad 3abc=3(-2x)(-2y)(-2z)=-24xy$$

इसलिए $3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz$.

और $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz$.

उदाहरण 4. यदि $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

अब $x+y+z=a^2-bc+b^2-ca+c^2-ab$
$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$;

$$\begin{aligned} y-z&=(b^2-ca)-(c^2-ab)\\ &=b^2-c^2+ab-ca\\ &=(b-c)(b+c)+a(b-c)\\ &=(b-c)\{(b+c)+a\}\\ &=(b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

इसी प्रकार $z-x=(c-a)(a+b+c)$, और $x-y=(a-b)(a+b+c)$.

अब $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$\begin{aligned} &=\tfrac{1}{2}(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}\\ &=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\{(b-c)^2(a+b+c)^2\\ &\qquad+(c-a)^2(a+b+c)^2+(a-b)^2(a+b+c)^2\} \end{aligned}$$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$\times \tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}(a+b+c)^2$$
$$=(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2$$
$$=\{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\}^2$$
$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

उदाहरण 5. यदि $s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$s(s-2b)(s-2c)+s(s-2c)(s-2a)+s(s-2a)(s-2b)$$
$$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.$$

बायीं तरफ़ के दो पदों का योगफल

$$=s(s-2c)\{(s-2b)+(s-2a)\}$$
$$=s(s-2c)\{2s-2(a+b)\}$$
$$=s(s-2c)\times 2c;$$

और तीसरा पद $=(\overline{s-2c}+2c)(s-2a)(s-2b)$

$$=(s-2c)(s-2a)(s-2b)+2c(s-2a)(s-2b).$$

इसलिए बायीं तरफ़

$$=s(s-2c)2c+\{(s-2c)(s-2a)(s-2b)+2c(s-2a)(s-2b)\}$$
$$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+2c\{s(s-2c)+(s-2a)(s-2b)\}.$$

किन्तु $s(s-2c)+(s-2a)(s-2b)=(s^2-2cs)+\{s^2-2s(a+b)+4ab\}$

$$=2s^2-2s(a+b+c)+4ab$$
$$=2s^2-2s.s+4ab$$
$$=4ab.$$

$\therefore$ बायीं तरफ़ $=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.$

उदाहरण 6. यदि $s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$(s-a)(s-b)(s-c)=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.$$

बायीं तरफ़ $=s^3-(a+b+c)s^2+(bc+ca+ab)s-abc$

$$=s^3-s.s^2+(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc$$
$$=(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc.$$

उदाहरण 7. यदि $a+b+c+d=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$(a+b)(a+c)(a+d)=(b+a)(b+d)(b+c)$$
$$=(c+d)(c+a)(c+b)$$
$$=(d+c)(d+b)(d+a).$$

चूँकि $a+b+c+d=0$,

इसलिए
$$\left.\begin{aligned} a+b&=-(c+d),\\ a+c&=-(b+d),\\ a+d&=-(b+c);\end{aligned}\right\}\quad [\text{ तरफ बदलने पर }]$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (a+b)(a+c)(a+d)&=(a+b)\{-(b+d)\}\{-(b+c)\}\\ &=(a+b)(b+d)(b+c)\\ &=(b+a)(b+d)(b+c).\end{aligned}$$

इसी प्रकार
$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(a+d)&=\{-(c+d)\}(a+c)\{-(b+c)\}\\ &=(c+d)(a+c)(b+c)\\ &=(c+d)(c+a)(c+b);\end{aligned}$$

और
$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(a+d)&=-(c+d)\{-(b+d)\}(a+d)\\ &=(c+d)(b+d)(a+d)\\ &=(d+c)(d+b)(d+a).\end{aligned}$$

उदाहरण 8. सिद्ध करो कि $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$+24xyz=(2x+y-z)^3+(y+z)^3-(x+y-z)^3-6x(x-2z)(x+y)$.

यदि $a=2x+y-z$, $b=y+z$ व $c=-(x+y-z)$ मानें, तो

$$\begin{aligned}a+b+c&=x+y+z,\\ b+c&=2z-x,\\ c+a&=x,\\ a+b&=2(x+y).\end{aligned}$$

$\therefore$ दायीं तरफ (right side)

$$\begin{aligned}&=(2x+y-z)^3+(y+z)^3+\{-(x+y-z)\}^3+3.x(2z-x).2(x+y)\\ &=a^3+b^3+c^3+3(c+a)(b+c)(a+b)\\ &=(a+b+c)^3\\ &=(x+y+z)^3 \qquad [\ a,\ b,\ c \text{ के मूल्य रखने पर }]\\ &=\{(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)\}^3\\ &\qquad [\text{ चूँकि } (y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z\ ]\\ &=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3\{(z+x-y)\\ &\quad+(x+y-z)\}\{(x+y-z)+(y+z-x)\}\{(y+z-x)+(z+x-y)\}\\ &\qquad [\text{ सूत्र XVII, नियम 133 }]\\ &=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z\\ &=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.\end{aligned}$$

प्रश्नमाला 81

सिद्ध करो :

1. $a^2x+b^2y+c^2z=(x+y+z)(a^2+b^2+c^2)$,
यदि $x^2-yz=a^2,\ y^2-zx=b^2,\ z^2-xy=c^2$ हो।

2. $ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$,
यदि $x=a^2-bc,\ y=b^2-ca,\ z=c^2-ab$ हो।

3. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

4. $27(a+b+c)^3-(a+2b)^3-(b+2c)^3-(c+2a)^3$
$=3(a+3b+2c)(b+3c+2a)(c+3a+2b).$

5. $2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)$
$+c(s-a)(s-b)=abc$, यदि $2s=a+b+c$ हो।

6. $s(s-a)(s-b)+s(s-a)(s-c)+s(s+a)(s-c)+c(s+a)(s+b)$
$=(s+a)(s+b)(s+c)$, यदि $s=a+b+c$ हो।

7. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$
$=\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc)$, यदि $2s=a+b+c$ हो।

8. $(3x+2y+5z)^3-(3x+2y-5z)^3-30z\{(3x+2y)^2-25z^2\}$
$=(20x-y+8z)^3+(y+2z-20x)^3+30z(20x-y+8z)(y+2z-20x).$

9. $(x+y+2z)(x+2y+z)(2x+y+z)-(y+z)(z+x)(x+y)$
$=2(x+y+z)^3+2xyz.$

10. $(a+b+c)(x+y+z)+(a+b-c)(x+y-z)+(b+c-a)(y+z-x)$
$+(c+a-b)(z+x-y)=4(ax+by+cz).$

11. $(y-z)(1+xy)(1+xz)+(z-x)(1+yz)(1+yx)$
$+(x-y)(1+zx)(1+yz)=(y-z)(z-x)(x-y).$

12. $(x-1)(x^2+x+4)(y-z)+(y-1)(y^2+y+4)(z-x)$
$+(z-1)(z^2+z+4)(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$

13. $x^3+y^3+z^3+w^3+3(y+z)(z+x)(x+y)=0;$
यदि $x+y+z+w=0$ हो।

14. $$\frac{(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5}{5}\cdot\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2}$$
$$=\frac{(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7}{7}.$$

15. $(x+y)(x+z)(x^2-yz)=(x+y+z)(x-z)(x^2+y^2)$,
यदि $x=a^3+a^2$, $y=a^2+a$ व $z=a+1$. [मद्रास, 1909.]

16. $(y+z-2x)(z+x-2y)+(z+x-2y)(x+y-2z)+(x+y-2z)$
$\times(y+z-2x)=3\{(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)\}$.

17. $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$.

18. $(b-c)(b+c-2a)^3+(c-a)(c+a-2b)^3+(a-b)(a+b-2c)^3=0$.

19. $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3=3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$.

20. $a^6(b^2-c^2)^3+b^6(c^2-a^2)^3+c^6(a^2-b^2)^3$
$=3a^2b^2c^2(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.

21. $(b+c)(b-c)^3+(c+a)(c-a)^3+(a+b)(a-b)^3$
$=2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

22. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3=(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

23. $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2=27a^2b^2(a+b)^2$.

24. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c)$,
यदि $2s=a+b+c$ हो।

25. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$, यदि $2s=a+b+c$ हो।

26. $$\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{3}\cdot\frac{(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7}{7}=\left\{\frac{(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5}{5}\right\}^2.$$

27. $(ax+by+cz)^2+(bx+cy+az)^2+(cx+ay+bz)^2-\{(bx+cy+az)$
$\times(cx+ay+bz)+(cx+ay+bz)(ax+by+cz)+(ax+by+cz)(bx+cy+az)\}$
$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

28. $(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$
$-3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$
$=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

29. $ca-b^2=ab-c^2=bc-a^2=bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

30. $b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2=-(bc+ca+ab)$.

31. $a(c+a)(a+b)=b(a+b)(b+c)=c(a+c)(b+c)=abc$.

32. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=3abc$.

33. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$.

34. सिद्ध करो कि $X^3+Y^3+Z^3=3XYZ$, यदि $X=ax+by+cz$,
$Y=bx+cy+az$ व $Z=cx+ay+bz$ हो।

35. $(2a+b+c)^3+(a+2b+c)^3+(a+b+2c)^3$
$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$.

36. सिद्ध करो कि $(3x+y+z)^3+(x+3y+z)^3+(x+y+3z)^3$
$-3(3x+y+z)(x+3y+z)(x+y+3z)=20(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

37. यदि $a+b+c=1$ हो, तो सिद्ध करो कि
$(a+bc)(b+c)=(b+ca)(c+a)=(c+ab)(a+b)=(1-a)(1-b)(1-c)$.

सिद्ध करो :

38. $(x+y)^2(y+z-x)(z+x-y)+(x-y)^2(x+y+z)(x+y-z)$
$=4xyz^2+(y^2-z^2)(y^4+y^2z^2+z^4)+(z^2-x^2)(z^4+z^2x^2+x^4)$
$+(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$.

39. $2x(y+z-x)+(z+x-y)(x+y-z)$
$=2y(z+x-y)+(x+y-z)(y+z-x)$
$=2z(x+y-z)+(y+z-x)(z+x-y)$
$=(y+z-x)(z+x-y)+(z+x-y)(x+y-z)$
$+(x+y-z)(y+z-x)$.

40. $x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c$,
यदि $x+y+z=a$, $yz+zx+xy=b$ व $xyz=c$ हो।

41. $yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)+3xyz=\frac{1}{2}(p^3-pq^2)$,
यदि $x+y+z=p$ व $x^2+y^2+z^2=q^2$ हो।

42. $x^7+y^7+z^7=7qr^2$,
यदि $x+y=-z$, $xyz=q$ व $yz+zx+xy=r$ हो।

43. $x^4+y^4+z^4=\frac{1}{2}q^4$,
यदि $x^2+y^2+z^2=q^2$, $x+y=13$ व $z=-13$ हो।

44. $(x+y+z)(yz+zx+xy)-(y+z)(z+x)(x+y)=120$,
यदि $yz=45$, $zx=64$ व $xy=5$ हो।

तेईसवाँ अध्याय

शेषफल नियम (Remainder Theorem) और विभाज्यता (Divisibility)

152. भाग सम्बन्धी आवश्यक नियम (Important Theorem in Division) :

नियम 1. px^2+qx+r को $x-a$ द्वारा भाग देने पर बिना x-वाला शेषफल (अर्थात् जिस शेषफल में x न हो) pa^2+qa+r होगा।

अब वास्तविक भाग देने पर प्राप्त होता है,

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-a & px^2+qx+r & px+(ap+q) \\
 & \underline{px^2-apx} & \\
 & (ap+q)x+r & \\
 & \underline{(ap+q)x-a(ap+q)} & \\
 & a(ap+q)+r &
\end{array}
$$

$\therefore$ बिना x-वाला शेषफल $=a(ap+q)+r=pa^2+qa+r.$

टीका। इस पर ध्यान देना चाहिए कि ऊपर दिया हुआ शेषफल और दिये हुए भाज्य दोनों एक ही रूप के हैं, और भाज्य में x के बदले a रखने पर शेषफल प्राप्त होता है।

नियम 2. px^3+qx^2+rx+s को $x-a$ द्वारा भाग देने पर बिना x-वाला शेषफल pa^3+qa^2+ra+s होगा।

अब वास्तविक भाग देने पर प्राप्त होता है,

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-a & px^3+qx^2+rx+s & px^2+(ap+q)x+(pa^2+qa+r) \\
 & \underline{px^3-apx^2} & \\
 & (ap+q)x^2+rx+s & \\
 & \underline{(ap+q)x^2-a(ap+q)x} & \\
 & (pa^2+qa+r)x+s & \\
 & \underline{(pa^2+qa+r)x-a(pa^2+qa+r)} & \\
 & a(pa^2+qa+r)+s &
\end{array}
$$

$\therefore$ बिना x-वाला शेषफल $=pa^3+qa^2+ra+s.$

टीका। इस प्रश्न में भी पाया जाता है कि यदि भाज्य में x के बदले a रखा जाय तो बिना x-वाला शेषफल प्राप्त होता है।

उदाहरण 1. $x^3 - 5x^2 + 6x + 9$ को $x - 2$ से भाग देने पर बिना x-वाला शेषफल निकालो।

नियम के अनुसार यह शेषफल $= x^3 - 5x^2 + 6x + 9$, जब कि $x = 2$.

$$= 2^3 - 5.2^2 + 6.2 + 9$$
$$= 8 - 20 + 12 + 9 = 9.$$

उदाहरण 2. $x^3 - 216$ को $x - 6$ से भाग देने से बिना x-वाला शेषफल क्या होगा ?

यह शेषफल $= x^3 - 216$ का मूल्य जब कि $x = 6$

$$= 6^3 - 216 = 216 - 216 = 0.$$

टीका। वास्तविक भाग द्वारा ऊपर के प्राप्त फल जांचे जा सकते हैं।

153. अकरणीगत (Rational) व पूर्ण व्यंजक (Integral Expressions) : यदि $p, q, r, \ldots\ldots l, m$ में से प्रत्येक अचल (constant) राशि हो और n एक घनात्मक पूर्णांक (positive integer) हो, तो $px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots\cdots + lx + m$ व्यंजक को x का अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक कहते हैं। जैसे, $x^2 - 3x + 13$, $x^3 + px + r + 1$ आदि, प्रत्येक ही x में अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक हैं।

अब ऊपर दिये हुए अकरणीगत व पूर्ण व्यंजकों की सहायता से शेषफल सम्बन्धी साधारण नियम सिद्ध किया जायगा।

154. शेषफल सम्बन्धी नियम (Remainder Theorem) : यदि x के किसी अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक को $x - a$ द्वारा भाग किया जाय तो दिये हुए व्यंजक में x के बदले a रखने पर x-रहित शेषफल (the remainder independent of x) प्राप्त होता है।

फ़र्ज़ करो कि $px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots\cdots + lx + m$ को $x - a$ द्वारा भाग देने पर भजनफल Q द्वारा, व x-रहित शेषफल R द्वारा सूचित किया जाता है, तो

चूँकि हर हालत में, भाज्य = (भाजक) × (भजनफल) + (शेषफल)

इसलिए $px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots\cdots + lx + m \equiv (x - a).Q + R$, यह एक तादात्म्य है।

अब चूँकि शेषफल R में x नहीं है, इसलिए x के बदले कोई भी मूल्य रखने पर R में कोई परिवर्तन न होगा। इसलिए ऊपर दिये हुए तादात्म्य में x के बदले a रखने पर

$$pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots\cdots + la + m = (a - a).Q' + R,$$

[जब $x = a$ है, तो Q का मूल्य Q' द्वारा सूचित किया गया है]

$$= 0 \times Q' + R$$
$$= 0 + R$$
$$= R.$$

$\therefore$ x-रहित शेषफल अर्थात् $R = pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots\cdots + la + m.$

इसलिए मालूम होता है कि दिये हुए व्यंजक में x के बदले a रखने पर x-रहित शेषफल प्राप्त होता है।

इसलिए यह नियम सिद्ध हो गया।

उपसिद्धान्त। किसी अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक में $x+a$ द्वारा भाग देने पर x-रहित शेषफल दिये हुए व्यंजक में x के बदले '$-a$' रखने पर निकलता है।

[चूँकि $x+a=x-(-a)$, इसलिए यह उपसिद्धान्त शेषफल नियम से आसानी से सिद्ध हो जाता है।]

उदाहरण 1. x^2-5x+9 को $x+2$ द्वारा भाग करके x-रहित शेषफल निकालो।

ऊपर दिये हुए उपसिद्धान्त से यह शेषफल $=x^2-5x+9$ के मूल्य के जब x की जगह -2 रखा जाय।

$$=(-2)^2-5.(-2)+9=4+10+9=23.$$

उदाहरण 2. x^2+px+q को $x+a$ द्वारा भाग करके x-रहित शेषफल निकालो।

ऊपर दिये हुए उपसिद्धान्त से

यह शेषफल $=x^2+px+q$ के मूल्य के जब $x=-a$

$$=(-a)^2+p(-a)+q=a^2-pa+q.$$

टीका। वास्तविक भाग द्वारा इन फलों की जांच करनी चाहिए।

उदाहरण 3. यदि $x=15$ हो, तो x का बिना प्रयोग किये हुए, $x^6-19x^5+69x^4-151x^3+229x^2+166x+26$ का मूल्य निकालो।

शेषफल नियमानुसार यह मूल्य = दिये हुए व्यञ्जक को $x-15$ द्वारा भाग करने पर जो शेषफल प्राप्त होता है।

अब दिया हुआ व्यंजक

$$=x^6-15x^5-(4x^5-60x^4)+(9x^4-135x^3)-(16x^3-240x^2)$$
$$-(11x^2-165x)+(x-15)+41$$
$$=x^5(x-15)-4x^4(x-15)+9x^3(x-15)-16x^2(x-15)$$
$$-11x(x-15)+(x-15)+41.$$

दिये हुए व्यंजक को $x-15$ द्वारा भाग करने पर शेषफल 41 होगा।

$\therefore$ पूछा हुआ मूल्य $=41.$

155. विभाज्यता (Divisibility) व गुणनखंड सम्बन्धी नियम (Factor Theorem) : यदि x-वाले किसी अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक में x के बदले a रखने पर व्यंजक का मूल्य 0 हो तो वह व्यञ्जक $x-a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा, और $x-a$ उसका गुणनखंड होगा।

फ़र्ज़ करो कि $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ दिया हुआ व्यंजक है।

इसको $x-a$ द्वारा भाग करने पर

शेषफल = उस व्यंजक में x के बदले a रखने से भाज्य का जो मूल्य प्राप्त हो।

[शेषफल नियम से]

$$=pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots\cdots+la+m.$$

इसलिए यदि यह शेषफल शून्य हो अर्थात् $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots\cdots+la+m=0$ हो, तो दिया हुआ व्यञ्जक $x-a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

और चूँकि भाज्य = (भाजक) × (भजनफल) + (शेषफल)

इसलिए दिया हुआ व्यंजक

$$=(x-a)\times Q+(pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m) \quad [\, Q \equiv \text{भजनफल} \,]$$
$$=(x-a).Q, \text{ यदि } pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=0 \text{ हो।}$$

इसलिए यदि $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=0$ हो, तो दिये हुए व्यंजक अर्थात् $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ का एक गुणनखंड $x-a$ होगा।

उपसिद्धान्त। यदि $p(-a)^n+q(-a)^{n-1}+r(-a)^{n-2}+\cdots+l(-a)+m=0$ हो, तो $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ का एक गुणनखंड $x+a$ होगा।

[चूँकि $x+a=x-(-a)$, इसलिए असल नियम से उपसिद्धान्त आसानी से सिद्ध होता है।]

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि $3x^3-2x^2+x-18$ व्यंजक $x-2$ द्वारा विभाज्य है और $x-2$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड होगा।

$x=2$ बिठाने पर व्यंजक का मूल्य $=3.2^3-2.2^2+2-18=24-8+2-18=0$ इसलिए ऊपर दिये हुए नियमानुसार मालूम होता है कि $3x^3-2x^2+x-18$ व्यंजक $x-2$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है और $x-2$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड है।

उदाहरण 2. सिद्ध करो कि $3x^3-2x^2y-13xy^2+10y^3$ व्यंजक $x-2y$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

दिये हुए व्यंजक में x की जगह $2y$ बिठाने पर उसका मूल्य

$$=3.(2y)^3-2.(2y)^2.y-13.(2y).y^2+10y^3$$
$$=24y^3-8y^3-26y^3+10y^3=0.$$

इसलिए ऊपर दिये नियम से दिया हुआ व्यंजक $x-2y$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है और $x-2y$ उसका एक गुणनखंड है।

उदाहरण 3. कौन शर्त पूरी होने पर $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+lx+m$ व्यंजक $x-1$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा ?

दिये हुए व्यंजक में $x=1$ रखने पर उसका मूल्य

$$=a.1^n+b.1^{n-1}+c.1^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+l.1+m$$
$$=a+b+c+\cdots\cdots+l+m$$

[क्योंकि, $1^n=1\times1\times1\times\cdots\cdots\cdots n$ बार $=1$;

और इसी प्रकार $1^{n-1}=1^{n-2}=\cdots\cdots=1.$]

$\therefore$ यदि $a+b+c+\cdots+l+m=0$ हो,

अर्थात् यदि दिये हुए व्यंजक के गुणकों के बीजीय योगफल का मूल्य 0 हो, तो दिया हुआ व्यंजक $x-1$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा।

उदाहरण 4. सिद्ध करो कि x^3+4x^2+5x+6 का एक गुणनखंड $x+3$ होगा।

$$x+3=x-(-3).$$

यदि $x=-3$ हो, तो दिये हुए व्यंजक का मूल्य $=(-3)^3+4.(-3)^2+5.(-3)+6$

$$=-27+36-15+6=0.$$

इसलिए ऊपर दिये हुए गुणनखंड नियम के उपसिद्धान्त के अनुसार दिया हुआ व्यंजक $x+3$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है और $x+3$ उसका एक गुणनखंड होगा।

उदाहरण 5. p का मूल्य कितना होगा यदि x^3+3x^2+4x+p का एक गुणनखंड $x+6$ हो तो ?

$$x+6=x-(-6).$$

यदि $x=-6$ हो, तो दिये हुए व्यंजक का मूल्य $=(-6)^3+3.(-6)^2+4.(-6)+p$

$$=-216+108-24+p$$
$$=p-132.$$

इसलिए ऊपर दिये हुए नियम के अनुसार यदि $p-132=0$ हो, तो दिये हुए व्यञ्जक का एक गुणनखंड $x+6$ होगा,

$\therefore$ p का मूल्य $=132$.

उदाहरण 6. कौन शर्त पूरी होने पर x^2+3x+p और x^2+4x+q, इन दो व्यञ्जकों का एक गुणनखंड साधारण होगा ?

फ़र्ज़ करो कि दिये हुए दो व्यञ्जकों का एक सार्व गुणनखंड है और वह है $x-a$।

अब यदि $x=a$ हो, तो x^2+3x+p का मूल्य $=a^2+3a+p=0$; ... (1)

[क्योंकि, $x-a$ इस व्यंजक का एक गुणनखंड है]

और जब कि $x=a$ हो, तो x^2+4x+q का मूल्य $=a^2+4a+q=0$; ... (2)

[क्योंकि, $x-a$ इस व्यंजक का एक गुणनखंड है]

इसलिए (2) से (1) को घटाने पर

$$(a^2+4a+q)-(a^2+3a+p)=0;$$

अथवा $a+q-p=0$;

अथवा $a=p-q$. [तरफ बदल करके]

a का यह प्राप्त मूल्य (1) में रखने पर

$$(p-q)^2+3(p-q)+p=0;$$

अथवा $p^2-2pq+q^2+3p-3q+p=0$;

$\therefore$ यह शर्त है $p^2-2pq+q^2+4p-3q=0$.

156. विभाज्यता सम्बन्धी कुछ आवश्यक नियम (Some important Theorems on Divisibility) : दसवें अध्याय में a^n+b^n और a^n-b^n में विशेष हालतों में $a+b$ और $a-b$ का भाग जाने पर विचार किया गया है। अब इसको साधारण रूप से सिद्ध करना चाहते हैं।

नियम 1. यदि n कोई सम या विषम धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो a^n-b^n हर हालत में $a-b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा।

फ़र्ज़ करो कि a^n-b^n को $a-b$ द्वारा भाग करने पर भजनफल Q और a-रहित शेषफल R पाया गया।

तो चूँकि, भाज्य $=$ (भाजक) $\times$ (भजनफल) $+$ (शेषफल)

इसलिए $a^n-b^n\equiv Q\times(a-b)+R$, एक तादात्म्य है।

अब चूँकि R में a अक्षर वर्तमान नहीं है, इसलिए यदि a के लिए कोई भी मूल्य प्रयोग किया जाय तो R के मूल्य में कोई परिवर्तन न होगा।

फ़र्ज़ करो कि ऊपर दिये हुए तादात्म्य में $a=b$ है ; तो

$$b^n - b^n = Q' \times (b-b) + R,$$

[जब $a=b$ है, तो Q का मूल्य Q' द्वारा सूचित होता है]

अथवा $0 = Q' \times 0 + R = 0 + R$;

$\therefore \quad R = 0.$

इसलिए चूँकि शेषफल 0 है, $a^n - b^n$, $a-b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है। वास्तविक भाग द्वारा पाया जायगा कि

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

उदाहरण। a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4, a^5-b^5 आदि में से प्रत्येक व्यंजक $a-b$ द्वारा पूणरूप से विभाज्य है।

नियम 2. यदि n एक धनात्मक समराशि हो तो a^n-b^n व्यंजक $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा ; किन्तु यदि n विषम राशि हो तो ऐसा न होगा।

फ़र्ज़ करो कि $a^n - b^n$ को $a+b$ द्वारा भाग किया और भजनफल को Q द्वारा और a-रहित शेषफल को R द्वारा सूचित किया। तो

$$a^n - b^n \equiv Q \times (a+b) + R, \text{ एक तादात्म्य है।}$$

अब चूँकि R में a वर्तमान नहीं है, इसलिए a के लिए कोई भी मूल्य प्रयोग किया जाय, R के मूल्य में कोई परिवर्तन न होगा। मान लो कि इस तादात्म्य में a के बदले $-b$ प्रयोग किया गया, तो

$$(-b)^n - b^n = Q' \times (-b+b) + R,$$

[जब कि $a = -b$ हो तो Q का मूल्य Q' द्वारा सूचित होता है]

$$= Q' \times 0 + R = R \ ;$$

अब यदि n समराशि हो, तो $(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$;

और यदि n विषम राशि हो, तो $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$;

$\therefore \quad R = 0$ जब कि n समराशि है।

पर चूँकि n विषम राशि है तो R अर्थात् शेषफल $= -2b^n$; इसलिए शून्य नहीं है। इसलिए यदि n समराशि हो, तो $a^n - b^n$ व्यंजक $a+b$ द्वारा विभाज्य है, किन्तु n यदि विषम राशि हो, तो ऐसा न होगा।

यदि n समराशि हो, तो वास्तविक भाग द्वारा पाया जाता है कि

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots\cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

उदाहरण। a^2-b^2, a^4-b^4, a^6-b^6 आदि में से प्रत्येक व्यंजक $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है; किन्तु a^3-b^3, a^5-b^5, a^7-b^7 आदि में से कोई भी $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य नहीं है।

नियम 3. यदि n एक धनात्मक पूर्ण विषम राशि हो, तो a^n+b^n व्यंजक $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा; किन्तु यदि n समराशि हो, तो ऐसा न होगा।

फ़र्ज़ करो कि a^n+b^n को $a+b$ द्वारा भाग किया गया और भजनफल को Q द्वारा और a-रहित शेषफल को R द्वारा सूचित किया गया। तो

$$a^n+b^n=(a+b)\times Q+R, \text{ एक तादात्म्य है।}$$

अब चूँकि R में a वर्तमान नहीं है, इसलिए ऊपर दिये हुए तादात्म्य में a के लिए कोई भी मूल्य रखने पर R के मूल्य में कोई बदलाव न होगा। इसलिए a के लिए $-b$ रखने पर

$$(-b)^n+b^n=Q'\times(-b+b)+R=Q'\times 0+R=R.$$

[a के बदले $-b$ रखने पर Q का मान Q' द्वारा सूचित किया जाता है]

अब यदि n एक धनात्मक पूर्ण विषम संख्या हो, तो

$$(-b)^n+b^n=-b^n+b^n=0;$$

किन्तु यदि n समराशि हो, तो $(-b)^n+b^n=b^n+b^n=2b^n$ (शून्य नहीं है)

इसलिए यदि n विषम राशि हो, तो R का मूल्य शून्य होगा और यदि n समराशि हो, तो R का मूल्य शून्य न होगा।

इसलिए यदि n विषम राशि हो, तो a^n+b^n व्यंजक $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा; किन्तु n यदि समराशि हो, तो ऐसा न होगा।

यदि n विषम राशि हो, तो वास्तविक भाग द्वारा पाया जायगा कि

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

उदाहरण। a^3+b^3, a^5+b^5, a^7+b^7 आदि में से प्रत्येक व्यंजक $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य हैं; किन्तु a^2+b^2, a^4+b^4, a^6+b^6 आदि कोई भी $a+b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य नहीं है।

नियम 4. यदि n विषम अथवा समराशि हो, तो भी a^n+b^n किसी हालत में $a-b$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य न होगा।

a^n+b^n को $a-b$ द्वारा भाग करो जब तक कि शेषफल में a न रहे और भजनफल को Q द्वारा और a-रहित शेषफल को R द्वारा सूचित करो। तो $a^n+b^n=Q\times(a-b)+R$ एक तादात्म्य है।

चूँकि R में a वर्तमान नहीं है, इसलिए यदि a के लिए कोई भी मूल्य प्रयोग किया जाय, R के मूल्य में कोई बदलाव न होगा ; इसलिए यदि ऊपर दिये हुए तादात्म्य में $a=b$ समझ लो तो $b^n+b^n=Q'\times(b-b)+R=Q'\times0+R=R$ है ;

अथवा $R=2b^n$.

चूँकि n के किसी भी मूल्य के लिए R का मूल्य शून्य नहीं हो सकता, इसलिए a^n+b^n किसी हालत में $a-b$ द्वारा विभाज्य नहीं है।

उदाहरण । $a^2+b^2, a^3+b^3,\ a^4+b^4$ आदि कोई व्यंजक $a-b$ द्वारा विभाज्य नहीं है।

उदाहरण 1. यदि n एक धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो सिद्ध करो कि $3^{4n}-4^{3n}$ व्यंजक 17 द्वारा विभाज्य होगा।

अब $3^{4n}-4^{3n}=(3^4)^n-(4^3)^n=(81)^n-(64)^n$.

इसलिए नियम 1 के अनुसार दिया हुआ व्यंजक $81-64$ अर्थात् 17 द्वारा विभाज्य होगा।

उदाहरण 2. यदि n एक धनात्मक पूर्ण समराशि हो, तो $2^{6n}-6^{2n}$ व्यंजक के अन्त के दो अंक 0 होंगे।

दिया हुआ व्यंजक $=(2^6)^n-(6^2)^n=(64)^n-(36)^n$.

अब चूँकि n एक धनात्मक पूर्ण समराशि है इसलिए नियम 2 के अनुसार दिया हुआ व्यंजक $64+36$ अर्थात् 100 द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

चूँकि दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड 100 होगा इसलिए उसके अंत के दो अंक 0 होंगे।

उदाहरण 3. यदि m एक धनात्मक पूर्ण राशि हो ता, सिद्ध करो कि

$$(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)^{2m+1}+(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)^{2m+1}$$

का एक गुणनखंड $2x$ होगा।

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=\{(x+a)^3\}^{2m+1}+\{(x-a)^3\}^{2m+1}$$
$$=(x+a)^{3(2m+1)}+(x-a)^{3(2m+1)}.$$

चूँकि $3(2m+1)$ एक धनात्मक पूर्ण विषम राशि है इसलिए दिया हुआ व्यंजक $(x+a)+(x-a)$ अर्थात् $2x$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है। इसलिए $2x$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड है। [नियम 3]

उदाहरण 4. यदि n एक धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो सिद्ध करो कि $(b-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-b)^{2n+1}$ व्यंजक $(b-c)(c-a)(a-b)$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होगा।

दिया हुआ व्यंजक a, b, c अक्षरवाला एक अकरणीगत व पूर्ण व्यंजक है ; इसमें b के बदले c रखने पर व्यंजक का मूल्य

$$=(c-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-c)^{2n+1}$$
$$=(0)^{2n+1}\quad+(c-a)^{2n+1}+\{-(c-a)\}^{2n+1}.$$

अब $\{-(c-a)\}^{2n+1}=\{-1\times(c-a)\}^{2n+1}$

$=\{-1\times(c-a)\}\times\{-1\times(c-a)\}\times\cdots\cdots(2n+1)$ गुणनखंड तक

$=\{(-1)\times(-1)\times(-1)\times\cdots\cdots(2n+1)$ गुणनखंड तक $\}$

$\times\{(c-a)\times(c-a)\times(c-a)\times\cdots\cdots(2n+1)$ गुणनखंड तक $\}$

$=-1\times(c-a)^{2n+1}=-(c-a)^{2n+1}$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=0$.

इसलिए 155 नियम के अनुसार दिया हुआ व्यंजक $b-c$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है। इसी प्रकार c के बदले a रखने से मालूम होगा कि दिया हुआ व्यंजक $c-a$ द्वारा विभाज्य है ; और a के बदले b रखने से मालूम होगा कि दिया हुआ व्यंजक $a-b$ द्वारा विभाज्य है।

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $(b-c)(c-a)(a-b)$ इस गुणनफल द्वारा भी पूर्णरूप से विभाज्य है।

उदाहरण 5. यदि n एक धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो $(ab)^n-(bc)^n+(cd)^n-(da)^n$ व्यंजक $ab-bc+cd-da$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है। [मद्रास, 1873.]

स्पष्ट है कि $ab-bc+cd-da=b(a-c)+d(c-a)=(c-a)(d-b)$.

अब दिये हुए व्यंजक में c के बदले a रखने पर उसका मूल्य

$$=(ab)^n-(ba)^n+(ad)^n-(da)^n$$
$$=(ab)^n-(ab)^n+(ad)^n-(ad)^n=0.$$

इसलिए नियम 155 के अनुसार दिया हुआ व्यंजक $c-a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है। इसी प्रकार d के बदले b रखने पर मालूम होता है कि दिया हुआ व्यंजक $d-b$ द्वारा भी विभाज्य है। इसलिए दिया हुआ व्यंजक $c-a$ और $d-b$ के गुणनफल अर्थात् $(c-a)(d-b)$ अर्थात् $ab-bc+cd-da$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

उदाहरण 6. यदि n कोई धनात्मक पूर्ण राशि हो, तो $x^{n+1}-x^n-x+1$, $(x-1)^2$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

दिया हुआ व्यंजक $= x^{n+1}-x^n-x+1 = x^n(x-1)-(x-1)$

$= (x-1)(x^n-1)$; इसलिए $x-1$ दिये हुए व्यंजक का एक गुणनखंड है।

अब चूँकि 156 वें नियम के पहले सिद्धान्त के अनुसार x^n-1 व्यंजक भी $x-1$ द्वारा विभाज्य है ; इसलिए दिया हुआ व्यंजक $(x-1)\times(x-1)$ अर्थात् $(x-1)^2$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

उदाहरण 7. निम्नलिखित व्यंजकों का लगातार गुणनफल निकालो :

$$(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8) ;$$

फ़र्ज़ करो कि लगातार गुणनफल A द्वारा सूचित होता है,

$$\text{तो } A=(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8) ;$$

दोनों पक्षों को $x-a$ द्वारा गुणा करने पर

$$\begin{aligned}(x-a).A &= \{(x-a)(x+a)\}(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)\\ &= \{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\}(x^4+a^4)(x^8+a^8)\\ &= \{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\}(x^8+a^8)\\ &= (x^8-a^8)(x^8+a^8)=x^{16}-a^{16}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad A=\frac{x^{16}-a^{16}}{x-a}=x^{15}+x^{14}a+x^{13}a^2+x^{12}a^3+\cdots\cdots\cdots+xa^{14}+a^{15}.$$

उदाहरण 8. यदि $x+a$ व्यंजक x^2+px+q और $x^2+p'x+q'$ इन दो व्यंजकों का म० स० अ० हो, तो सिद्ध करो कि $a=\frac{q-q'}{p-p'}$.

चूँकि x^2+px+q और $x^2+p'x+q'$ का म० स० अ० $x+a$ है, इसलिए दोनों व्यंजक $x+a$ द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य होंगे।

इसलिए विभाज्यता नियम (Divisibility Theorem) के अनुसार

$(-a)^2+p(-a)+q=0$, अर्थात् $a^2-pa+q=0$;

और $(-a)^2+p'(-a)+q'=0$, अर्थात् $a^2-p'a+q'=0$;

इसलिए $(a^2-p'a+q')-(a^2-pa+q)=0$;

अथवा $a(p-p')+q'-q=0$;

तरफ बदलने पर $a(p-p')=q-q'$; $\therefore\ a=\frac{q-q'}{p-p'}$.

प्रश्नमाला 82

विना असल भाग देकर शेषफल निकालो जब कि :

1. $(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)\div(x-3)$.

2. $(3x^9+5x^7+11)\div(x+1)$. 3. $(3x^3+7x^2+11x+2)\div(3x-1)$.

4. $(4x^3+5x^2+9x+7)\div(2x+3)$.

5. $(ax^3+bx^2+cx+d)\div(ax+b)$.

निम्नलिखित उदाहरणों में दिखाओ कि पहला व्यंजक दूसरे व्यंजक द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है :

6. $6x^3+13x^2+17x+6$; $2x+1$.

7. $apx^3+(2p+aq)x^2+(2q+ar)x+2r$; $ax+2$.

8. $6x^4+13x^3y+18x^2y^2+23xy^3+10y^4$; $3x+2y$.

9. $a^{57}+b^{57}$; $a+b$. 10. $64x^6-729y^6$; $2x+3y$.

11. $x^{2n}-y^{2n}$; $x+y$ [जब कि n एक धनात्मक पूर्णांक है].

12. $x^{12}y^8-x^8y^{12}$; $x^2y^2(x-y)$.

13. $(3a+2b)^{2n+1}+b^{2n+1}$; $a+b$ [जब कि n एक धनात्मक पूर्णांक है].

14. $x^{2n+1}-ax^{2n}-xa^{2n}+a^{2n+1}$; $(x-a)^2$.

15. $64+32x+2x^5+x^6$; x^2+4x+4.

16. किस शर्त पर $x^7+9x^4-7x^3+11ax+5a^2$ का एक गुणनखंड $x+1$ होगा ?

17. a का मूल्य क्या होगा कि $3x^5+9x^4-7x^3-5x^2-4ax+3a^2$ का एक गुणनखंड $x-1$ हो ?

18. m का मूल्य क्या होगा कि a^n+x^n और a^n-x^n [जब कि n एक धनात्मक पूर्णांक है] दोनों a^m-x^m के गुणनखंड होंगे ? [मद्रास, 1875.]

19. यदि n एक धनात्मक पूर्णराशि हो, तो सिद्ध करो कि

$(x^2+7x+6)^n-(2+x)^{2n}$ व्यंजक $3x+2$ द्वारा विभाज्य है।

20. सिद्ध करो कि $3x^3+x^2-11x+7$ को $x-1$ द्वारा भाग करने पर प्राप्त भजनफल $x-1$ द्वारा पूर्ण विभाज्य है।

सिद्ध करो कि निम्नलिखित व्यंजक $(a-b)(b-c)(c-a)$ द्वारा पूर्ण विभाज्य हैं :

21. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$.

22. $a^3b^3(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)$.

23. $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$.

24. $(a-b)^9+(b-c)^9+(c-a)^9$.

25. $a^7b^7(a-b)^{69}+b^7c^7(b-c)^{69}+c^7a^7(c-a)^{69}$.

26. "विभाज्यता नियम" (Divisibility Theorem) की सहायता से सिद्ध करो कि $b+c$, $c+a$ और $a+b$ में से प्रत्येक $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ का एक गुणनखंड है।

27. सिद्ध करो कि $x-y$, $a-b$, $b-c$ और $c-a$ में से प्रत्येक $(ax+by) \times (bx+cy)(cx+ay)-(ay+bx)(by+cx)(cy+ax)$ का गुणनखंड है। [मद्रास, 1874.]

28. सिद्ध करो कि $a-b$, $b-c$ और $c-a$ में से प्रत्येक $a^n(b-c)+b^n(c-a) +c^n(a-b)$ का गुणनखंड है।

29. "विभाज्यता नियम" की सहायता से $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ का गुणनखंड निकालो।

30. सिद्ध करो कि $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ व्यंजक $(b+c) \times (c+a)(a+b)(a-b)(b-c)(c-a)$ द्वारा विभाज्य है।

31. यदि n एक धनात्मक पूर्णराशि हो, तो सिद्ध करो कि $(41)^n-1$ का सबसे दाहिनी ओर का अंक शून्य होगा।

32. यदि m एक धनात्मक पूर्णराशि हो, तो सिद्ध करो कि $7^{2m}-1$ राशि 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 और 48 में से प्रत्येक संख्या द्वारा विभाज्य है।

33. सिद्ध करो कि $17^8+13^7-5^8+2^7$ यह व्यंजक 3 द्वारा विभाज्य है।

34. सिद्ध करो कि x^2-x-6 और $x^3-11x+14$ दोनों व्यंजकों का $x-m$ रूपका एक साधारण गुणनखंड है।

35. यदि m एक धनात्मक पूर्णराशि हो, तो सिद्ध करो कि $(81)^m.(121)^m-1$ व्यंजक 100 द्वारा विभाज्य है।

36. लगातार गुणनफल निकालो: $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1^x+{}^{16})$.

37. यदि n एक धनात्मक पूर्णराशि हो, तो सिद्ध करो :

$$13^n = 12(13^{n-1} + 13^{n-2} + \cdots\cdots + 1) + 1.$$

38. लगातार गुणनफल निकालो : $11 \times 101 \times 10001$.

39. सिद्ध करो कि $x^n - nx + n - 1$ व्यंजक $(x-1)^2$ द्वारा पूर्ण विभाज्य है।

40. यदि m एक धनात्मक पूर्णराशि हो, तो सिद्ध करो कि $a^m(a-1) + b^m(b-1)$ व्यंजक $a+b$ द्वारा विभाज्य नहीं है।

निम्नलिखित भजनफल निकालो :

41. $(x^5 + y^5) \div (x+y)$.

42. $(x^6 - y^6) \div (x+y)$.

43. $(x^7 - y^7) \div (x-y)$.

44. $(x^{16} - y^{16}) \div (x^2 + y^2)$.

45. $(x^{16} - y^{16}) \div (x-y)$.

46. यदि $ax^3 + 5x + 2p$ और $ax^3 + 3x + p + 6$ व्यजकों का म० स० अ० $x+3$ हो, तो p और a का मूल्य निकालो।

47. यदि $bx^2 - px + 5$ और $bx^2 - 2x - 2p$ व्यंजकों का म०स० अ० $x-5$ हो, तो सिद्ध करो कि $p=5$ और $b=\frac{4}{5}$ होगा।

48. यदि $qx^2 + 2x + p$ और $qx^2 + x + r$ व्यंजकों का म० स० अ० $x-a$ हो, तो सिद्ध करो कि $a = r - p$ और $q(r-p)^2 + 2r - p = 0$.

49. यदि $x=3$ हो, तो $x^9 - 3x^8 + 5x^7 - 15x^6 + 13x^5 - 39x^4 + 7x^3 - 21x^2 + 17x - 51$ व्यंजक में x के बदले विना 3 रखे इसका मूल्य निकालो।

50. यदि $x = 1{\cdot}5$ हो, तो $32x^5 - 48x^4 + 40x^3 - 60x^2 + 26x - 38$ व्यंजक का मूल्य निकालो।

चौबीसवाँ अध्याय

(कठिन म० स० अ० और ल० स० अ०)

(Harder H. C. F. and L. C. M.)

157. जिन बहुपद व्यंजकों के गुणनखंड आसानी से निकाले जा सकते हैं उनके म० स० अ० और ल० स० अ० निकालने की रीति चौदहवें और पन्द्रहवें अध्यायों में बतलाई गई है। अब उनसे कठिन प्रश्नों पर विचार किया जायगा।

1. कठिन म० स० अ०

158. दो या दो से अधिक व्यन्जकों का म० स० अ० भी यदि एक बहुपद व्यंजक (compound expression) हो, तो म० स० अ० साधारण रूप से केवल ध्यानपूर्वक देखने से नहीं निकाला जा सकता। ऐसी हालत में निम्नलिखित रीति काम में लायी जाती है।

159. जिनमें एकपद (monomial) गुणनखंड न हो, ऐसे दो बहुपद व्यंजकों के म० स० अ० निकालने का साधारण नियम :

नियम : जिन व्यन्जकों का म० स० अ० निकालना हो उन्हें उनमें दिये हुए किसी साधारण अक्षर (common letter) के घातों के अवरोह क्रम से सजाकर उनमें से उस व्यंजक को जिसका घात अधिक है (expression of the higher degree) दूसरे व्यंजक द्वारा और यदि दोनों के घात (degree) बराबर हों, तो किसी एक व्यंजक को दूसरे व्यंजक द्वारा, भाग करो; यदि कोई शेषफल मिले तो शेषफल को नया भाजक और पूर्व भाजक को नया भाज्य मान कर फिर भाग करो; और जब तक पूर्णरूप से भाग न हो, इसी रीति से भाग करते जाओ। अन्त का भाजक दिये हुए दो व्यंजकों का म० स० अ० होगा। यदि प्रयोजन हो, तो इस क्रिया के किसी स्थान पर भाज्य व उसके भाजक में से किसी को किसी ऐसे व्यंजक द्वारा जो कि दूसरे का गुणनखंड नहीं है, गुणा अथवा भाग कर सकते हैं।

ऊपर दिया हुआ नियम निम्नलिखित ढंग से किया जा सकता है :

फ़र्ज़ करो कि A व B ऊपर दिये हुए रूप के दो व्यञ्जक हैं और A उनमें से अधिक घात का व्यंजक है।

A को नियम में बतलाई हुई रीति से B द्वारा भाग करो; और मान लो कि Q भजनफल व C शेषफल है। तो अवश्य

$$C = A - BQ \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

अथवा $$A = BQ + C \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) से मालूम होता है कि A व B का प्रत्येक सार्व गुणनखंड C का भी गुणनखंड होगा [क्योंकि, यदि $A = pa$ और $B = pb$ हो, तो $C = p(a - bQ)$ होगा], इसलिए यदि A व B का म० स० अ० H द्वारा सूचित हो तो H, C का भी गुणनखंड है; और इसलिए B व C का सार्व गुणनखंड होगा।

तो स्पष्ट विदित है कि B व C का म० स० अ० या तो H है, अथवा H से अधिक घात का कोई व्यञ्जक है ... ... (क)

अब (2) से जाना जाता है कि B व C का प्रत्येक सार्व गुणनखंड A का भी गुणनखंड है, और इसलिए वह B व A का सार्व गुणनखंड होगा। इसलिए B व C का म० स० अ० B व A का सार्व गुणनखंड होगा। इसलिए वह (अर्थात् वह म० स० अ०) H से अधिक घात का व्यञ्जक नहीं हो सकता।

(क) से विदित होता है कि B व C का म० स० अ० भी H होगा।

इसलिए B व C का म० स० अ० ही यह म० स० अ० है।

इसी प्रकार B को C द्वारा भाग करने पर, यदि D शेषफल हो तो सिद्ध किया जा सकता है कि C व D का म० स० अ० B व C के म० स० अ० के समान है और इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० होगा।

उपसिद्धान्त 1. चूँकि किसी भाज्य और उसके भाजक का म० स० अ० ही म० स० अ० है, इसलिए आसानी के लिए यदि प्रयोजन हो तो उनमें से किसी को, ऐसे एकपद व्यञ्जक द्वारा जो कि दूसरे का गुणनखंड न हो, गुणा या भाग कर सकते हैं।

उपसिद्धान्त 2. A को B द्वारा भाग करने के समय यदि भाग सम्पूर्ण होने के पूर्व ही भाग क्रिया बंद की जाय, और Q यदि आंशिक भजनफल (partial quotient) हो, और C' यदि उसके शेषफल को सूचित करता हो, तो B व C' का म० स० अ० भी B और C के म० स० अ० की भांति पूछा हुआ म० स० अ० होगा। इसलिए उपसिद्धान्त (1) से मालूम

होता है कि C' को B द्वारा (अथवा यदि C', B से कम घात का हो तो B को C' द्वारा) भाग करने के समय, यदि प्रयोजन हो, तो उनमें से किसी को एक ऐसे व्यंजक द्वारा गुणा या भाग कर सकते हैं, जो दूसरे का गुणनखंड न हो।

निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा रीति स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 1. $3x^3-7x^2-18x-8$ और $2x^3-3x^2-17x-12$ का म० स० अ० निकालो।

म० स० अ० अवश्य $3x^3-7x^2-18x-8$ और $3(2x^3-3x^2-17x-12)$ के म० स० अ० के समान है (उपसि० 1)। इसलिए दूसरे व्यंजक को 3 द्वारा गुणा करके उस गुणनफल में पहले व्यंजक से भाग देंगे।

$$\begin{array}{r|l|l} & 2x^3-\ \ 3x^2-17x-12 & \\ & 3 & \\ \hline 3x^3-7x^2-18x-8 & 6x^3-\ \ 9x^2-51x-36 & 2 \\ & 6x^3-14x^2-36x-16 & \\ \hline & \qquad 5x^2-15x-20 & \end{array}$$

इसलिए म० स० अ० अवश्य $3x^3-7x^2-18x-8$ और $5x^2-15x-20$ अर्थात् $5(x^2-3x-4)$ के म० स० अ० के समान है; इसलिए वह $3x^3-7x^2-18x-8$ और x^2-3x-4 के म० स० अ० के समान है [उपसि० 1]।

इसलिए निम्नलिखित रीति काम में लानी होगी :

$$\begin{array}{r|l|l} 5) & 5x^2-15x-20 & \\ \hline x^2-3x-4 & 3x^3-7x^2-18x-8 & 3x+2 \\ & 3x^3-9x^2-12x & \\ \hline & \qquad 2x^2-\ \ 6x-8 & \\ & \qquad 2x^2-\ \ 6x-8 & \\ \hline \end{array}$$

इसलिए म० स० अ० $=x^2-3x-4$.

उदाहरण 2. $22x^6-78x^5-16x^2$ और $2x^5-78x^2-44x$ का म० स० अ० निकालो।

पहला व्यंजक $=2x^2(11x^4-39x^3-8)$;

दूसरा व्यंजक $=2x(x^4-39x-22)$.

इसलिए नियम 100 की टीका 7 के अनुसार यह म० स० अ०

$=(2x^2$ और $2x$ का म० स० अ०$)\times(11x^4-39x^2-8$ और $x^4-39x-22$ का म० स० अ०)

$=2x\times X$, यदि X शेषोक्त व्यंजकों का म० स० अ० सूचित करता हो।

अब X को पूर्व नियम के अनुसार निकाला जायगा :

$$\begin{array}{l} x^4-39x-22)\ 11x^4-39x^3-8\ (11 \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 11x^4-429x-242 \\ \hline \qquad\qquad\qquad -3)-39x^3+429x+234 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 13)\ 13x^3-143x-78 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^3-11x-6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3-11x-6)\ x^4-39x-22\ (x \\ \qquad\qquad\quad\ \ x^4-11x^2-6x \\ \hline \qquad\qquad 11)\ 11x^2-33x-22 \\ \qquad\qquad\qquad\ \ x^2-3x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^2-3x-2)\ x^3-11x-6\ (x+3 \\ \qquad\qquad\quad\ x^3-3x^2-2x \\ \hline \qquad\qquad\qquad 3x^2-9x-6 \\ \qquad\qquad\qquad 3x^2-9x-6 \\ \hline \end{array}$$

इसलिए $X=x^2-3x-2$.

और पूछा हुआ म० स० अ० $=2x(x^2-3x-2)$.

उदाहरण 3. $12x^4a^3+54x^3a^3+6x^2a^4-72xa^5$ और $8x^6a+60x^5a^2+160x^4a^3+180x^3a^4+72x^2a^5$ का म० स० अ० निकालो।

पहला व्यंजक $=6xa^2(2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3)$;

दूसरा व्यंजक $=4x^2a(2x^4+15x^3a+40x^2a^2+45xa^3+18a^4)$.

इसलिए इन दो बहुपद गुणनखंडों का म० स० अ० X द्वारा सूचित हो, तो अवश्य दिये हुए व्यंजकों का म० स० अ० $=(6xa^2$ और $4x^2a$ का म० स० अ०$)\times X=2xa\times X$ होगा।

अब X निकाला जायगा :

$$\begin{array}{l} 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3)\ 2x^4+15x^3a+40x^2a^2+45xa^3+18a^4\ (x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 2x^4+9x^3a+x^2a^2-12xa^3 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3a)\ 6x^3a+39x^2a^2+57xa^3+18a^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3 \end{array}$$

इसलिए $2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3$ और $2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3$ का म० स० अ० X, होगा ; चूँकि ये दोनों बराबर घात (of the same degree) के व्यंजक हैं, इसलिए उनमें से किसी का दूसरे व्यंजक द्वारा भाग किया जा सकता है

$$\begin{array}{l} 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3)\ 2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3\ (1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2a)\ 4x^2a+18xa^2+18a^3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^2+9xa+9a^2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x^2+9xa+9a^2 & 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3 & x \\
 & 2x^3+9x^2a+9xa^2 & \\
\hline
 & -4a^2)\;-8xa^2-12a^3 & \\
 & \quad 2x+3a & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
2x+3a & 2x^2+9xa+9a^2 & x+3a \\
 & 2x^2+3xa & \\
\hline
 & \quad 6xa+9a^2 & \\
 & \quad 6xa+9a^2 & \\
\hline
\end{array}
$$

इसलिए $X=2x+3a.$

और पूछा हुआ म० स० अ० $=2xa(2x+3a).$

उदाहरण 4. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$ और $6x^4+14x^3+36x^2+14x+10$ का म० स० अ० निकालो।

दूसरा व्यंजक $=2(3x^4+7x^3+18x^2+7x+5).$

चूँकि 2 पहले व्यंजक का गुणनखंड नहीं है, इसलिए पहला व्यंजक और $3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$ का म० स० अ० ही यह म० स० अ० होगा।

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 4x^4+11x^3+27x^2+17x+5 & \\
 & 3 & \\
\hline
3x^4+7x^3+18x^2+7x+5 & 12x^4+33x^3+81x^2+51x+15 & 4 \\
 & 12x^4+28x^3+72x^2+28x+20 & \\
\hline
 & \quad 5x^3+9x^2+23x-5 & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 3x^4+7x^3+18x^2+7x+5 & \\
 & 5 & \\
\hline
5x^3+9x^2+23x-5 & 15x^4+35x^3+90x^2+35x+25 & 3x \\
 & 15x^4+27x^3+69x^2-15x & \\
\hline
 & \quad 8x^3+21x^2+50x+25 & \\
 & \quad 5 & \\
\hline
 & \quad 40x^3+105x^2+250x+125 & 8 \\
 & \quad 40x^3+72x^2+184x-40 & \\
\hline
 & \quad 33)\;33x^2+66x+165 & \\
 & \quad\quad x^2+2x+5 & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2+2x+5 & 5x^3+9x^2+23x-5 & 5x-1 \\
 & 5x^3+10x^2+25x & \\
\hline
 & \quad -x^2-2x-5 & \\
 & \quad -x^2-2x-5 & \\
\hline
\end{array}
$$

इसलिए म० स० अ० $=x^2+2x+5.$

उदाहरण 5. $4x^4 - 16x^3 + 108$ और $6x^5 - 14x^3 - 40x^2 + 36$ का म० स० अ० निकालो।

पहला व्यंजक $= 4(x^4 - 4x^3 + 27)$.

दूसरा व्यंजक $= 2(3x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 18)$.

इसलिए यदि दिये हुए व्यंजकों के दो बहुपद गुणनखंडों के म० स० अ० को X द्वारा सूचित किया जाय तो यह म० स० अ० $= 2X$.

अब X निकालना होगा :

$$x^4 - 4x^3 + 27 \,)\, 3x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 18 \,(\, 3x + 12$$
$$3x^5 - 12x^4 + 81x$$
$$12x^4 - 7x^3 - 20x^2 - 81x + 18$$
$$12x^4 - 48x^3 \qquad + 324$$
$$41x^3 - 20x^2 - 81x - 306$$

$$x^4 - 4x^3 + 27$$
$$41$$
$$41x^3 - 20x^2 - 81x - 306 \,)\, 41x^4 - 164x^3 + 1107 \,(\, x$$
$$41x^4 - 20x^3 - 81x^2 - 306x$$
$$-9 \,)\, -144x^3 + 81x^2 + 306x + 1107$$
$$16x^3 - 9x^2 - 34x - 123$$

$$16x^3 - 9x^2 - 34x - 123$$
$$41$$
$$656x^3 - 369x^2 - 1394x - 5043 \,(\, 16$$
$$656x^3 - 320x^2 - 1296x - 4896$$
$$-49 \,)\, -49x^2 - 98x - 147$$
$$x^2 + 2x + 3$$

$$x^2 + 2x + 3 \,)\, 41x^3 - 20x^2 - 81x - 306 \,(\, 41x - 102$$
$$41x^3 + 82x^2 + 123x$$
$$-102x^2 - 204x - 306$$
$$-102x^2 - 204x - 306$$

इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० $= 2(x^2 + 2x + 3$.

प्रश्नमाला 83

म० स० अ० निकालो :

1. $2x^2 + 5x - 3$ और $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$ का।
2. $3x^2 + 16x - 12$ और $3x^3 + 4x^2 - 28x + 16$ का।

3. $2x^2-3ax-20a^2$ और $2x^3+3ax^2-45a^2x-100a^3$ का।
4. $3x^4+7x^3-14x^2-24x$ और $6x^4-10x^3-24x^2$ का।
5. $6a^3-11a^2-3a+2$ और $3a^3+20a^2+23a-10$ का।
6. $6a^3-25a^2b+32ab^2-12b^3$ और $4a^3+12a^2b-7ab^2-30b^3$ का।
7. $3x^3+5x^2+5x+2$ और $2x^3+5x^2+5x+3$ का।
8. $4x^3-7x^2y+7xy^2-3y^3$ और $3x^3-7x^2y+7xy^2-4y^3$ का।
9. $6x^4+7x^3+5x^2+2x$ और $4x^5-18x^4-8x^3-10x^2$ का।
10. $3x^4+10x^3+7x^2+4x+1$ और $2x^3+3x^2-7x-3$ का।
11. $4x^3+13x^2-8x-3$ और $3x^4+13x^3+9x^2+9x+2$ का।
12. $12a^3+11a^2x+6ax^2+x^3$ और $21a^3+17a^2x+9ax^2+x^3$ का।
13. $35a^3+31a^2x+13ax^2+2x^3$ और $65a^3+54a^2x+22ax^2+3x^3$ का।
14. $70x^3-9ax^2+11a^2x+6a^3$ और $91x^3-25ax^2+20a^2x+4a^3$ का।
15. $75x^3-35x^2+24x+4$ और $85x^3-36x^2+25x+6$ का।
16. $35x^3-34x^2+3x+2$ और $49x^3-49x^2+5x+3$ का।
17. $4x^6+2ax^5+14a^2x^4+10a^3x^3+24a^4x^2$ और $6x^6+21ax^5+30a^2x^4+24a^3x^3$ का।
18. $4a^4+32a^3+72a^2+44a+8$ और $6a^4+54a^3+138a^2+78a+12$ का।
19. $2x^4-19x^2+21x-6$ और $6x^4+21x^3+3x-6$ का।
20. $12x^4-30x^2+126x+90$ और $15x^4-25x^3+145x-75$ का।
21. $18x^4+117x^3+162x^2+72x+9$ और $12x^4+68x^3+72x^2+108x+20$ का।
22. $x^5-5x^2+6x+12$ और $x^4-8x^3-24x-32$ का।
23. $x^4+5x^3+3x^2-14x-40$ और $x^5-4x^3+45x+75$ का।
24. $4x^5-8x^3a^2+28x^2a^3-24xa^4+24a^5$ और $6x^4+24x^3a-12x^2a^2-24xa^3+96a^4$ का।
25. $9x^4-18x^3y-13x^2y^2-38xy^3-12y^4$ और $6x^5+4x^4y+5x^3y^2+4x^2y^3+8y^5$ का।
26. $2x^5-11x^2-9$ और $4x^5+11x^4+81$ का।
27. $32a^4+104a^3-20a^2-122a+30$ और $60a^5+10a^4-45a^3+45a^2-50a$ का।
28. $x^5+2x^4-5x^2-7x+3$ और $3x^6-3x^4-18x^3+x^2+2x+3$ का।

160. कुछ हालतों में निम्नलिखित सिद्धान्तों को काम में लाने से बहुत आसानी से म० स० अ० निकाला जा सकता है।

सिद्धान्त। यदि A और B दो बिना एक पद गुणनखंडवाले व्यंजक हों और यदि m, n, p, q ऐसी चार अंक-संख्यायें हों कि $mq-np$ का मूल्य शून्य न हो तो A व B का म० स० अ० और $mA+nB$ और $pA+qB$ का म० स० अ० दोनों एक ही होंगे। (अंत में जो दोनों व्यंजक बतलाये गये हैं उनके साधारण अंक-गुणनखंडों को छोड़ देना होगा।) यह नीचे लिखे ढंग से सिद्ध किया जा सकता है।

मान लो कि A व B का म० स० अ० H द्वारा और (साधारण अंक-गुणनखंड छोड़कर) $mA+nB$ और $pA+qB$ का म० स० अ० H' द्वारा सूचित किया गया है।

अब चूँकि A व B का प्रत्येक सार्व गुणनखंड $mA+nB$ का गुणनखंड है और $pA+qB$ का भी गुणनखंड है, इसलिए H अवश्य $mA+nB$ व $pA+qB$ का सार्व गुणनखंड होगा।

इसलिए H' या तो H के बराबर है, नहीं तो H से अधिक घात का कोई व्यंजक होगा। ... ... (क)

अब, चूँकि $q(mA+nB)-n(pA+qB)=(mq-np)A,$

और $m(pA+qB)-p(mA+nB)=(mq-np)B,$

यह स्पष्ट है कि $mA+nB$ व $pA+qB$ का प्रत्येक सार्व गुणनखंड $(mq-np)A$ और $(mq-np)B$ का गुणनखंड होगा। अब चूँकि दी हुई शर्त के अनुसार $mq-np$ एक अंक-संख्या है इसलिए $mA+nB$ व $pA+qB$ के अंक-गुणनखंड छोड़कर और सब सार्व गुणनखंड A और B के गुणनखंड होंगे। इसलिए स्पष्ट है कि H', A व B का सार्व गुणनखंड होगा।

इसलिए H', H से अधिक घात का व्यंजक नहीं हो सकता।

इसलिए (क) से $H'=H$;

अर्थात् सिद्धान्त प्रमाणित हो गया।

उपसिद्धान्त 1. A व B का म० स० अ० और $A+B$ व $A-B$ का म० स० अ० दोनों एक हैं। [यहाँ पर $m=1$, $n=1$, $p=1$, और $q=-1$ समझना होगा।]

उपसिद्धान्त 2. A व B का म० स० अ० और $A \pm B$ व B का म० स० अ० दोनों एक हैं। [यहाँ पर $m=1$, $n=\pm 1$, $p=0$ और $q=1$ समझना होगा।]

इसी प्रकार A व B का म० स० अ० और $A \pm B$ और A का म० स० अ० भी एक है।

उदाहरण 1. $x^4+x^3-5x^2-3x+2$

और $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ का म० स० अ० निकालो।

फ़र्ज़ करो कि $A=x^4+x^3-5x^2-3x+2,$

और $B=x^4-3x^3+x^2+3x-2.$

तो $A+B=2x^4-2x^3-4x^2=2x^2(x^2-x-2),$

और $A-B=4x^3-6x^2-6x+4=2(2x^3-3x^2-3x+2).$

इसलिए उपसिद्धान्त 1 से मालूम होता है कि पूछा हुआ म० स० अ० $x^2(x^2-x-2)$ और $2x^3-3x^2-3x+2$ के म० स० अ० के बराबर है ; इसलिए वह x^2-x-2 और $2x^3-3x^2-3x+2$ के म० स० अ० के बराबर होगा।

फ़र्ज़ करो कि $A'=x^2-x-2,$

और $B'=2x^3-3x^2-3x+2.$

तो $A'+B'=2x^3-2x^2-4x=2x(x^2-x-2).$

इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० $=A'$ और $(A'+B')$ का म० स० अ० [उपसि० 2]

$$=x^2-x-2.$$

उदाहरण 2. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$ और

$3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$ का म० स० अ० निकालो।

फ़र्ज़ करो कि $A=4x^4+11x^3+27x^2+17x+5,$

और $B=3x^4+7x^3+18x^2+7x+5.$

तो $A-B=x^4+4x^3+9x^2+10x=x(x^3+4x^2+9x+10),$

और $3A-4B=5x^3+9x^2+23x-5.$

इसलिए $x^3+4x^2+9x+10$ और $5x^3+9x^2+23x-5$ का म० स० अ० पूछा हुआ म० स० अ० होगा।

फ़र्ज़ करो कि $A'=x^3+4x^2+9x+10,$

और $B'=5x^3+9x^2+23x-5.$

तो $A'+2B'=11x^3+22x^2+55x=11x(x^2+2x+5),$

और $5A'-B'=11x^2+22x+55=11(x^2+2x+5).$

इसलिए यह म० स० अ० $x(x^2+2x+5)$ और x^2+2x+5 के म० स० अ० के बराबर है ; इसलिए यह म० स० अ० $=x^2+2x+5.$

उदाहरण 3. $2x^5-11x^2-9$ और $4x^5+11x^4+81$ का म० स० अ० निकालो। [कल० एन्ट्रेंस, 1865.]

फ़र्ज़ करो कि $A=4x^5+11x^4+81$,

और $B=2x^5-11x^2-9$.

तो $A-2B=11x^4+22x^2+99=11(x^4+2x^2+9)$,

और $A+9B=22x^5+11x^4-99x^2=11x^2(2x^3+x^2-9)$.

इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० x^4+2x^2+9 और $x^2(2x^3+x^2-9)$ के म० स० अ० के बराबर है ; इसलिए वह x^4+2x^2+9 और $2x^3+x^2-9$ के म० स० अ० के बराबर है।

फ़र्ज़ करो कि $A'=x^4+2x^2+9$,

और $B'=2x^3+x^2-9$.

तो $A'+B'=x^4+2x^3+3x^2=x^2(x^2+2x+3)$.

इसलिए $2x^3+x^2-9(=B')$ और $x^2+2x+3(=C')$ समझो } का म० स० अ० ही यह म० स० अ० होगा।

अब चूँकि $B'+3C'=2x^3+4x^2+6x$
$=2x(x^2+2x+3)$;

इसलिए यह म० स० अ० C' और $B'+3C'$ के म० स० अ० के बराबर है।
$=x^2+2x+3$.

प्रश्नमाला 84

म० स० अ० निकालो :

1. $x^3-3x^2-4x+12$ और $x^3-7x^2+16x-12$ का।
2. $2x^3-17x+12$ और $4x^4-2x^3-34x^2+41x-12$ का।
3. $4x^3+13x^2+19x+4$ और $2x^3+5x^2+5x-4$ का।
4. $3x^3-5x^2+7$ और $6x^4-7x^3-5x^2+14x+7$ का।
5. $6x^4-11x^3+16x^2-22x+8$ और $6x^4-11x^3-8x^2+22x-8$ का।
6. $2x^4+19x^3+20x^2-31x+8$ और $2x^4+7x^3-64x^2+62x-16$ का।
7. $3x^4-7x^3-27x^2-6x+2$ और $3x^4-13x^3-40x^2-9x+3$ का।
8. $5x^4-18x^3-7x^2+12x+3$ और $5x^4-23x^3-9x^2+16x+4$ का।

9. $2x^4 - 5x^3 - 17x^2 - 2x + 2$ और $6x^5 + 23x^4 + 34x^3 + 21x^2 - 2x - 2$ का।

10. $6x^5 + 9x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 9x - 3$ और $9x^5 + 12x^4 - 18x^3 - 5x^2 + 12x - 4$ का।

11. $x^5 - x^3 + 8$ और $x^5 - x^2 + 4$ का।

12. $3x^5 + 139x^2 - 44$ और $39x^5 + 139x^4 - 16$ का।

161. ऐसे तीन या तीन से अधिक व्यंजकों का म० स० अ० निकालना जिनके गुणनखंड आसानी से नहीं निकाले जा सकते।

फर्ज़ करो कि A, B, C द्वारा सूचित व्यञ्जकों का म० स० अ० निकालना है।

फर्ज़ करो कि A व B का म० स० अ० G द्वारा और G व C का म० स० अ० H द्वारा सूचित किया गया है।

चूँकि G, A व B के सब अभाज्य साव गुणनखंडों का गुणनफल है, इसलिए G का प्रत्येक गुणणखंड ही A व B का सार्व गुणनखंड होगा। इसलिए G व C के सब सार्व गुणनखंड ही A, B व C के सार्व गुणनखंड होंगे।

इसलिए A, B व C का सार्व गुणनखंड H होगा। इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० या तो H है या H से अधिक घात का कोई अन्य व्यंजक होगा। ... ... (क)

चूँकि A व B का प्रत्येक साव गुणनखंड G का गुणनखंड है, इसलिए A, B व C का प्रत्येक सार्व गुणनखंड ही G व C का सार्व गुणनखंड होगा।

इसलिए यह म० स० अ० अवश्य G व C का सार्व गुणनखंड होगा; इसलिए वह H से अधिक घात का कोई व्यंजक नहीं हो सकता।

इसलिए (क) से यह म० स० अ० $= H$.

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि यदि D एक चौथा व्यञ्जक हो, तो H व D का म० स० अ० ही A, B, C, व D का म० स० अ० होगा।

इसलिए तीन या तीन से अधिक व्यञ्जकों का म० स० अ० निकालने का निम्नलिखित नियम पाया जाता है।

यदि A, B, C, D...आदि व्यञ्जकों का म० स० अ० निकालना हो तो पहले A व B का म० स० अ० निकालो, उसके बाद प्राप्त म० स० अ० व C का म० स० अ० निकालो; उसके बाद इस म० स० अ० व D का म० स० अ० निकालो; आदि। अंत का म० स० अ० ही पूछा हुआ म० स० अ० होगा।

उदाहरण। $2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - 24$, $3x^4 + 14x^3 - 11x^2 - 70x + 24$ और $5x^4 + 9x^3 - 47x^2 - 81x + 18$ का म० स० अ० निकालो।

पहले दो व्यंजकों का म० स० अ० निकाला जायगा।

फर्ज़ करो कि $A = 2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - 24$,

और $B = 3x^4 + 14x^3 - 11x^2 - 70x + 24$.

तो $A + B = 5x^4 + 7x^3 - 28x^2 - 12x = x(5x^3 + 7x^2 - 28x - 12)$,

और $-3A + 2B = 49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$.

इसलिए A और B का म० स० अ० $5x^3 + 7x^2 - 28x - 12$ और $49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$ के म० स० अ० के बराबर है।

अब समझ लो कि $A' = 5x^3 + 7x^2 - 28x - 12$,

और $B' = 49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$.

तो $10A' + B' = 99x^3 + 99x^2 - 594x = 99x(x^2 + x - 6)$.

इसलिए A व B का म० स० अ०

$$\left.\begin{array}{l} 5x^3 + 7x^2 - 28x - 12 (= A') \\ \text{और } x^2 + x - 6\ (= C' \text{ समझो}) \end{array}\right\} \text{के म० स० अ० के बराबर हैं।}$$

अब $A' - 2C' = 5x^3 + 5x^2 - 30x = 5x(x^2 + x - 6)$;

इसलिए A और B का म० स० अ० $= C'$ और $A' - 2C'$ का म० स० अ०

$$= x^2 + x - 6.$$

इसलिए यह म० स० अ० $x^2 + x - 6$ और $5x^4 + 9x^3 - 47x^2 - 81x + 18$ के म० स० अ० के बराबर है, जो निम्नलिखित रूप से निकाला जा सकता है :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 6 & 5x^4 + 9x^3 - 47x^2 - 81x + 18\ (5x^2 + 4x \\ & \underline{5x^4 + 5x^3 - 30x^2} \\ & 4x^3 - 17x^2 - 81x + 18 \\ & \underline{4x^3 + 4x^2 - 24x} \\ -3) & -21x^2 - 57x + 18 \\ & 7x^2 + 19x - 6\ (7 \\ & \underline{7x^2 + 7x - 42} \\ 12) & 12x + 36 \\ & x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x + 3 & x^2 + x - 6\ (x - 2 \\ & \underline{x^2 + 3x} \\ & -2x - 6 \\ & \underline{-2x - 6} \end{array}$$

इसलिए यह म० स० अ० $= x + 3$.

प्रश्नमाला 85

स० स० अ० निकालो :

1. $2x^3+7x^2-5x-4$, $x^3+8x^2+11x-20$ और $2x^3+19x^2+49x+20$ का।
2. $2x^4+3x^3+8x^2+15x-10$, $2x^4-5x^3+12x^2-25x+10$ और $2x^4-5x^3+10x^2-20x+8$ का।
3. $2x^4+7x^3-19x^2-14x+30$, $2x^4+5x^3-16x^2-10x+24$ और $2x^4+5x^3-10x^2+5x-12$ का।
4. $2x^4-4x^3-69x^2-2x-35$, $2x^4-6x^3-55x^2-3x-28$ और $2x^4+18x^3+41x^2+9x+20$ का।
5. $3a^3+28a^2b+52ab^2-48b^3$, $3a^3+4a^2b-28ab^2+16b^3$ और $3a^3+10a^2b-44ab^2+24b^3$ का।
6. $6a^3+5a^2b-34ab^2+15b^3$, $6a^3-37a^2b+57ab^2-20b^3$ और $3a^3-8a^2b-31ab^2+60b^3$ का।
7. $3x^4+11x^3-32x^2-44x+80$, $3x^4-x^3-52x^2+124x-80$, $3x^4+2x^3-20x^2-8x+32$ और $3x^4+2x^3-83x^2-50x+200$ का।
8. $6x^5+14x^4-53x^3-37x^2+66x+24$, $6x^5-28x^4+17x^3+54x^2-39x-18$, $6x^5+8x^4-79x^3-36x^2+105x+36$ और $2x^5-2x^4-31x^3+51x^2+42x-72$ का।

II. कठिन ल० स० अ०

162. ऐसे दो व्यंजकों का ल० स० अ० निकालना जिनके गुणनखंड ध्यान से देखने से न निकल सकें :

समझ लो कि A व B ऊपर बतलाये हुए रूप के दो व्यंजक हैं, और H उनका म० स० अ० सूचित करता है। A व B का H से भाग करो और फ़र्ज़ करो कि दोनों भजनफल क्रमशः a व b द्वारा सूचित होते हैं। तो

$$\left.\begin{aligned} A &= aH \\ \text{और}\quad B &= bH \end{aligned}\right\}$$

अब चूँकि a व b का कोई सार्व गुणनखंड नहीं है, इसलिए A व B के प्रत्येक समापवर्त्य में $a\times H\times b$ शामिल है।

इसलिए यह ल० स० अ० $=aHb$.

$$\left.\begin{aligned} \text{किन्तु } aHb &= \frac{A}{H}\times B \\ \text{अथवा } &= A\times\frac{B}{H} \end{aligned}\right\}$$

इसलिए पूछा हुआ ल० स० अ० $=\frac{A}{H}\times B$, अथवा $=A\times\frac{B}{H}$.

इसलिए यदि दो व्यंजकों का ल० स० अ० निकालना हो तो एक को उनके म० स० अ० द्वारा भाग करके प्राप्त भजनफल को दूसरे व्यंजक द्वारा गुणा करो।

उपसिद्धान्त। यदि A व B का ल० स० अ० L द्वारा सूचित हो तो अवश्य $L\times H=A\times B$; अर्थात् दो व्यंजकों के ल० स० अ० और म० स० अ० का गुणनफल उन व्यंजकों के गुणनफल के समान है।

टीका। दो व्यंजकों में यदि कोई सार्व गुणनखंड न हो, तो उनका गुणनफल ही व्यंजकों का ल० स० अ० होगा।

उदाहरण। $6x^3+25x^2+16x+7$ व $6x^3-11x^2-8x-5$ का ल० स० अ० निकालो।

$$\begin{array}{r|l}
6x^3-11x^2-8x-5 & 6x^3+25x^2+16x+7 \;(1 \\
 & \underline{6x^3-11x^2-8x-5} \\
 & 12\;)\;\underline{36x^2+24x+12} \\
 & \qquad 3x^2+2x+1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^2+2x+1 & 6x^3-11x^2-8x-5 \;(2x-5 \\
 & \underline{6x^3+4x^2+2x} \\
 & -15x^2-10x-5 \\
 & \underline{-15x^2-10x-5}
\end{array}$$

इसलिए दिये हुए व्यंजकों का म० स० अ० $=3x^2+2x+1$.

इसलिए यह ल० स० अ०

$$=\frac{6x^3-11x^2-8x-5}{3x^2+2x+1}(6x^3+25x^2+16x+7)$$

$$=(2x-5)(6x^3+25x^2+16x+7)$$

$$=12x^4+20x^3-93x^2-66x-35.$$

प्रश्नमाला 86

ल० स० अ० निकालो :

1. $3x^3+2x^2-11x+4$ और $3x^3+14x^2+13x-8$ का।
2. $6x^3+17x^2+9x-4$ और $6x^3-7x^2-27x+8$ का।
3. $12x^3-4x^2-25x+12$ और $12x^3-28x^2+7x+12$ का।
4. $9x^3-12x^2-15x+20$ और $15x^3+12x^2-25x-20$ का।
5. $4x^3-10x^2-18x+45$ और $6x^3+8x^2-27x-36$ का।
6. $4x^4+4x^3+7x^2+11x+4$ और $6x^4+7x^3+4x^2+5x+2$ का।
7. $8x^4-6x^3-8x^2+9x-6$ और $16x^4-12x^3+20x^2-9x+6$ का।
8. $4x^4+8x^3+21x^2+18x+27$
   और $3x^4+6x^3+17x^2+16x+24$ का।
9. दो संख्याओं x व y का म० स० अ० h और ल० स० अ० l है, और यदि $h+l=x+y$ हो तो सिद्ध करो कि $h^3+l^3=x^3+y^3$. [पंजाब एन्ट्रेंस, 1891.]

163. तीन या तीन से अधिक ऐसे व्यंजकों का ल० स० अ० निकालना जिनके गुणनखंड ध्यान से देखने से न निकल सकें :

फ़र्ज़ करो कि A, B, C द्वारा सूचित तीन व्यञ्जकों का ल० स० अ० निकालना है।

समझ लो कि A और B का ल० स० अ० L है और L तथा C का ल० स० अ० M है।

तो स्पष्ट है कि L व C का प्रत्येक समापवर्त्य (common multiple), A, B व C का साधारण समापवर्त्य होगा ... ... (1)

अब स्पष्ट है कि A, B व C का प्रत्येक समापवर्त्य C का भी अपवर्त्य है ... (2)

इसलिए (1) से A, B व C का समापवर्त्य M होगा। इसलिए A, B व C का ल० स० अ० या तो M है, या M से कम घात का कोई व्यंजक होगा।

किन्तु A, B व C का ल० स० अ० M से कम घात का कोई व्यंजक नहीं हो सकता; क्योंकि (2) से मालूम होता है कि A, B व C का ल० स० अ० अवश्य L तथा C का समापवर्त्य होगा।

इसलिए पूछा हुआ ल० स० अ० $=M$.

इसलिए यदि A, B, C, D आदि द्वारा सूचित व्यंजकों का ल० स० अ० निकालना हो तो पहले A व B का ल० स० अ०; उसके बाद इस प्राप्त ल० स० अ० तथा C का ल० स० अ०, उसके बाद यह अंतवाला ल० स० अ० और D का ल० स० अ० आदि क्रमसे ल० स० अ० निकालना चाहिए। इस रूप से प्राप्त अंत का ल० स० अ० ही पूछा हुआ ल० स० अ० होगा।

उदाहरण। ल० स० अ० निकालो : $6x^2-11x+3$, $4x^2-4x-3$ और $6x^2+25x-9$ का।

$$\begin{array}{r|l|l} 6x^2-11x+3 & 6x^2+25x-9 & 1 \\ & \underline{6x^2-11x+3} & \\ & 12)\ 36x-12 & \\ & 3x-1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} 3x-1 & 6x^2-11x+3 & 2x-3 \\ & \underline{6x^2-2x} & \\ & -9x+3 & \\ & \underline{-9x+3} & \end{array}$$

इसलिए $6x^2-11x+3$ और $6x^2+25x-9$ का म० स० अ० $=3x-1$.

इसलिए इन दो व्यंजकों का ल० स० अ०

$$=\frac{6x^2-11x+3}{3x-1}(6x^2+25x-9)$$
$$=(2x-3)(6x^2+25x-9)$$
$$=12x^3+32x^2-93x+27.$$

अब, $12x^3+32x^2-93x+27$ और $4x^2-4x-3$ का ल० स० अ० निकालना होगा।

$$\begin{array}{r|l|l} 4x^2-4x-3 & 12x^3+32x^2-93x+27 & 3x+11 \\ & \underline{12x^3-12x^2-9x} & \\ & 44x^2-84x+27 & \\ & \underline{44x^2-44x-33} & \\ & -20)\ -40x+60 & \\ & 2x-3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2x-3 & 4x^2-4x-3 & 2x+1 \\ & \underline{4x^2-6x} & \\ & 2x-3 & \\ & \underline{2x-3} & \end{array}$$

इसलिए दिये हुए व्यंजकों का म० स० अ० $=2x-3$.

इसलिए उनका ल० स० अ० $=\dfrac{4x^2-4x-3}{2x-3}(12x^3+32x^2-93x+27)$

$$=(2x+1)(12x^3+32x^2-93x+27)$$
$$=24x^4+76x^3-154x^2-39x+27.$$

प्रश्नमाला 87

ल० स० अ० निकालो :

1. $3x^2-10x-8$, $4x^2-20x+9$ और $6x^2+x-2$ का।
2. $3x^2-23x-8$, $6x^2-7x-3$ और $2x^2-11x+12$ का।
3. $6x^2-19x+10$, $12x^2-11x+2$ और $8x^2+10x-3$ का।
4. $2x^4+4x^3+x^2+6x-3$, $4x^4+8x^3-7x^2-6x+3$ और $8x^4+4x^3-2x^2-3x-5$ का।

पच्चीसवाँ अध्याय

कठिन भिन्न (Harder Fractions)

164. सोलहवें अध्याय में बतलाए हुए भिन्न से अधिक कठिन भिन्नों के विषय में अब विचार किया जायगा।

I. भिन्न को लघुत्तम पदों में रखना

(Reduction of Fractions to lowest terms)

165. जिस भिन्न के हर व अंश में कोई सार्व गुणनखंड न हो उसे लघुत्तम पदों का भिन्न कहते हैं। यदि अंश व हर के गुणनखंड ध्यानपूर्वक विचार द्वारा निकाले जा सकें, तो ऐसी हालत में अंश व हर से सार्व गुणनखंडों को हटाकर भिन्न को लघुत्तम पदों में रक्खा गया है, कहते हैं। और इस रीति से अंश व हर के गुणनखंड निकाले न जा सकें तो उनमें से प्रत्येक को उनके म० स० अ० द्वारा भाग करके उनको लघुत्तम पदों में रखना पड़ता है।

उदाहरण 1. लघुत्तम पदों में रक्खो :

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}.$$

$$\text{दिया हुआ भिन्न}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{(a+b+c)(bc+ca+ab)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{bc+ca+ab}.$$

उदाहरण 2. हल करो : $\dfrac{8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}.$

$$\text{दिया हुआ भिन्न}=\frac{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}=1.$$

[उदाहरण 1, नियम 132.]

उदाहरण 3. लघत्तम पदों में रक्खो :

$$\frac{3x^3-27ax^2+78a^2x-72a^3}{2x^3+10ax^2-4a^2x-48a^3}.$$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1889.]

$$\text{अंश}=3(x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3).$$

$$\text{हर}\ =2(x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3).$$

B—21

अब इनका म० स० अ० निकालने के लिए,

$$\begin{array}{r} x^3 + 5ax^2 - 2a^2x - 24a^3 \\ \underline{x^3 - 9ax^2 + 26a^2x - 24a^3} \\ 14ax)\ \underline{14ax^2 - 28a^2x} \\ x - 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x - 2a & x^3 - 9ax^2 + 26a^2x - 24a^3 \ (x^2 - 7ax + 12a^2 \\ & \underline{x^3 - 2ax^2} \\ & -7ax^2 + 26a^2x - 24a^3 \\ & \underline{-7ax^3 + 14a^2x} \\ & 12a^2x - 24a^3 \\ & \underline{12a^2x - 24a^3} \end{array}$$

इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० $= x - 2a$.

$$\text{इसलिए फल} = \frac{3(x^3 - 9ax^2 + 26a^2x - 24a^3) \div (x - 2a)}{2(x^3 + 5ax^2 - 2a^2x - 24a^3) \div (x - 2a)}$$

$$= \frac{3(x^2 - 7ax + 12a^2)}{2(x^2 + 7ax + 12a^2)}.$$

उदाहरण 4. $\dfrac{2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5}{7x^3 - 19x^2 + 17x - 5}$ को लघुत्तम पदों में रक्खो।

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1870.]

दिये हुए भिन्न क अंश व हर का म० स० अ० नीचे दी हुई रीति से निकाला जा सकता है: [उपसि० 2, नियम 160.]

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5 \\ \underline{7x^3 - 19x^2 + 17x - 5} \\ 2x\ )\underline{2x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 4x} \\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & 7x^3 - 19x^2 + 17x - 5 \ (7 \\ & \underline{7x^3 - 28x^2 + 35x - 14} \\ & 9\ )\ \underline{9x^2 - 18x + 9} \\ & \qquad x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 1 & x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \ (x - 2 \\ & \underline{x^3 - 2x^2 + x} \\ & -2x^2 + 4x - 2 \\ & \underline{-2x^2 + 4x - 2} \end{array}$$

इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० $= x^2 - 2x + 1$.

इसलिए पूछा हुआ फल

$$= \frac{(2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5) \div (x^2 - 2x + 1)}{(7x^3 - 19x^2 + 17x - 5) \div (x^2 - 2x + 1)} = \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x - 5}.$$

प्रश्नमाला 88

लघुत्तम पदों में रक्खो :

1. $\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+x-2}$.

2. $\dfrac{x^3-7x+6}{x^3+2x^2-13x+10}$.

3. $\dfrac{a^3+2a^2b-2ab^2+3b^3}{a^3-5a^2b+5ab^2-4b^3}$.

4. $\dfrac{x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-b^4}$.

5. $\dfrac{3x^3+4x^2y-7xy^2+2y^3}{2x^3+9x^2y+8xy^2-5y^3}$.

6. $\dfrac{1+3x-x^3-3x^4}{1-x+2x^2+x^3+3x^4}$.

7. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$.

8. $\dfrac{x^4+x^2+25}{x^4-9x^2+30x-25}$.

9. $\dfrac{2x^3+3ax^2+5a^2x-21a^3}{4x^3-12ax^2+19a^2x-15a^3}$.

10. $\dfrac{2x^4+x^3-3x^2+2x+3}{3x^4+x^3-4x^2+3x+4}$.

11. $\dfrac{9x^3-7a^2x-2a^3}{9x^3+6ax^2-5a^2x-2a^3}$.

12. $\dfrac{2a^3-16a^2b+44ab^2-42b^3}{3a^3+6a^2b-24ab^2-63b^3}$.

13. $\dfrac{9x^4+30x^3+12x^2-6x-45}{8x^4+28x^3+16x^2-4x-48}$.

14. $\dfrac{6a^6-9a^5b+a^4b^2+3a^3b^3-a^2b^4}{4a^5-6a^4b+3a^2b^3-ab^4}$.

15. $\dfrac{24x^5+16x^4y-28x^3y^2-24x^2y^3-12xy^4}{45x^4y+30x^3y^2-15x^2y^3-20xy^4-10y^5}$.

16. $\dfrac{(b+c)^3(b-c)+(c+a)^3(c-a)+(a+b)^3(a-b)}{(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)+(a+b)^2(a-b)}$.

17. $\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-(yz+x)(zx+y)(xy+z)}{1-x^2-y^2-z^2-2xyz}$

18. $\dfrac{(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3}{12(x+y-2z)(y+z)(y+z-2x)}$.

19. $\dfrac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)}$.

20. $\dfrac{7x^3-2x^2y-63xy^2+18y^3}{5x^4-3x^3y-43x^2y^2+27xy^3-18y^4}$. [पञ्जाब, 1912.]

II. भिन्नों का जोड़ व घटाना

166. चूँकि $\frac{p}{a}+\frac{q}{a}+\frac{r}{a}+\dots\dots\dots=\frac{p+q+r+\cdots}{a}$, इसलिए मालूम होता है कि यदि सम-हरवाले भिन्नों का योगफल निकालना हो, तो भिन्नों के सम-हर को योगफल का हर और अंशों का बीजीय योगफल भिन्नों के योगफल के अंशरूप में लेने से ही पूछा हुआ योगफल प्राप्त होता है।

यदि भिन्न साधारण हरवाला न हो तो 108 वें नियम में बतलाई हुई रीति के अनुसार उनमें से प्रत्येक को सम-हरवाला भिन्न बनाकर ऊपर दी हुई रीति काम में लायी जाती है।

उदाहरण 1. सरल करो : $\frac{a^2}{(x-a)^n}+\frac{2a}{(x-a)^{n-1}}+\frac{1}{(x-a)^{n-2}}$.

[मद्रास एन्ट्रेंस, 1865.]

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=\frac{a^2}{(x-a)^n}+\frac{2a(x-a)}{(x-a)^n}+\frac{(x-a)^2}{(x-a)^n}=\frac{a^2+2a(x-a)+(x-a)^2}{(x-a)^n}$$

$$=\frac{\{a+(x-a)\}^2}{(x-a)^n}=\frac{x^2}{(x-a)^n}.$$

उदाहरण 2. सरल करो : $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2+4}+\frac{32}{x^4+16}$.

इस प्रकार के व्यंजकों को हल करना हो तो पहले सुविधा देखकर दो पदों को जोड़कर प्राप्त योगफल के साथ कोई तीसरा पद जोड़ते हैं। इस प्रकार एक एक पद करके अन्त तक जोड़ते चले जाते हैं।

अब $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4};$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2+4}=\frac{4(x^2+4)-4(x^2-4)}{x^4-16}=\frac{32}{x^4-16};$$

और $$\frac{32}{x^4-16}+\frac{32}{x^4+16}=\frac{32(x^4+16)+32(x^4-16)}{x^8-256}=\frac{64x^4}{x^8-256}.$$

[पूछा हुआ फल]

उदाहरण 3. सरल करो : $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+4b}$.

सब पदों को एक साथ सरल न करके उनको कई हिस्सों में बाँट लेने से आसानी होगी।

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = \left\{\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b}\right\} - \left\{\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b}\right\}.$$

अब $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} = \frac{(a+2b)-(a+b)}{(a+b)(a+2b)} = \frac{b}{(a+b)(a+2b)}$;

और $\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b} = \frac{(a+4b)-(a+3b)}{(a+3b)(a+4b)} = \frac{b}{(a+3b)(a+4b)}$.

और $\frac{b}{(a+b)(a+2b)} - \frac{b}{(a+3b)(a+4b)}$

$$= \frac{b(a+3b)(a+4b) - b(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)}.$$

अब इसका अंश $= b(a^2+7ab+12b^2) - b(a^2+3ab+2b^2)$

$$= b(4ab+10b^2) = 2b^2(2a+5b).$$

$$\text{इसलिए, पूछा हुआ फल} = \frac{2b^2(2a+5b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)}.$$

उदाहरण 4. सरल करो : $\frac{x+3}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4x+3} + \frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

[प० ए०, 1904.]

पहला हर $= x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$.

दूसरा हर $= x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$.

तीसरा हर $= x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$.

∴ हरों का ल० स० अ० $= (x-1)(x-2)(x-3)$.

$$\text{इसलिए दिया हुआ व्यंजक} = \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} + \frac{x+2}{(x-3)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(x+3)(x-3)+(x+2)(x-2)+(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-9+x^2-4+x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

उदाहरण 5. सरल करो :

$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)} + \frac{y-z}{(a+y)(a+z)} + \frac{z-x}{(a+z)(a+x)}$. [इला०, 1915.]

हरों का ल० स० अ० $= (a+x)(a+y)(a+z)$.

$$\therefore \text{ दिया हुआ व्यंजक} = \frac{(a+z)(x-y)+(a+x)(y-z)+(a+y)(z-x)}{(a+x)(a+y)(a+z)},$$

इसका अंश $= a\{(x-y)+(y-z)+(z-x)\}+z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)$
$=0.$ [सरल करने पर]

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $= \dfrac{0}{(a+x)(a+y)(a+z)} = 0.$

दूसरी रीति से : चूँकि $\dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{a+x} = \dfrac{(a+x)-(a+y)}{(a+x)(a+y)} = \dfrac{x-y}{(a+x)(a+y)}$,

$\dfrac{1}{a+z} - \dfrac{1}{a+y} = \dfrac{(a+y)-(a+z)}{(a+y)(a+z)} = \dfrac{y-z}{(a+y)(a+z)}$.

और $\dfrac{1}{a+x} - \dfrac{1}{a+z} = \dfrac{(a+z)-(a+x)}{(a+z)(a+x)} = \dfrac{z-x}{(a+z)(a+x)}$,

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $= \dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a+z} - \dfrac{1}{a+y} + \dfrac{1}{a+x} - \dfrac{1}{a+z} = 0.$

उदाहरण 6. सरल करो : $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{2a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$.

इस प्रकार के व्यञ्जकों के साथ सुविधा देख कर एक दूसरा भिन्न जोड़ व घटाकर व्यंजक को बहुत आसानी से सरल किया जा सकता है। जैसे, इस प्रश्न में $\dfrac{a}{a-b}$ भिन्न को दिये हुए व्यंजक के साथ जोड़ने व घटाने से दिया हुआ व्यञ्जक

$$= \frac{a}{a-b} + \frac{a}{a+b} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4} - \frac{a}{a-b}.$$

अब $\dfrac{a}{a-b} + \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a(a+b)+(a-b)a}{a^2-b^2} = \dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$;

और $\dfrac{2a^2}{a^2-b^2} + \dfrac{2a^2}{a^2+b^2} = \dfrac{2a^2(a^2+b^2)+2a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^4}{a^4-b^4}$;

और $\dfrac{4a^4}{a^4-b^4} + \dfrac{4a^2b^2}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^4+4a^2b^2}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^2(a^2+b^2)}{a^4-b^4} = \dfrac{4a^2}{a^2-b^2}$;

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक

$$= \frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a-b} = \frac{4a^2-a(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{3a^2-ab}{a^2-b^2} = \frac{a(3a-b)}{a^2-b^2}.$$

प्रश्नमाला 89

सरल करो :

1. $\dfrac{x}{3x-y} + \dfrac{x}{3x+y} + \dfrac{6x^2}{9x^2+y^2}$.

2. $\dfrac{1}{x-3a} - \dfrac{1}{2x+6a} - \dfrac{x-9a}{2x^2+18a^2}$.

3. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2} - \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} - 2$.

4. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$. 5. $\frac{1}{x-a}-\frac{2}{2x+a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{2x-a}$.

6. $\frac{3}{a-x}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{a+x}+\frac{1}{x-3a}$.

7. $\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{1-x^2}$. 8. $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\frac{b-c}{(b-a)(x-b)}$.

9. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x^2-8x+15}$.

10. $\frac{1}{x^2+5ax+4a^2}+\frac{1}{x^2+11ax+28a^2}+\frac{2}{x^2+20ax+91a^2}$.

11. $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}$.

12. $\frac{1}{1-x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{2x}{1+x^2+x^4}$.

13. $\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{1}{1-x+x^2}+\frac{2x}{1-x^2+x^4}$.

14. $\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}+\frac{6x}{x^3+8}$.

15. $\frac{1}{2x^2-6ax+9a^2}-\frac{1}{2x^2+6ax+9a^2}+\frac{12ax}{4x^4-81a^4}$.

16. $\frac{1}{(x+a)(x+2a)}+\frac{1}{(x+2a)(x+3a)}+\frac{1}{(x+3a)(x+4a)}$.

17. $\frac{a-b}{(x+a)(x+b)}+\frac{b-c}{(x+b)(x+c)}+\frac{c-d}{(x+c)(x+d)}$.

18. $\frac{1}{a^2-3a+2}+\frac{2}{a^2-5a+6}+\frac{3}{a^2-4a+3}$.

19. $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x+2}$. [इला०, 1912.]

20. $\frac{2(x-3)}{(x-4)(x-5)}-\frac{x-1}{(x-3)(x-4)}-\frac{x-2}{(x-5)(x-3)}$. [इला०, 1911.]

21. $\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}-\frac{16}{1-a^{16}}$.

22. $\left(\sqrt{\frac{a+x}{x}}-\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\frac{x^2}{a(a+x)}$.

[ब० ए०, 1876.]

23. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

24. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}.$

25. $1+\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{bx}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}+\dfrac{dx^3}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$

III. मिश्र (Complex) और वितत याने लगातार (Continued) भिन्न

167. मिश्र भिन्न : जिस भिन्न के हर या अंश में से दोनों या एक, एक भिन्न हैं, उसको मिश्र भिन्न कहते हैं। जैसे,

$\dfrac{\frac{x}{y}}{z}$, $\dfrac{x}{\frac{y}{z}}$, $\dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}}$ आदि में से प्रत्येक मिश्र भिन्न है। यह स्पष्ट विदित होता है कि ये भिन्न के भाग हैं। इस प्रकार के भिन्नों को सरल करने की रीति 111 वें नियम में बतलाई गई है।

168. वितत या लगातार भिन्न (Continued Fractions) :

$x+\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\text{आदि}}}}$ अथवा $\cfrac{x}{y+\cfrac{z}{u+\cfrac{v}{w+\text{आदि}}}}$, इस प्रकार के भिन्नों को वितत या लगातार भिन्न कहते हैं।

इस प्रकार के भिन्न को सरल करना हो तो अंकगणित की रीति से सबसे नीचे के हिस्से से सरल करते हुए ऊपर को बढ़ना चाहिए।

उदाहरण 1. सरल करो : $-1+\cfrac{a}{2(a+b)-\cfrac{a+b}{1-\cfrac{b}{a+b}}}.$

चूँकि $1-\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a+b-b}{a+b}=\dfrac{a}{a+b}$, इसलिए सब से नीचे का हिस्सा सरल करना आरम्भ करके

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = -1 + \cfrac{a}{2(a+b) - \cfrac{a+b}{\cfrac{a}{a+b}}} = -1 + \cfrac{a}{2(a+b) - \cfrac{(a+b)^2}{a}}$$

$$= -1 + \cfrac{a}{\cfrac{2a^2 + 2ab - (a^2 + 2ab + b^2)}{a}}$$

$$= -1 + \frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{-a^2 + b^2 + a^2}{a^2 - b^2} = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

उदाहरण 2. सरल करो : $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}$ [इ० ए०, 1912.]

पहले उदाहरण में दिखलाये हुए नियम के अनुसार,

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+x}{x}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{1+x}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+x+x}{1+x}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1+x}{1+2x}} = \cfrac{1}{\cfrac{1+2x+1+x}{1+2x}} = \frac{1+2x}{2+3x}.$$

उदाहरण 3. हल करो : $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}} = \dfrac{3}{4}.$

उदाहरण 2 में प्राप्त फल लेकर

$$\text{बायीं तरफ} = \frac{1+2x}{2+3x} = \frac{3}{4};$$

अथवा $3(2+3x) = 4(1+2x)$; अथवा $6 + 9x = 4 + 8x$;

अथवा $9x - 8x = 4 - 6$, [तरफ बदलके]

अथवा $x = -2$.

प्रश्नमाला 90

सरल करो :

1. $$\frac{\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)}.$$ [प० ए०, 1926.]

2. $$\frac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}+3}.$$

3. $$\frac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}}{\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x-b}+\frac{cx}{x-c}-(a+b+c)}.$$

4. $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\times\left\{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}.$$ [क० ए०, 1921.]

5. $$\frac{1}{1+\frac{a}{1+a+\frac{2a^2}{1-a}}}.$$

6. $$\frac{1}{1+\frac{1}{a+x}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a+x}}+\frac{2}{1+\frac{1}{a^2+x^2}}.$$

[क० ए०, 1870.]

7. $$\frac{\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}}.$$

8. $$\frac{\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)}\times\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}.$$

9. $$\frac{\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2(x-3)}}{\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}}.$$

10. $$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}}.$$

11. $$\frac{a}{b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}}.$$

12. $$\frac{x}{x-\frac{x-1}{1-\frac{1}{x+1}}}.$$

13. $a^2+\dfrac{b^4}{a^2-\dfrac{a^3+b^3}{a+\dfrac{b^2}{a-b}}}$. 14. $\dfrac{m}{m^2-\dfrac{m^3-1}{m+\dfrac{1}{m+1}}}$.

15. $\dfrac{\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}}{x+y-\dfrac{(x-y)^2}{x+y}}-1$. 16. $\dfrac{x^2(x+2)}{4x+8+\dfrac{2x^4-32}{x+2+\dfrac{(x-2)(x-2)}{x+2}}}$.

हल करो :

17. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{2-x}}}=\dfrac{4}{3}$. 18. $\dfrac{2x}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}}=1$.

19. $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{13}{9}$. 20. $\dfrac{a}{a+\dfrac{a^2}{a+\dfrac{a^2}{x}}}=\dfrac{2}{3}$.

169. **चक्र-क्रमवाले भिन्न** : भिन्नों में दिये हुए अक्षर यदि चक्र-क्रम में दिये जायँ तो वे बहुत आसानी से हल किये जा सकते हैं।

उदाहरण 1. हल करो : $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

पहले पद के हर में देखा जाता है कि $a-b$ के दो अक्षर चक्र-क्रम में नहीं हैं, किन्तु चूँकि $a-c=-(c-a)$, $(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$.

इसलिए पहला भिन्न $=-\dfrac{bc}{(a-b)(c-a)}$;

उसी प्रकार दूसरा भिन्न $=-\dfrac{ca}{(b-c)(a-b)}$;

और तीसरा भिन्न $=-\dfrac{ab}{(c-a)(b-c)}$.

तीनों हरों का ल॰ स॰ अ॰ $=(b-c)(c-a)(a-b)$.

$$\therefore \text{ दिया हुआ व्यंजक} = -\left[\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(b-c)}\right]$$

$$= -\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$= \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 1.$$

170. चक्र-क्रमवाले भिन्नों के सम्बन्ध में कई विशेष फल: निम्नलिखित फल बहुत आसानी से सिद्ध किये जा सकते हैं ; और चक्र-क्रमवाले भिन्नों को सरल करने के लिए उनका प्रयोग बहुत काम का है।

यदि $\frac{1}{(a-b)(a-c)} = X$, $\frac{1}{(b-c)(b-a)} = Y$ और $\frac{1}{(c-a)(c-b)} = Z$ हो,

तो (i) $X+Y+Z=0$; (ii) $aX+bY+cZ=0$;

(iii) $a^2X+b^2Y+c^2Z=1$; (iv) $bcX+caY+abZ=1$;

(v) $a^3X+b^3Y+c^3Z=a+b+c$;

(vi) $a^4X+b^4Y+c^4Z=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab.$

उदाहरण 1. हल करो : $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

दिया हुआ व्यंजक $=(a^2-bc)X+(b^2-ca)Y+(c^2-ab)Z$,

[ऊपर दिये हुए संकेत बिठाकर]

$=a^2X+b^2Y+c^2Z-(bcX+caY+abZ)$,

$=1-1$ [(iii) और (iv) के फलों से]

$=0$.

उदाहरण 2. हल करो :

$$\frac{pa^3+qa^2bc+ra}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^3+qab^2c+rb}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^3+qabc^2+rc}{(c-a)(c-b)}.$$

दिया हुआ व्यंजक

$=(pa^3+qa^2bc+ra)X+(pb^3+qab^2c+rb)Y+(pc^3+qabc^2+rc)Z$,

[ऊपर दिये हुए संकेत बिठाकर]

$=p(a^3X+b^3Y+c^3Z)+qabc(aX+bY+cZ)+r(aX+bY+cZ)$

$=p(a+b+c)+qabc.0+r.0=p(a+b+c)$.

उदाहरण 3. सिद्ध करो :

$$\frac{1}{(l-m)(l-n)(x+l)}+\frac{1}{(m-n)(m-l)(x+m)}+\frac{1}{(n-l)(n-m)(x+n)}$$

$$=\frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}.$$

फ़र्ज़ करो कि a है $x+l$, b है $x+m$, c है $x+n$ के बराबर।

तो $a-b=l-m,\ \ a-c=l-n,\ \ b-c=m-n$, आदि।

$$\therefore \text{ दिया हुआ व्यंजक } = \frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{abc}\left[\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right]$$

$$=\frac{1}{abc}(bcX+caY+abZ)$$

$$=\frac{1}{abc}=\frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}$$

[a, b, c के मूल्य फिर से बिठाकर]

171. भिन्न-सम्बन्धी तादात्म्य (Fractional Identities) :

विविध उदाहरण

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि $\dfrac{x}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a^2}{x^3}+\dfrac{a^4}{x^5}-\dfrac{a^6}{x^7}+\dfrac{a^8}{x^7(x^2+a^2)}$.

x को x^2+a^2 द्वारा भाग करने पर

$$x^2+a^2\,\big)\,x\,\big(\frac{1}{x}-\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^4}{x^5}-\frac{a^6}{x^7}$$

$$\begin{array}{r}
x+\dfrac{a^2}{x} \\
\hline
-\dfrac{a^2}{x} \\
-\dfrac{a^2}{x}-\dfrac{a^4}{x^3} \\
\hline
\dfrac{a^4}{x^3} \\
\dfrac{a^4}{x^3}+\dfrac{a^6}{x^5} \\
\hline
-\dfrac{a^6}{x^5} \\
-\dfrac{a^6}{x^5}-\dfrac{a^8}{x^7} \\
\hline
\dfrac{a^8}{x^7}
\end{array}$$

इसलिए भाग करना और न बढ़ा कर

$$\frac{x}{x^2+a^2}=\frac{1}{x}-\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^4}{x^5}-\frac{a^6}{x^7}+\frac{\left(\frac{a^8}{x^7}\right)}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^4}{x^5}-\frac{a^6}{x^7}+\frac{a^8}{x^7(x^2+a^2)}.$$

उदाहरण 2. मूल्य निकालो :

$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$ का, यदि $x=\frac{4ab}{a+b}$ हो। [क० ए०, 1865.]

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=\left(\frac{x+2a}{x-2a}-1\right)+\left(\frac{x+2b}{x-2b}-1\right)+2$$

$$=\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}+2$$

$$=\frac{4}{(x-2a)(x-2b)}\{a(x-2b)+b(x-2a)\}+2$$

$$=\frac{4}{(x-2a)(x-2b)}\{(a+b)x-4ab\}+2$$

$$=0+2 \qquad [\because \ (a+b)x=4ab.]$$

$$=2.$$

उदाहरण 3. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}.$$

चूँकि $$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc};$$

$$\therefore \quad (a+b+c)(bc+ca+ab)=abc,$$

अथवा $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0.$

अथवा $(b+c)(c+a)(a+b)=0;$

$\therefore$ इन गुणनखंडों में से कई एक ले लो, जैसे, $b+c=0.$

इसलिए $b=-c.$ $\therefore$ $b^7=(-c)^7=-c^7$, अथवा $b^7+c^7=0.$

और चूँकि $b=-c$, $\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$; $\therefore$ $\frac{1}{b^7}=\left(-\frac{1}{c}\right)^7=-\frac{1}{c^7}.$

इसलिए $$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}-\frac{1}{c^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}=\frac{1}{(a+b+c)^7},$$

[$\because$ $b+c=0.$]

इसी प्रकार $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}$. [$\because$ $b^7+c^7=0$.]

इसलिए तादात्म्य सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. लघुत्तम पदों में रक्खो :

$$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}.$$ [क० ए०, 1866.]

अब पहला भिन्न $=\frac{\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}}{\{(x+z)+y\}\{(x+z)-y\}}$

$=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+z+y)(x+z-y)}=\frac{x+y-z}{x+y+z}$.

इसी प्रकार दूसरा भिन्न $=\frac{(y+x-z)(y-x+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{y-x+z}{x+y+z}$,

और तीसरा भिन्न $=\frac{(z+x-y)(z-x+y)}{(y+z+x)(y+z-x)}=\frac{z+x-y}{x+y+z}$.

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=\frac{(x+y-z)+(y-x+z)+(z+x-y)}{x+y+z}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1$.

उदाहरण 5. यदि $x+y+z=xyz$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}=\frac{y+z}{1-yz}\cdot\frac{z+x}{1-zx}\cdot\frac{x+y}{1-xy}.$$

चूँकि $x+y+z=xyz$,

इसलिए $y+z=xyz-x=x(yz-1)$.

इसलिए $\frac{y+z}{1-yz}=\frac{x(yz-1)}{1-yz}=-x$.

इसी प्रकार $\frac{z+x}{1-zx}=-y$ और $\frac{x+y}{1-xy}=-z$.

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}$

$=-x-y-z=-(x+y+z)=-xyz$

$=(-x).(-y).(-z)$

$=\frac{y+z}{1-yz}\cdot\frac{z+x}{1-zx}\cdot\frac{x+y}{1-xy}$.

उदाहरण 6. सिद्ध करो कि $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$

$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. [क० ए०, 1867.]

अब $\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c^2}{a^2}+2+\frac{a^2}{c^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)$

$$=4+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)$$

$$=4+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{bc}{b^2}+\frac{bc}{c^2}\right)+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{bc}\right)$$

$$=4+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right);$$

दिया हुआ व्यंजक $=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right)\right\}$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c}+\frac{bc}{a^2}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a^2}{bc}\right)\right\}$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left\{\frac{b}{a}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{a}{b}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\right\}$$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

उदाहरण 7. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

अब $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}=\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}=\frac{c}{(s-a)(s-b)},$

और $\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{s-(s-c)}{s(s-c)}=\frac{c}{s(s-c)}.$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=\frac{c}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}=c.\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=c.\frac{2s^2-s(a+b+c)+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ [$\because 2s^2-s(a+b+c)=2s^2-2s^2=0.$]

उदाहरण 8. सिद्ध करो :

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)=2(a+b+c).$$

फ़र्ज़ करो कि $2s^2=a^2+b^2+c^2$

अब $a^2+b^2-c^2=(a^2+b^2+c^2)-2c^2=2(s^2-c^2),$

$b^2+c^2-a^2=(a^2+b^2+c^2)-2a^2=2(s^2-a^2),$

$c^2+a^2-b^2=(a^2+b^2+c^2)-2b^2=2(s^2-b^2).$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक

$$=2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(s^2-c^2\right)+2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\left(s^2-a^2\right)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(s^2-b^2\right)$$

$$=2\left\{\frac{1}{a}\left(2s^2-b^2-c^2\right)+\frac{1}{b}\left(2s^2-c^2-a^2\right)+\frac{1}{c}\left(2s^2-a^2-b^2\right)\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{a}\cdot a^2+\frac{1}{b}\cdot b^2+\frac{1}{c}\cdot c^2\right\}=2(a+b+c).$$

उदाहरण 9. सिद्ध करो : $\dfrac{a}{a^2-1}+\dfrac{a^2}{a^4-1}+\dfrac{a^4}{a^8-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a^8+1}{a^8-1}\right).$

$$\frac{a}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+1)^2-(a^2+1)}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}\right);$$

$$\frac{a^2}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2+1)^2-(a^4+1)}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^4+1}{a^4-1}\right);$$

$$\frac{a^4}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^4}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^4+1)^2-(a^8+1)}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^4+1}{a^4-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right);$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)+\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^4+1}{a^4-1}\right)+\left(\frac{a^4+1}{a^4-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right\}.$$

उदाहरण 10. सिद्ध करो :

$$bc\cdot\frac{a+d}{(a-b)(a-c)}+ac\cdot\frac{b+d}{(b-a)(b-c)}+ab\cdot\frac{c+d}{(c-a)(c-b)}=d.$$

चूँकि $\quad b-a=-(a-b),$

और $(c-a)(c-b)=[-(a-c)]\times[-(b-c)]=(a-c)(b=c).$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक

$$= bc\cdot\frac{a+d}{(a-b)(a-c)} + ac\cdot\frac{-(b+d)}{(a-b)(b-c)} + ab\cdot\frac{c+d}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

अब अंश $= abc\{(b-c)-(a-c)+(a-b)\}$

$$+ d\{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)\}$$

$$= d\{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)\}$$

$$= d\{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\}$$

$$= d(a-b)(a-c)(b-c).$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $= d$.

उदाहरण 11. हल करो :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(x+b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$$

दिया हुआ व्यंजक

$$= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{-b^2}{(a-b)(b-c)(x+b)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)(x+c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c)(x+b)(x+c) - b^2(a-c)(x+c)(x+a) + c^2(a-b)(x+a)(x+b)}{(a-b)(a-c)(b-c)(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

अब अंश $= a^2(b-c)\{x^2 + x(b+c) + bc\} + b^2(c-a)\{x^2 + x(c+a) + ca\}$

$$+ c^2(a-b)\{x^2 + x(a+b) + ab\}$$

$$= x^2\{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\}$$

$$+ x\{a^2(b^2-c^2) + b^2(c^2-a^2) + c^2(a^2-b^2)\}$$

$$+ abc\{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}$$

$$= x^2\{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\}$$

$$= x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $= \dfrac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

उदाहरण 12. हल करो : $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

[क० ए०, 1887.]

दिया हुआ व्यंजक $= \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{-b^3}{(b-c)(a-b)} + \dfrac{c^3}{(a-c)(b-c)}$

$$= \frac{a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

अग्र अंश $=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक $=a+b+c.$

विकल्प विधि (Alternative Method)* :

चूँकि $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(a-c)(b-c)},$$

$\therefore$ दिया हुआ व्यंजक

$$=\left\{\frac{a^3}{(a-b)(b-c)}-\frac{a^3}{(a-c)(b-c)}\right\}+\frac{-b^3}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{(a-b)(b-c)}-\frac{a^3-c^3}{(a-c)(b-c)}=\frac{a^2+ab+b^2}{b-c}-\frac{a^2+ac+c^2}{b-c}$$

$$=\frac{a(b-c)+(b^2-c^2)}{b-c}=a+b+c.$$

उदाहरण 13. यदि $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}=0$;

तो सिद्ध करो कि $a=b=c$.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}=0,$$

अथवा $$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\right\}=0.$$

[सूत्र XXIV, नियम 133]

अब चूँकि बाईं तरफ के पदों में से कोई भी ऋणात्मक पद नहीं है, इसलिए यदि उनमें से प्रत्येक का मूल्य शून्य न हो तो उनका योगफल शून्य नहीं हो सकता।

इसलिए $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$; $\therefore$ $b=c$,

$\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=0$; $\therefore$ $c=a$,

और $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$; $\therefore$ $a=b$.

इसलिए $a=b=c$.

[*इस प्रश्न को इस रूप से हल करने की रीति मेरे बन्धु और प्रिय छात्र बाबू विमलाचरण सोम (हेड एसिस्टेंट, फ़ारेस्ट सर्वे, देहरादून) महाशय की कृपा से प्राप्त हुई।]

प्रश्नमाला 91

सिद्ध करो :

1. $$\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}$$
$$=\frac{3}{x}-\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}-\frac{1}{c+x}.$$ [ब० ए०, 1920.]

2. $$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=3,$$
यदि $yz+zx+xy=1$ हो।

3. $$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+(b+c)(c+a)(a+b),$$
यदि $abc=1$ हो।

4. $$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0,$$ यदि $bc+ca+ab=0$ हो।

5. $$\frac{x+yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{y+zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z+xy}{(z+x)(z+y)}=3,$$
यदि $x+y+z=1$ हो।

6. $$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)},$$
यदि $x+y+z=xyz$ हो।

7. $$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9,$$
यदि $x+y+z=0$ हो।

8. $$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3},$$ यदि
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$ हो।

सिद्ध करो :

9. $$\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=3.$$

10. $$\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}.$$

11. $\dfrac{x^6}{x^2+y^2}=x^4-x^2y^2+y^4-\dfrac{y^6}{x^2+y^2}.$

12. $\dfrac{x^6}{x^2-y^2}=x^4+x^2y^2+y^4+\dfrac{y^6}{x^2-y^2}.$

13. $\dfrac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{x^2y^2z^2}=\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}.$

14. $\dfrac{xy^2z^2+yz^2x^2+zx^2y^2}{x^2y^2z^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}.$

15. $\dfrac{3a-6}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\dfrac{1}{(a-2)(a-3)}+\dfrac{1}{(a-3)(a-1)}+\dfrac{1}{(a-1)(a-2)}.$

16. $\dfrac{3x^2-14}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{x-1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{x-2}{(x+3)(x+1)}+\dfrac{x-3}{(x+1)(x+2)}.$

17. $\dfrac{1-x}{1+x}=1-2x+2x^2-2x^3+\dfrac{2x^4}{1+x}.$

18. $\dfrac{a}{x^2-a^2}=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{a^3}{x^4}+\dfrac{a^5}{x^6}+\dfrac{a^7}{x^6(x^2-a^2)}.$

19. $\dfrac{a^3}{x^3+a^3}=\dfrac{a^3}{x^3}-\dfrac{a^6}{x^6}+\dfrac{a^9}{x^9}-\dfrac{a^{12}}{x^9(x^3+a^3)}$

$$=1-\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^6}{a^6}-\frac{x^9}{a^9}+\frac{x^{12}}{a^9(x^3+a^3)}.$$

20. $\dfrac{x^4-1}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3+\dfrac{a^4-1}{x+a}.$

21. मूल्य निकालो :

$\dfrac{x+2a}{2b-x}+\dfrac{x-2a}{2b+x}+\dfrac{4ab}{x^2-4b^2}$ यदि $x=\dfrac{ab}{a+b}$ हो।

22. सिद्ध करो कि $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}-3=\dfrac{6abc}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$

यदि $x=\dfrac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$ हो।

23. यदि $x=\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{b+2x}{b-2x}+\frac{c+2x}{c-2x}+3=\frac{6abc}{(a-2x)(b-2x)(c-2x)}.$$

24. $\dfrac{x^2-(b+c)x}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{x^2-(c+a)x}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{x^2-(a+b)x}{(x-a)(x-b)}$ का मूल्य निकालो,

यदि $x=\dfrac{3abc}{ab+bc+ca}$ हो।

25. $\dfrac{x^2-y^2+x}{y^2-x^2+y}$ का मूल्य निकालो, यदि $x=\dfrac{a-b}{a+b}$ और $y=\dfrac{a+b}{a-b}$ हो।

[दिया हुआ व्यंजक $=\dfrac{x(x+1)-y^2}{y(y+1)-x^2}=$ आदि।] [क० ए०, 1883.]

26. $\dfrac{x^4+3abx^2-10a^2b^2}{x^4+7abx^2+10a^2b^2}\times\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$ का मूल्य निकालो,

यदि $x^2=a^2+b^2$ हो।

27. मूल्य निकालो :

$$\frac{x^2y^2+3(2x^2-y^2)ab-18a^2b^2}{y^4+9aby^2+18a^2b^2}\times\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$$

यदि $x=a+b$ और $y=a-b$ हो।

28. $\dfrac{x^4+abx^2-2a^2b^2}{x^2y^2+(x^2+2y^2)ab+2a^2b^2}-\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ का मूल्य निकालो,

यदि $x=a+b$ और $y=a-b$ हो।

29. हल करो : $\dfrac{x^9}{x^3+1}+\dfrac{x^6}{x^3-1}+\dfrac{1}{x^3+1}-\dfrac{1}{x^3-1}$.

30. हल करो : $\dfrac{x^2-(a-b)^2}{(x+b)^2-a^2}+\dfrac{a^2-(x-b)^2}{(x+a)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(x-a)^2}{(a+b)^2-x^2}$.

31. हल करो : $\dfrac{(a+2b)^2-b^2}{(a+b)^2-4b^2}+\dfrac{(a-b)^2-4b^2}{(a-2b)^2-b^2}+\dfrac{(2a+3b)^2-b^2}{(2a+b)^2-9b^2}$.

32. हल करो : $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

33. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो :

$$1-\frac{a^2+b^2-c}{2ab}=\frac{2(s-a)(s-b)}{ab}.$$

34. हल करो : $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

35. हल करो : $\dfrac{a+b}{2ab}(a+b-c)+\dfrac{b+c}{2bc}(b+c-a)+\dfrac{c+a}{2ca}(c+a-b)$.

36. हल करो :

$$\frac{x+y}{2xy}(x^2+y^2-z^2)+\frac{y+z}{2yz}(y^2+z^2-x^2)+\frac{z+x}{2zx}(z^2+x^2-y^2).$$

37. हल करो :

$$\frac{a+b}{2ab}(a^3+b^3-c^3)+\frac{b+c}{2bc}(b^3+c^3-a^3)+\frac{c+a}{2ca}(c^3+a^3-b^3).$$

38. यदि $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$ और $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ हो, तो $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$ का मूल्य लघुत्तम पदों में रक्खो ।

39. यदि $p=\frac{a-b}{x-c}$, $q=\frac{b-c}{x-a}$, $r=\frac{c-a}{x-b}$ हो, तो $p+q+r+pqr$ का मूल्य निकालो ।

40. सिद्ध करो : $\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)^2=\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$.

41. सिद्ध करो : $\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}=\frac{1}{1-x}-\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$.

42. हल करो : $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

43. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$. [इला० ए०, 1925.]

44. $\frac{x^2+yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+zx}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2+xy}{(z-x)(z-y)}$.

45. $\frac{2a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{2b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{2c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

46. $\frac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+zx}{(y+z)(y-x)}+\frac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)}$. [क० ए०, 1865.]

47. $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}$.

[क० ए०, 1872.]

48. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

49. $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

50. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

51. $\frac{a^2+ha+k}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^2+hb+k}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c^2+hc+k}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

52. सिद्ध करो : $\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=a+b+c.$

53. सिद्ध करो : $\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca.$

54. सिद्ध करो :

$$\frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

55. सिद्ध करो :

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ac}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{ab}{c(c^2-b^2)(c^2-a^2)}=\frac{1}{abc}.$$

56. हल करो : $\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$.

विविध प्रश्नमाला V

I

1. निम्नलिखित व्यंजकों को वर्गान्तर के रूप में प्रकट करो :

   (i) $(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)$;

   (ii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$.

2. $7(z+x)^3-(x-y)^3-(y+z)^3$ के गुणनखंड निकालो।

3. हल करो : $(a-b)^2(a+b-2c)^2+(b-c)^2(b+c-2a)^2$
$+(c-a)^2(c+a-2b)^2$, जब कि $a+b+c=0$

4. यदि $x+y+z=4xyz$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\frac{x}{1-4x^2}+\frac{y}{1-4y^2}+\frac{z}{1-4z^2}=\frac{16xyz}{(1-4x^2)(1-4y^2)(1-4z^2)}.$$

5. यदि $2s = a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो :

$$1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}.$$

6. सिद्ध करो : $\frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{2ca}$

$$+\frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2ab} = a+b+c.$$

7. मूल्य निकालो : $\frac{qr}{(a-q)(a-r)}+\frac{rp}{(a-r)(a-p)}+\frac{pq}{(a-p)(a-q)}$ का,

यदि $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$ हो।

8. सिद्ध करो कि $(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3$ व्यंजक x^2-y^2, y^2-z^2 और z^2-x^2 में से प्रत्येक द्वारा विभाज्य है।

II

1. यदि $x+y+z=15$, $xy+yz+zx=75$ हो, तो $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का मूल्य निकालो।

2. सिद्ध करो कि $(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$

$$= 3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b).$$

3. सिद्ध करो कि $(b-c)(b+c-2a)^2+(c-a)(c+a-2b)^2$

$$+(a-b)(a+b-2c)^2 = 9(a-b)(b-c)(a-c).$$

4. हल करो : $\frac{1}{bc(b-a)(c-a)}+\frac{1}{ca(c-b)(a-b)}+\frac{1}{ab(a-c)(b-c)}$.

5. मूल्य निकालो : $\frac{y}{x}+\frac{y-1}{x+1}$ का, यदि $x = \frac{b}{a-b}$ और $y = \frac{a}{a+b}$.

6. म० स० अ० निकालो : $ab+2a^2-3b^2-4bc-ac-c^2$ और $9ac+2a^2-5ab+4c^2+8bc-12b^2$ का।

7. ल० स० अ० निकालो :

$6x^3-11x^2+5x-3$ और $9x^3-9x^2+5x-2$ का।

8. गुणनखंड निकालो :

$$(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(c+a)(a+b)+(c-a)(a+b)(b+c).$$

III

1. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$ को x के घातों के अवरोहक्रम से विस्तार करो।

2. सिद्ध करो : $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$, और इसलिए सिद्ध करो कि $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3$
$-(x+y-z)^3=24xyz$.

3. मूल्य निकालो : $a^3-b^3+c^3+3abc$ का, यदि $a=\cdot4278$, $b=1\cdot2345$ और $c=\cdot8067$ हो।

4. सिद्ध करो कि $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$=(a-b)(a-c)(b-c)$.

5. म॰ स॰ अ॰ और ल॰ स॰ अ॰ निकालो : $6x^3-25x^2+23x-6$, $2x^2-7x+3$ और $6x^2-7x+2$ का।

6. म॰ स॰ अ॰ निकालो : $x^5+11x-12$ और x^5+11x^3+54 का।

7. हल करो : $\frac{a^3(b+c)}{(c-a)(b-a)}+\frac{b^3(c+a)}{(a-b)(c-b)}+\frac{c^3(a+b)}{(a-c)(b-c)}$.

8. सिद्ध करो कि $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ यह व्यंजक $b-c$, $c-a$ और $a-b$ इन तीनों में से प्रत्येक के द्वारा पूर्णरूप से विभाज्य है।

IV

1. यदि $a+b=2$ और $ab=7$ हो, तो a^5+b^5 का मूल्य निकालो।

2. $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$ के पांच गुणनखंड निकालो।

3. मूल्य निकालो : $a^3+b^3+c^3-3abc$ का, यदि $a=2658$, $b=2664$ और $c=2678$ हो।

4. यदि $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ और $z=a+b-c$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

5. मूल्य निकालो : $\frac{2x^2+5xy+3y^2}{2x^2+xy-3y^2}$ का, यदि $x=\frac{a}{a+b}$ और $\;=\frac{b}{a-b}$ हो।

6. सिद्ध करो : $8(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$.

7. $x^2-3xy-10y^2$, $x^2+2xy-35y^2$ और $x^2-8xy+15y^2$ का ल० स० अ० निकालो ; और प्राप्त ल० स० अ० को दिये हुए व्यंजकों के म० स० अ० द्वारा भाग करके प्राप्त भजनफल के सरल गुणनखंड निकालो।

8. यदि $x=15$ हो, तो x का मूल्य विना रक्खे हुए $x^5-18x^4+47x^3-31x^2+19x-60$ का मूल्य निकालो।

V

1. यदि $x=\dfrac{a-b}{m-c}$, $y=\dfrac{b-c}{m-a}$ और $z=\dfrac{c-a}{m-b}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x+y+z+xyz=0$.

2. यदि $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{c^3}{d^3}=\dfrac{b^3}{a^3}+\dfrac{d^3}{c^3}$.

3. मूल्य निकालो : $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-a-b)^2}$ का, यदि $x=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ हो।

4. यदि $x=\dfrac{2ac}{a+c}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\dfrac{(x-a)^2+(x-c)^2}{a^2+c^2}+\dfrac{4ac}{(a+c)^2}$ का मूल्य a व c के किसी मूल्य के लिए सदा एक ही होगा।

5. गुणनखंड निकालो :
   (i) $6a^4+43a^3b-56a^2b^2+43ab^3+6b^4$;
   (ii) $12x^4-37x^3+45x^2-37x+12$;
   (iii) $abx^4+(ac+b^2)x^3+(2ab+bc)x^2+(ac+b^2)x+ab$.

6. सिद्ध करो : $(x+y)^3-(y+z)^3+(z-x)^3=3(x+y)(y+z)(x-z)$.

7. म० स० अ० निकालो :
   (i) $x^3-(a+p)x^2+(q+ap)x-aq$ और $x^3+ax^2-3a^2x+a^3$ का ;
   (ii) $x^3-y^3-z^3-3xyz$ और $x^2-2xy+y^2-2xz+2yz+z^2$ का।

8. x-वाले किसी अकरणीगत मूल व्यंजक में x के बदले 'a' रखने पर यदि उसका मूल्य शून्य हो तो सिद्ध करो कि $(x-a)$ उस व्यंजक का एक गुणनखंड होगा।

VI

1. सिद्ध करो :
$$(a^2-a+1)(b-c)+(b^2-b+1)(c-a)+(c^2-c+1)(a-b)$$
$$=(a^2-a+1)(b^2-c^2)+(b^2-b+1)(c^2-a^2)+(c^2-c+1)(a^2-b^2).$$

2. सिद्ध करो कि $\frac{ab}{(x-a)(x-b)}+\frac{bc}{(x-b)(x-c)}+\frac{ca}{(x-c)(x-a)}=0,$

यदि $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ हो।

3. सिद्ध करो कि $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$, यदि $a+b+c=0$ हो।

4. $(x^2+y^2+z^2+2xy)^2-2(x+y)^2z^2$ का दो वर्गों के योगफल के रूप में प्रकट करो।

5. हल कर :

$$\left\{\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right\}\cdot\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}+(x+y+z)^2.$$

6. म० स० अ० निकालो :

(i) $x^3+(5m-3)x^2+3m(2m-5)x-18m^2$ और

$x^3+(m-3)x^2-m(2m+3)x+6m^2$ का ;

(ii) $10x^3-54x^2+87x-45$ और $5x^4-36x^3+87x^2-90x+54$ का।

7. म० स० अ० और ल० स० अ० निकालो :

$2x^4+x^3-9x^2+8x-2$ और $2x^4-7x^3+11x^2-8x+2$ का।

8. वास्तविक भाग न करके सिद्ध कर कि $x^{55}-y^{55}$, $x-y$ द्वारा विभाज्य है, और उसको $x+y$ द्वारा भाग करने पर शेषफल $-2y^{55}$ होगा।

VII

1. $1+x+y$, $1-x+y$, $1+x-y$ और $x+y-1$ के लगातार गुणनफल को $1+2xy-x^2-y^2$ द्वारा भाग करो।

2. हल करो : $\frac{bc(x-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab(x-c)}{(c-a)(c-b)}.$

[कलकत्ता प्रवेशिका, 1896.]

3. सिद्ध करो : $2\{(b+c-2a)^4+(c+a-2b)^4+(a+b-2c)^4\}$

$=\{(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2+(a+b-2c)^2\}^2.$

4. निम्नलिखित व्यंजकों को लघुत्तम पदों में लिखो :

(i) $\frac{\frac{a^2}{a^2+b^2}}{\frac{}{a+b}-b}+\frac{b^2}{\frac{a^2+b^2}{a+b}-a}$; (ii) $\frac{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}+\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}+\frac{1+x}{1-x}}.$

5. $41x^2-60xy+104y^2$ को $(px+qy)^2+4(qx-py)^2$ इस रूप में प्रकट करो और बतलाओ कि ऐसा करने से p और q का मूल्य क्या होगा।

6. म० स० अ० और ल० स० अ० निकालो :

$6x^3-17x^2+11x-2$ और $12x^3-4x^2-3x+1$ का।

7. सिद्ध करो कि $m-n$, $(a+b)(m^2+n^2)+am(n-3m)+bn(m-3n)$ व्यंजक का एक गुणनखंड है।

a का मूल्य कितना हो कि x^3+5x+a, $x-3$ द्वारा विभाज्य हो ?

8. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो तो सिद्ध करो कि $3^{2n+1}+2^{2n+1}$ के मूल्य की इकाई के स्थान पर 5 है। [मद्रास, 1868.]

VIII

1. सिद्ध करो : $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)$
$+(c-a)(x-c)(x-a)=(a-b)(b-c)(a-c).$

2. सिद्ध करो : $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2$
$=27a^2b^2(a+b)^2$. [मद्रास, 1883]

3. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि $16s(s-a)(s-b)(s-c)$
$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$. [क० ए०, 1867.]

4. गुणनखंड निकालो :

$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2-(a+b)^2(c-d)^2-(a-b)^2(c+d)^2$
[मद्रास, 1876.]

5. हल करो : $\dfrac{(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3}{(y+z)(y-z)^3+(z+x)(z-x)^3+(x+y)(x-y)^3}$.
[म० म०, 1892 ; ब० म०, 1888.]

6. हल करो : $\dfrac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2+zx}{(y+z)(y-x)}+\dfrac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)}$.

7. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो सिद्ध करो कि $2^{4n}-1$, 15 द्वारा विभाज्य है। [मद्रास, 1875.]

8. x^4+2x^2+1, $x^6+x^4-x^2-1$ और x^4-1 का म० स० अ० और ल० स० अ० निकालो। [क० ए०, 1869.]

छब्बीसवाँ अध्याय

सरल समीकरण और प्रश्न

(Simple Equations and Problems)

I. सरल समीकरण (Simple Equations)

172. आसान "सरल समीकरण" हल करने की रीति पाँचवें और सत्रहवें अध्यायों में बतलाई गई है। इस अध्याय में उस पर और पूर्णरूप से विचार किया जायगा।

173. जैसा प्रयोजन हो, पदों को समूहों में इकट्ठा लिखकर और तरफ बदलकर समीकरण को हल करना :

निम्नलिखित उदाहरण दृष्टान्तरूप में दिये जाते हैं :

उदाहरण 1. हल करो : $4(x+1)^2+9(x+2)^2=13(x+3)^2$.

दोनों तरफों को सरल करके

$$4(x^2+2x+1)+9(x^2+4x+4)=13(x^2+6x+9),$$

अथवा $13x^2+44x+40=13x^2+78x+117$;

अथवा $13x^2+44x-13x^2-78x=117-40$, [तरफ बदल कर]

अर्थात् $-34x=77$; $\therefore\ x=-\frac{77}{34}=-2\frac{9}{34}$.

उदाहरण 2. हल करो : $(x-2)^3+(x-6)^3+(x-10)^3$

$$=3(x-2)(x-6)(x-10).$$

अब, तरफ बदल करके

$$(x-2)^3+(x-6)^3+(x-10)^3-3(x-2)(x-6)(x-10)=0\ ;$$

अथवा $\frac{1}{2}\{(x-2)+(x-6)+(x-10)\}[\{(x-6)-(x-10)\}^2$

$$+\{(x-10)-(x-2)\}^2+\{(x-2)-(x-6)\}^2]=0\ ;$$

[बायीं तरफ के नियम 134 द्वारा गुणनखंड निकालकर]

अथवा $\frac{1}{2}(3x-18)\{(10-6)^2+(-10+2)^2+(-2+6)^2\}=0$;

अथवा $\frac{1}{2}(3x-18).96=0$; $\therefore\ 3x-18=0$; अथवा $x=6$.

174. भिन्नवाले समीकरण :

उदाहरण 3. हल करो : $\dfrac{7x-11}{6}=\dfrac{31x-41}{24}-\dfrac{7x^2-4}{56x-47}.$

अब तरफ बदलने पर $$\frac{7x^2-4}{56x-47}=\frac{31x-41}{24}-\frac{7x-11}{6}$$
$$=\frac{(31x-41)-(28x-44)}{24}=\frac{3(x+1)}{24}=\frac{x+1}{8}.$$

दोनों पक्षों को $8(56x-47)$ से गुणा करके
$$8(7x^2-4)=(x+1)(56x-47),$$
अथवा $56x^2-32=56x^2+9x-47$; $\therefore$ $-32=9x-47.$

इसलिए $9x=-32+47=15$; $\therefore$ $x=\frac{15}{9}=1\frac{2}{3}.$

उदाहरण 4. हल करो : $\dfrac{25-\frac{1}{3}x}{x+1}+\dfrac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}=\dfrac{23}{x+1}+5.$

तरफ बदलने पर
$$\frac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}-5=\frac{23}{x+1}-\frac{25-\frac{1}{3}x}{x+1},\quad \text{अथवा}\quad \frac{x-5\frac{4}{5}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}x-2}{x+1}.$$
इसलिए $(x-5\frac{4}{5})(x+1)=(\frac{1}{3}x-2)(3x+2),$

अथवा $x^2-(4\frac{4}{5})x-5\frac{4}{5}=x^2-(5\frac{1}{3})x-4.$

इसलिए $(5\frac{1}{3}-4\frac{4}{5})x=5\frac{4}{5}-4,$

अथवा $\frac{8}{15}x=1\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$; $\therefore$ $x=\frac{9}{5}\times\frac{15}{8}=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}.$

उदाहरण 5. हल करो : $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{x-6}=\dfrac{8}{x+3}.$

चूँकि $$\frac{8}{x+3}=\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+3}.$$

इसलिए $$\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+3}.$$

इसलिए तरफ बदलने पर $$\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+3}=\frac{5}{x+3}-\frac{5}{x-6},$$

अथवा $$\frac{15}{(x-2)(x+3)}=\frac{-45}{(x+3)(x-6)}.$$

दोनों पक्षों को $x+3$ द्वारा गुणा और 15 द्वारा भाग करने पर
$$\frac{1}{x-2}=\frac{-3}{x-6}.$$
इसलिए $x-6=-3(x-2)$; $\therefore$ $4x=12$, अथवा $x=3$.

उदाहरण 6. हल करो: $\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{7}{x+1}$.

अब $$\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{4}{x+1}+\frac{3}{x+1}.$$

इसलिए $$\left\{\frac{8}{2x-1}-\frac{4}{x+1}\right\}+\left\{\frac{9}{3x-1}-\frac{3}{x+1}\right\}=0\text{ ; [तरफ बदलने पर]}$$

अथवा $$\frac{12}{(2x-1)(x+1)}+\frac{12}{(3x-1)(x+1)}=0.$$

इसलिए $$\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3x-1}=0.$$

दोनों पक्षों को $(2x-1)(3x-1)$ द्वारा गुणा करने पर

$$(3x-1)+(2x-1)=0.$$

$$\therefore\quad 5x=2,\quad \text{अथवा}\quad x=\tfrac{2}{5}.$$

उदाहरण 7. हल करो: $\frac{a-c}{2b+x}+\frac{b-c}{2a+x}=\frac{a+b-2c}{a+b+x}$.

अब $$\frac{a-c}{2b+x}+\frac{b-c}{2a+x}=\frac{(a-c)+(b-c)}{a+b+x}=\frac{a-c}{a+b+x}+\frac{b-c}{a+b+x}.$$

इसलिए तरफ बदलने पर

$$(a-c)\left\{\frac{1}{2b+x}-\frac{1}{a+b+x}\right\}=(b-c)\left\{\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{2a+x}\right\},$$

अथवा $$(a-c)\cdot\frac{a-b}{(2b+x)(a+b+x)}=(b-c)\cdot\frac{a-b}{(a+b+x)(2a+x)}.$$

इसलिए $$\frac{a-c}{2b+x}=\frac{b-c}{2a+x};$$

$$\therefore\quad (a-c)(2a+x)=(b-c)(2b+x);$$

$$\therefore\quad x\{(a-c)-(b-c)\}=2b(b-c)-2a(a-c),$$

अथवा $$x(a-b)=2(b^2-a^2)-2c(b-a)$$
$$=2(b-a)(b+a-c)$$
$$=2(a-b)(c-a-b);$$

$$\therefore\quad x=2(c-a-b).$$

प्रश्नमाला 92

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $3(x+1)^2+4(x+3)^2=7(x+2)^2$.

2. $(x-a)(x-b)=(x-a-b)^2$.

3. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.

4. $(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2=(x-2a)^2+(x-2b)^2+(x-2c)^2$.

5. $\frac{98x-73}{21}=\frac{14x-9}{3}-\frac{13x-16}{15x-9}$.

6. $\frac{95x-159}{35}=\frac{19x-29}{7}-\frac{17x-47}{23x-59}$.

7. $\frac{91x-21}{56}+\frac{24x-93}{35x-138}=\frac{13x+9}{8}$.

8. $\frac{117x-26}{135}+\frac{16x-77}{23x-110}=\frac{13x+4}{15}+\frac{3\frac{4}{5}}{27}$.

9. $\frac{6x-7\frac{1}{3}}{3-2x}+2x+\frac{1+16x}{24}=4\frac{5}{12}-\frac{12\frac{5}{8}-8x}{3}$.

10. $\frac{2x+8\frac{1}{3}}{9}-\frac{13x-2}{17x-32}+\frac{x}{3}=\frac{7x}{12}-\frac{x+16}{36}$.

11. $\frac{41-35x}{105}-\frac{7-2x^2}{14(x-1)}=\frac{1+3x}{21}-\frac{2x-2\frac{1}{5}}{6}$.

12. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+7}=\frac{1}{7(x-1)}$.

13. $\frac{2}{5(3x+4)}+\frac{4}{2x+3}=\frac{6}{3x+4}$.

14. $\frac{3}{3x-5}-\frac{6}{7(4x-7)}=\frac{7}{9(3x-5)}+\frac{2}{4x-7}$.

15. $\frac{11}{12(14x-19)}+\frac{7}{9(13x-14)}=\frac{3}{14x-19}-\frac{2}{13x-14}$.

16. $\frac{50}{3x-1}+\frac{37-\frac{1}{3}x}{12x-1}=\frac{35}{12x-1}+\frac{49-\frac{1}{12}x}{3x-1}$.

17. $\frac{(1\frac{3}{7})x+19\frac{13}{17}}{2x+5}-\frac{\frac{7}{9}x+8}{x+8}=\frac{20\frac{13}{17}-(1\frac{4}{7})x}{2x+5}+\frac{(1\frac{4}{5})x-9}{2(x+8)}$.

B—23

18. $\dfrac{(9\frac{12}{35})x-32}{4x+7}+\dfrac{65x+4\frac{14}{33}}{8x+29}=\dfrac{75x+5\frac{14}{33}}{6x+29}+\dfrac{(4\frac{12}{35})x-29}{4x+7}.$

19. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{x-3}.$

20. $\dfrac{3}{4x+1}+\dfrac{4}{4x+5}=\dfrac{7}{4x+3}.$

21. $\dfrac{15}{3x+11}-\dfrac{8}{3x+17}=\dfrac{7}{3x+5}.$

22. $\dfrac{6}{5x+7}-\dfrac{4}{5x+13}=\dfrac{9}{5x+13}-\dfrac{7}{5x+19}.$

23. $\dfrac{8}{2x+17}-\dfrac{12}{2x+25}=\dfrac{5}{2x+25}-\dfrac{9}{2x+33}.$

24. $\dfrac{5}{3-4x}+\dfrac{9}{4x+13}-\dfrac{4}{4x+5}=0.$

25. $\dfrac{6}{5-6x}+\dfrac{13}{6x+19}=\dfrac{7}{6x+7}.$

26. $\dfrac{9}{3-7x}+\dfrac{1}{7x+15}=\dfrac{8}{12-7x}.$

27. $\dfrac{10}{2x-5}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{18}{3x-5}.$

28. $\dfrac{9}{3x-4}+\dfrac{20}{4x+1}=\dfrac{8}{x+7}.$

29. $\dfrac{12}{3x-8}=\dfrac{20}{4x-13}-\dfrac{1}{x+9}.$

30. $\dfrac{a+b}{x-c}=\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}.$

31. $\dfrac{a^2}{ax-b}+\dfrac{b^2}{bx-a}=\dfrac{a+b}{x+c}.$

32. $\dfrac{m(x+a)}{x+b}+\dfrac{n(x+b)}{x+a}=m+n.$

33. $\dfrac{b-c}{x+a}+\dfrac{a-b}{x+b}=\dfrac{a-c}{x+c}.$

34. $\dfrac{2a-3b}{x-a+b}-\dfrac{2b-3a}{x+a-b}=\dfrac{5(a-b)}{x+a+b}.$

35. $\dfrac{1}{x-6a}+\dfrac{2}{x+3a}+\dfrac{3}{x-2a}=\dfrac{6}{x-a}.$

175. भिन्नवाले समीकरणों में प्रत्येक पद के अंश को उसके हर द्वारा भाग करने से बहुत आसानी से समीकरण हल किये जा सकते हैं।

उदाहरण 1. हल करो : $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{22x+30}{11x-18}.$

अब $\dfrac{(x-1)+2}{x-1}+\dfrac{(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{2(11x-18)+66}{11x-18},$

अथवा $\left\{1+\dfrac{2}{x-1}\right\}+\left\{1+\dfrac{4}{x-2}\right\}=2+\dfrac{66}{11x-18},$

अथवा $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{66}{11x-18}.$

इसलिए तरफ बदल के $\frac{2}{x-1}-\frac{22}{11x-18}=\frac{44}{11x-18}-\frac{4}{x-2}$,

अथवा $\frac{-14}{(x-1)(11x-18)}=\frac{-16}{(11x-18)(x-2)}$,

$\therefore \quad \frac{7}{x-1}=\frac{8}{x-2}$,

अथवा $7x-14=8x-8$; $\therefore \quad x=-6$.

उदाहरण 2. हल करो : $\frac{4x^2+7}{2x-1}+\frac{6x^2-8x+11}{3x-1}=\frac{4x^2+3x+6}{x+1}$.

अब $\frac{(4x^2-1)+8}{2x-1}+\frac{2x(3x-1)-2(3x-1)+9}{3x-1}$

$=\frac{4x(x+1)-(x+1)+7}{x+1}$,

अथवा $\left\{2x+1+\frac{8}{2x-1}\right\}+\left\{2x-2+\frac{9}{3x-1}\right\}=4x-1+\frac{7}{x+1}$.

इसलिए $\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{7}{x+1}$.

इसके आखिरी हिस्से के लिए विद्यार्थी 174 वें नियम में दिया हुआ उदाहरण 6 देखें।

उदाहरण 3. हल करो : $\frac{7x-55}{x-8}+\frac{2x-17}{x-9}=\frac{6x-71}{x-12}+\frac{3x-14}{x-5}$.

अब $\frac{7(x-8)+1}{x-8}+\frac{2(x-9)+1}{x-9}=\frac{6(x-12)+1}{x-12}+\frac{3(x-5)+1}{x-5}$,

अथवा $\left\{7+\frac{1}{x-8}\right\}+\left\{2+\frac{1}{x-9}\right\}=\left\{6+\frac{1}{x-12}\right\}+\left\{3+\frac{1}{x-5}\right\}$;

$\therefore \quad \frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-12}+\frac{1}{x-5}$.

इसलिए पक्षान्तर-द्वारा $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-12}-\frac{1}{x-9}$,

अथवा $\frac{3}{(x-8)(x-5)}=\frac{3}{(x-12)(x-9)}$;

$\therefore \quad (x-8)(x-5)=(x-12)(x-9)$,

अथवा $x^2-13x+40=x^2-21x+108$;

$\therefore \quad 8x=68$, अथवा $x=8\frac{1}{2}$.

प्रश्नमाला 93

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{3x-4}{x-2}=\frac{5x-12}{x-3}$.

2. $\frac{2x+7}{x+2}+\frac{4x+29}{x+6}-\frac{6x-10}{x-3}=0$.

3. $\frac{25x-40}{5x-6}-\frac{7x+9}{x+2}+\frac{6x-1}{3x+4}=0$.

4. $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{2+\frac{x}{2}}}=\frac{7}{3}$.

5. $8+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\frac{6}{x+2}}}=\frac{214}{25}$.

[नियम 168 का उदाहरण 3 देखो]

6. $2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{2x+7}{2+x}$.

7. $\frac{15x-7}{5x-4}+\frac{4x+3}{4x-3}=\frac{8x+1}{2x-1}$.

8. $\frac{4x-7}{4x+5}+\frac{15x+11}{5x+7}=\frac{12x+1}{3x+4}$.

9. $\frac{4x^3+4x^2+8x+1}{2x^2+2x+3}=\frac{2x^2+2x+1}{x+1}$.

10. $\frac{12x^3+16x^2+29x-1}{3x^2+4x+8}=\frac{4x^2+20x-1}{x+5}$.

11. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2-2x+1}{x-2}=2x+\frac{2}{x-3}$.

12. $\frac{x^2+3}{x-1}+\frac{x^2-x+1}{x-2}=\frac{2x^2-4x+1}{x-3}$.

13. $\frac{2x^2-3x+7}{2x-1}+\frac{6x^2+2x+21}{3x+1}=\frac{3x^2+8x+7}{x+3}$.

14. $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$.

15. $\frac{2x-3}{x-2}+\frac{3x-20}{x-7}=\frac{x-3}{x-4}+\frac{4x-19}{x-5}$.

16. $\frac{3x-8}{x-3}+\frac{4x-35}{x-9}=\frac{2x-9}{x-5}+\frac{5x-34}{x-7}$.

17. $\frac{3x-13}{x-4}+\frac{4x-41}{x-10}=\frac{2x-13}{x-6}+\frac{5x-41}{x-8}$.

18. $\frac{4x+21}{x+5}+\frac{5x-69}{x-14}=\frac{3x-5}{x-2}+\frac{6x-41}{x-7}.$

19. $\frac{5-6x}{3x-1}+\frac{2x+7}{x+3}=\frac{31-12x}{3x-7}+\frac{4x+21}{x+5}.$

20. $\frac{x^2+3x+3}{x+2}+\frac{x^2-15}{x-4}=\frac{x^2+7x+11}{x+5}+\frac{x^2-4x-20}{x-7}.$

21. $\frac{2x+11}{x+5}-\frac{9x-9}{3x-4}=\frac{4x+13}{x+3}-\frac{15x-47}{3x-10}.$ [क० ए०, 1860.]

22. $\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-4}{x-5}.$ [क० ए०, 1887.]

176. विविध प्रश्नमाला :

उदाहरण 1. हल करो : $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$

अब तरफ बदलने पर

$$\frac{ab}{a+b}\left\{3c+\frac{ab}{(a+b)^2}\right\}=x\left\{3c+\frac{b}{a}-\frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{b}{a}\left[1-\frac{(2a+b)b}{(a+b)^2}\right]\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{ab}{(a+b)^2}\right\}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{ab}{a+b}.$$

उदाहरण 2. हल करो : $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{ax+b}{px+q}.$

अब $\frac{x(ax+b)+c}{x(px+q)+r}=\frac{ax+b}{px+q}.$

फ़र्ज़ करो कि $m=ax+b$ व $n=px+q$ है।

इसलिए $\frac{mx+c}{nx+r}=\frac{m}{n}$:

$\therefore\quad mnx+cn=mnx+rm\,;\quad\therefore\quad cn=rm,$

अथवा $c(px+q)=r(ax+b)\,;\quad\therefore\quad x(cp-ar)=br-cq\,;$

$$\therefore\quad x=\frac{br-cq}{cp-ar}.$$

उदाहरण 3. हल करो : $(x-2a)^3+(x-2b)^3=2(x-a-b)^3$.

अब तरफ बदलने पर

$$(x-2a)^3-(x-a-b)^3=(x-a-b)^3-(x-2b)^3.$$

अब फर्ज़ करो कि $X=x-2a$, $Y=x-2b$ और $Z=x-a-b$ है

$$\therefore \quad X^3-Z^3=Z^3-Y^3,$$

अथवा $\quad (X-Z)(X^2+XZ+Z^2)=(Z-Y)(Z^2+ZY+Y^2).$

किन्तु $\quad X-Z=Z-Y$; क्योंकि ये दोनों $=b-a$;

$$\therefore \quad X^2+XZ+Z^2=Z^2+ZY+Y^2.$$

इसलिए तरफ बदलने पर $X^2-Y^2=Z(Y-X)$.

साधारण गुणनखंड $X-Y$ को, जो कि $2b-2a$ के बराबर है, हटा कर

$$X+Y=-Z,$$

अर्थात् $\quad (x-2a)+(x-2b)=-(x-a-b).$

इसलिए $\quad 3x=3(a+b)$; $\quad \therefore x=a+b.$

उदाहरण 4. हल करो : $\dfrac{x+a}{x+b}=\left(\dfrac{2x+a+c}{2x+b+c}\right)^2$.

चूंकि $\quad \dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{(x+b)+(a-b)}{x+b}=1+\dfrac{a-b}{x+b},$

और $\quad \dfrac{2x+a+c}{2x+b+c}=\dfrac{(2x+b+c)+(a-b)}{2x+b+c}=1+\dfrac{a-b}{2x+b+c}.$

इसलिए $\quad 1+\dfrac{a-b}{x+b}=\left\{1+\dfrac{a-b}{2x+b+c}\right\}^2$

$$=1+\frac{2(a-b)}{2x+b+c}+\frac{(a-b)^2}{(2x+b+c)^2}.$$

इसलिए तरफ बदल कर और $a-b$ से भाग देने पर

$$\frac{1}{x+b}-\frac{2}{2x+b+c}=\frac{a-b}{(2x+b+c)^2},$$

अथवा $\quad \dfrac{c-b}{(x+b)(2x+b+c)}=\dfrac{a-b}{(2x+b+c)^2};$

$$\therefore \quad \frac{c-b}{x+b}=\frac{a-b}{2x+b+c};$$

$$\therefore \quad 2x(c-b)+(c^2-b^2)=x(a-b)+b(a-b);$$

$$\therefore \quad x(a+b-2c)=c^2-ab;$$

$$\therefore \quad x=\frac{c^2-ab}{a+b-2c}.$$

उदाहरण 5. हल करो :

$$\frac{4x}{3}-\frac{125x^2-5}{(5x-1)(x+5)}=5x-\frac{5}{3}\cdot\frac{3x^2-1}{x+5}-\frac{95-4x}{3}.$$

चूँकि $\quad \dfrac{125x^2-5}{(5x-1)(x+5)}=\dfrac{5(25x^2-1)}{(5x-1)(x+5)}=\dfrac{5(5x+1)}{x+5},$

और $\quad \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3x^2-1}{x+5}=\dfrac{\frac{5}{3}(3x^2-1)}{x+5}=\dfrac{5x^2-\frac{5}{3}}{x+5};$

इसलिए $\quad \dfrac{4x}{3}-\dfrac{5(5x+1)}{x+5}=5x-\dfrac{5x^2-\frac{5}{3}}{x+5}-\dfrac{95}{3}+\dfrac{4x}{3}.$

अब तरफ बदल कर और 5 द्वारा भाग देने पर

$$\frac{x^2-\frac{1}{3}-(5x+1)}{x+5}=x-6\tfrac{1}{3}.$$

इसलिए $\quad x^2-5x-1\tfrac{1}{3}=x^2-(1\tfrac{1}{3})x-31\tfrac{2}{3};$

$$\therefore \quad (3\tfrac{2}{3})x=30\tfrac{1}{3}; \qquad \therefore \quad x=\tfrac{91}{11}=8\tfrac{3}{11}.$$

प्रश्नमाला 94

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $\dfrac{2x}{x-4}+\dfrac{7x-3}{x+1}=9.$

2. $\dfrac{x+4a+b}{x+a+b}+\dfrac{4x+a+2b}{x+a-b}=5.$

3. $\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{4x+8}{3x+3}+\dfrac{10x+1}{6x+3}.$

4. $\dfrac{6x+8}{2x+1}-\dfrac{2x+38}{x+12}=1.$

5. $\dfrac{x+18}{x-2}-\dfrac{27-3x}{3x-19}=2.$

6. $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{2(a-b)}{x-(a+b)}.$

7. $\dfrac{x+2a}{2b-x}+\dfrac{x-2a}{2b+x}+\dfrac{4ab}{x^2-4b^2}=0.$

8. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\dfrac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}.$

9. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{2x}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}=14-\dfrac{60+4x}{x+3}.$

10. $\dfrac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\dfrac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}.$

11. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-9}{x-7}=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-8}{x-6}.$

12. $\dfrac{1}{(x+a)^2-b^2}+\dfrac{1}{(x+b)^2-a^2}=\dfrac{1}{x^2-(a+b)^2}+\dfrac{1}{x^2-(a-b)^2}.$

13. $\dfrac{3x^2+5x+8}{5x^2+6x+12}=\dfrac{3x+5}{5x+6}.$ 14. $\dfrac{58x^2+87x+7}{87x^2+145x+11}=\dfrac{2x+3}{3x+5}.$

15. $\dfrac{a^2(a-2b)}{b(a-b)^2}\cdot x+\dfrac{2abc}{(a-b)}-\dfrac{ax}{b}=2cx-\dfrac{a^2b^2}{(a-b)^3}.$

16. $(x-23)^3+(x-27)^3=2(x-25)^3.$

17. $\dfrac{4x-17}{9}-\dfrac{3\frac{2}{3}-22x}{33}=x-\dfrac{6}{x}\left(1-\dfrac{x^2}{54}\right).$

18. $\left(\dfrac{x-2a}{x+2b}\right)^2=\dfrac{x-2a-2b}{x+2a+2b}.$ 19. $\dfrac{x+19}{x+10}=\left(\dfrac{2x+33}{2x+24}\right)^2.$

20. $\left(\dfrac{x-a}{x+b}\right)^3=\dfrac{x-2a-b}{x+a+2b}.$

177. किसी सरल समीकरण का एक से अधिक मूल नहीं हो सकता। समीकरण के पदों में से अनजानी राशिवाले पदों को समता-चिह्न की बाईं तरफ और अन्य पदों को समता-चिह्न की दाईं तरफ बदलके लाने पर सब समीकरणों को $ax=b$ के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

इसलिए $\dfrac{b}{a}$ के अतिरिक्त और किसी मूल्य-द्वारा समीकरण की समता सिद्ध न होगी। इसलिए सरल समीकरण का एक से अधिक मूल रहना सम्भव नहीं है।

अथवा यदि सम्भव हो, तो मान लो कि $ax=b$ समीकरण के α व β ये दोनों मूल्य हैं। तो अवश्य

$$\left.\begin{array}{r} a\alpha=b \\ \text{और } a\beta=b \end{array}\right\}$$

इसलिए घटाने पर $a(\alpha-\beta)=0.$

किन्तु यह असम्भव है : कारण a एक निश्चित संख्या है, और (फ़र्ज़िया भी) α व β एक दूसरे से भिन्न हैं, इसलिए $\alpha - \beta$ का मूल्य शून्य नहीं है।

इसलिए सरल समीकरणों का एक से अधिक मूल रहना असम्भव है।

178. सरल समीकरण हल करने के दो व्यतिक्रम (Exceptions) :

(1) यदि कोई सरल समीकरण पदान्तर और सरलीकरण के बाद $0 \times x = 0$, अर्थात् $0 = 0$ का रूप धारण करे तो स्पष्ट है कि अनजानी राशि का कोई भी मूल्य प्रयोग करने पर समीकरण की समता सिद्ध रहेगी। इसलिए ऐसी अवस्था में समीकरण के अनजाने पद के अनन्त मूल्य हो सकते हैं। वस्तुतः इनको तादात्म्य (Identity) कहते हैं।

उदाहरण। $x + 2 = \frac{x}{2} + \frac{x+4}{2}$ समीकरण में तरफ बदलने से प्राप्त होता है $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})x = \frac{4}{2} - 2$, अर्थात् $0 \times x = 0$; अथवा $0 = 0$.

इसलिए यह समीकरण एक तादात्म्य है, और इस कारण x के किसी भी मूल्य के लिए इसकी समता सिद्ध रहेगी।

(2) $\left(\frac{x+5}{3}\right) = \frac{x+4}{2} - \frac{x-4}{6}$ समीकरण में तरफ बदलने से व सरलीकरण द्वारा प्राप्त होता है $(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6})x = \frac{4}{2} + \frac{4}{6} - \frac{5}{3}$,

अथवा $0 \times x = 1$,

अथवा $0 = 1$.

यह रूप सर्वथा असम्भव है। इसलिए दिये हुए समीकरण में अनजानी राशि के किसी भी मूल्य के लिए समीकरण की समता सिद्ध नहीं हो सकती। अर्थात् इस समीकरण का कोई मूल नहीं है।

साधारण रूप से "यदि $b = 0$ न हो तो किसी समीकरण को $0 \times x = b$ के रूप में लिखने पर इस समीकरण का कोई अर्थ नहीं हो सकता और इस कारण अनजाने पद का कोई मूल नहीं हो सकता।"

II. सरल समीकरण और प्रश्नावली

179. सरल समीकरण-सम्बन्धी प्रश्न हल करने के साधारण नियम सत्रहवें अध्याय में बतलाये गये हैं। अब इस प्रकार के कठिन प्रश्नों पर विचार किया जायगा।

निम्नलिखित उदाहरण दृष्टान्तरूप में दिये गये हैं।

उदाहरण 1. 1 व 2 बजे के अन्दर ठीक किस समय घड़ी की दो सूइयाँ एक मिनट की दूरी पर रहेंगी ?

फ़ज़ करो कि एक बज के x मिनट पर घड़ी की सूइयां इस दूरी पर हैं।

इसलिए पूछे हुए समय पर मिनट की सूई 12 की संख्या से x मिनट की दूरी पर है। अब चूँकि मिनट की सूई घंटे की सूई से बारहगुना तेज़ चलती है, इसलिए मिनट की सूई जिस समय x-मिनट सूचित करनेवाले स्थान से गुज़रती है ; उस समय घंटे की सूई एक मिनट सूचित करनेवाली दूरी के $\frac{x}{12}$ से गुज़रती है। इसलिए पूछे हुए समय पर घंटे की सूई 12 की संख्या से $\left(5+\frac{x}{12}\right)$ मिनट की दूरी पर है।

अब चूँकि दी हुई शर्त के अनुसार पूछे हुए समय पर दोनों सूइयां में एक मिनट का अन्तर है ;

$$\text{इसलिए} \qquad x=\left(5+\frac{x}{12}\right)\pm 1.$$

यदि मिनट की सूई घंटे की सूई के आगे हो तो ऊपर दिये हुए द्वि-अर्थक चिह्न में से '+' चिह्न और यदि पीछे हो तो '−' चिह्न लेना होगा।

$$\therefore \quad \tfrac{11}{12}x=5\pm1=6, \text{ अथवा } 4\,;$$

$$\therefore \quad x=\tfrac{72}{11}=6\tfrac{6}{11}, \text{ अथवा } \tfrac{48}{11}=4\tfrac{4}{11}.$$

इसलिए 1 बजकर $4\frac{4}{11}$ मिनट के समय अथवा $6\frac{6}{11}$ मिनट के समय घड़ी की दो सूइयाँ एक मिनट की दूरी पर होंगी।

उदाहरण 2. दो स्थान P व Q परस्पर $3\frac{1}{2}$ मील की दूरी पर हैं। A व B दो मनुष्यों में से पहला गाड़ी पर सवार होकर घंटे में 6 मील की चाल से, और B पैदल घंटे में 3 मील की चाल से Q की ओर चलता है। Q पर पहुँचने के बाद यदि A वहाँ पर 15 मिनट आराम करके फिर गाड़ी पर P की ओर चले तो उसकी वहाँ पर B से भेंट होगी ?

[कलकत्ता, 1882.]

फ़र्ज़ करो कि जहाँ पर A व B मिलते हैं वह स्थान P से x मील की दूरी पर है। तो B जिस अवधि में x मील चलता है, उतनी अवधि में A, Q तक चल कर, वहां 15 मिनट आराम करने के बाद फिर ($3\frac{1}{2}-x$ मील) चलता है। स्पष्ट है कि A को ऐसा करने में $\left(\frac{3\frac{1}{2}}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3\frac{1}{2}-x}{6}\right)$ घंटे लगते हैं ; और B को x मील चलने में $\frac{x}{3}$ घंटे लगते हैं।

$$\therefore \quad \frac{3\frac{1}{3}}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3\frac{1}{3}-x}{6}=\frac{x}{3};$$

अथवा $7+3+(7-2x)=4x;$

$$\therefore \quad 6x=17; \quad \therefore \; x=2\tfrac{5}{6}.$$

इसलिए P से $2\frac{5}{6}$ मील की दूरी पर B और A की भेंट होगी।

उदाहरण 3. एक ज़मीन्दार एक खेत को नक़द 10 पा० व कुछ अनाज पर उठा देता है। जब अनाज प्रति बुशेल 10 शि० के भाव से बिकता था, तब ज़मीन्दार को फ़ी एकड़ 10 शि० आमदनी होती थी, परन्तु यदि अनाज का भाव प्रति बुशेल 13 शि० 6 पैं० होता, तो ज़मीन्दार को फ़ी एकड़ 13 शि० आमदनी होती। तो कितने बुशेल अनाज लगान में शामिल हैं ?

फ़र्ज़ करो कि वह x बुशेल अनाज लगान में पाता है।

चूँकि फ़ी बुशेल अनाज 10 शि० के भाव से बिकता है, इसलिए उसका सालाना लगान है 10 पा० + $10x$ शि० अर्थात् $(200+10x)$ शि० और चूँकि इस हालत में वह फ़ी एकड़ 10 शि० के हिसाब से लगान वसूल करता है, इसलिए उसकी ज़मीन $\frac{200+10x}{10}$ अथवा "$20+x$" एकड़ है।

दूसरी शर्त के अनुसार (अर्थात् जब कि अनाज की दर फ़ी एकड़ 13 शि० 6 पैं० है) उसकी आमदनी साल में 10 पा० $13\frac{1}{2}x$ शि० अर्थात् $\frac{400+27x}{2}$ शि० और आमदनी चूँकि फ़ी एकड़ 13 शि० है ; इसलिए इस हालत में ज़मीन $\frac{400+27x}{26}$ एकड़ है ;

इसलिए $20+x=\dfrac{400+27x}{26}$; अथवा $520+26x=400+27x.$

$$\therefore \; x=120.$$

इसलिए वह 120 बुशेल अनाज लगान में पाता है।

उदाहरण 4, एक खरगोश 80 बार कूदने से जितनी दूर जा सकता है, उतनी दूर से एक कुत्ते ने उसको पकड़ने के लिए दौड़ना आरम्भ किया। कुत्ता जितने समय में दो बार कूदता है खरगोश उतने समय में तीन मर्तबा कूदता है। परन्तु खरगोश दो मर्तबा कूदने से जितनी दूर जा सकता है कुत्ता एक मर्तबा कूद कर उतना जाता है। पकड़ जाने के पूर्व खरगोश कितनी बार कूदा था ?

फ़र्ज़ करो कि खरगोश के कूदने की संख्या $=3x$.

तो इस समय में कुत्ते के कूदने की संख्या $=2x$.

अब कुत्ते के प्रथम स्थान से खरगोश जिस स्थान पर पकड़ गया, वह उतनी ही दूर है, जितना ख़रगोश $(80+3x)$ मर्तबा कूद कर जा सकता है, और यह कुत्ते के $2x$ मर्तबा कूदने की दूरी के बराबर है।

अब चूँकि कुत्ते के एक मर्तबा कूदने की दूरी खरगोश के दो मर्तबा कूदने की दूरी के बराबर है;

इसलिए कुत्त की $2x$ मर्तबा कूदने की दूरी = खरगोश की $4x$ मर्तबा कूदने की दूरी

$$\therefore\ 80+3x=4x\ ;\qquad \therefore\ x=80.$$

इसलिए पकड़ जाने के पूर्व खरगोश 3×80 अर्थात् 240 मर्तबा कूदा था।

उदाहरण 5. किसी सर्राफ़ के पास केवल कुछ सोने और कुछ चाँदी के सिक्के थे। अब यदि संख्या में a चाँदी के सिक्के, या संख्या में b सोने के सिक्के दोनों का मूल्य s की रक़म हो, तो यदि कोई व्यक्ति सोना और चाँदी की संख्या में से c सिक्के निकाल कर s की रक़म लेना चाहे, तो उसे कितने चाँदी के सिक्के और कितने सोने के सिक्के देना होगा?

फ़र्ज़ करो कि चाँदी के सिक्कों की संख्या $=x$.

तो सोने के सिक्कों की संख्या $=c-x$.

अब एक चाँदी के सिक्के का मूल्य $=\dfrac{s}{a}$

और एक सोने के सिक्के का मूल्य $=\dfrac{s}{b}$

अब चूँकि हमारे मान लेने के अनुसार x चाँदी के सिक्के और '$c-x$' सोने के सिक्कों का कट्ठा मूल्य s है;

$$\text{इसलिए}\qquad s=x.\frac{s}{a}+(c-x)\cdot\frac{s}{b};$$

$$\therefore\quad 1=\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b};\qquad \text{अथवा}\quad x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{c}{b}-1;$$

$$\therefore\quad x=\frac{a(c-b)}{a-b},\quad \text{और}\quad c-x=c-\frac{a(c-b)}{a-b}=\frac{b(a-c)}{a-b}.$$

इसलिए पूछे हुए सोने और चाँदी के सिक्कों की संख्या क्रमशः $\dfrac{b(a-c)}{a-b}$ और $\dfrac{a(c-b)}{a-b}$ है।

उदाहरण 6. AB 220 मील लम्बी एक रेलवे लाइन है। तीन रेलगाड़ियाँ P, Q, R घंटे में क्रमश 25, 20 व 30 मील की चाल से उस रास्ते पर चलती हैं। P व Q क्रमशः 7 A.M. व 8-15 A.M. पर A से B की ओर और R, 10-30 A.M. पर B से A की ओर रवाना होती है। कहाँ और किस समय Q और R से P बराबर दूरी पर होगी ?

A Q P R B

फ़र्ज़ करो कि ऊपर दिये हुए चित्र के अनुसार P रेलगाड़ी Q व R से बराबर दूरी पर है; और R रेलगाड़ी के B से छूटने के (अर्थात् 10-30 A.M. से) x घंटे के बाद ऊपर दिये हुए स्थान पर आती है।

चूँकि 10-30 A.M. से $3\frac{1}{2}$ घंटे पहले P रेलगाड़ी A से चली है, इसलिए उसके छूटने के बाद $(3\frac{1}{2}+x)$ घंटे चलकर वह उपरोक्त स्थान पर पहुँची है।

इसलिए $AP=(3\frac{1}{2}+x).25$ मील,

और $AQ=(2\frac{1}{4}+x).20$ मील,

और $BR=30x$ मील,

$\therefore$ $PQ=AP-AQ=\{(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20\}$ मील

और $PR=AB-AP-BR=\{220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x\}$ मील

किन्तु $PQ=PR$;

$\therefore$ $(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20=220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x$;

$\therefore$ $50.(3\frac{1}{2}+x)-(2\frac{1}{4}+x).20=220-30x$;

$\therefore$ $60x=220-175+45=90$; $\therefore$ $x=1\frac{1}{2}$.

इसलिए 10-30 A.M. से $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद, अर्थात् 12 बजे P, Q और R से बराबर दूरी पर होगी। और चूँकि, P, 7 बजे A से चली है इसलिए 12 बजे वह A से 5×25 अर्थात् 125 मील की दूरी पर होगी।

उदाहरण 7. दो मुसाफ़िरों के साथ कुल 5 हंड्रेडवेट वज़न का माल था और प्रत्येक को वह जितना माल बिना भाड़े ले जा सकता था उसको छोड़ कर बाक़ी माल के लिए, क्रमश: 5 शि० 2 पें० और 9 शि० 10 पें० माल के भाड़े के लिए देना पड़ा। परन्तु सब माल यदि एक ही मुसाफ़िर के साथ होता तो उसे अतिरिक्त माल के लिए 19 शि० 2 पें० देना पड़ता। प्रत्येक के साथ कितना माल था? और प्रत्येक मुसाफ़िर कितना माल बिना भाड़े ले जा सकता था?

फ़र्ज़ करो कि प्रत्येक मुसाफ़िर x हंड्रेडवेट माल बिना भाड़े ले जा सकता है।
तो (5 शि० 2 पैं०) + (9 शि० 10 पैं०) = $(5-2x)$ हंड्रेडवेट का भाड़ा

$$\therefore \quad \frac{15\times 12}{5-2x} \text{ पैं०} = \text{एक हंड्रेडवेट का भाड़ा}$$

और 19 शि० 2 पैं० = $(5-x)$ हंड्रेडवेट का भाड़ा।

$$\therefore \quad \frac{230}{5-x} \text{ पैं०} = \text{ एक हंड्रेडवेट का भाड़ा}$$

इसलिए $\dfrac{15\times 12}{5-2x}=\dfrac{230}{5-x}$; $\therefore \quad 18(5-x)=23(5-2x)$;

अथवा $28x=115-90=25$; $\therefore \quad x=\frac{25}{28}$.

इसलिए बिना भाड़े जो माल एक मुसाफ़िर ले जा सकता था उसका वज़न

$= \frac{25}{28}$ हंड्रेडवेट $= \frac{25}{28}\times 4\times 28$ पा० $= 100$ पा०

और एक हंड्रेडवेट का भाड़ा $= \dfrac{230}{5-x}$ पैं० $= \dfrac{230}{5-\frac{25}{28}}$ पैं० $= \dfrac{230\times 28}{5\times 23}$ पैं० $= 56$ पैं०।

चूँकि पहले मुसाफ़िर के अतिरिक्त माल का भाड़ा = 5 शि० 2 पैं० = 62 पैं०
और दूसरे मुसाफ़िर के अतिरिक्त माल का भाड़ा = 9 शि० 10 पैं० = 118 पैं०
इसलिए पहले मुसाफ़िर के अतिरिक्त माल का वज़न = $\frac{62}{56}$ हंड्रेडवेट

$= \frac{62}{56}\times 4\times 28$ पा० $= 124$ पा०

और दूसरे मुसाफ़िर के अतिरिक्त माल का वज़न = $\frac{118}{56}$ हंड्रेडवेट

$= \frac{118}{56}\times 4\times 28$ पा० $= 236$ पा०

इसलिए पहले मुसाफ़िर के पास कुल वज़न = $(100+124)$ पा० = 224 पा०
और दूसरे मुसाफ़िर के पास कुल वज़न = $(100+236)$ पा० = 336 पा०

उदाहरण 8. कोई व्यक्ति प्रति पाउंड 3 शि० के, और प्रति पाउंड 5 शि० के भाव पर चाय खरीद के दोनों प्रकार की चाय इस प्रकार मिला देता है, कि मिली हुई चाय को प्रति पाउंड 3 शि० 8 पैं० के भाव से बेचने पर उसे सैकड़ा 10 का मुनाफ़ा होता है। एक पाउंड बढ़िया चाय के साथ उसने कितनी घटिया चाय मिलाई थी ?

फ़र्ज़ करो कि उसने एक पाउंड बढ़िया चाय के साथ x पाउंड घटिया चाय मिलाई थी।
एक पाउंड बढ़िया चाय व x पाउंड घटिया चाय का खरीद का दाम = $(3x+5)$ शि०

$$\therefore \quad \text{मिश्रित चाय के एक पाउंड का खरीद का दाम} = \frac{3x+5}{x+1} \text{ शि०}$$

परन्तु मिश्रित चाय को प्रति पाउंड $3\frac{2}{3}$ शि० के भाव से बेचने पर उसे सैकड़ा 10 का मुनाफ़ा होगा ; अर्थात् प्रति 100 शि० के लिए उसे 110 शि० अथवा प्रति शिलिंग के लिए उसे $\frac{11}{10}$ शि० मिलता है।

इसलिए $3\frac{2}{3}$ शि० = प्रति पाउंड मिश्रित चाय के क्रय-मूल्य का $\frac{11}{10}$ हिस्सा है।

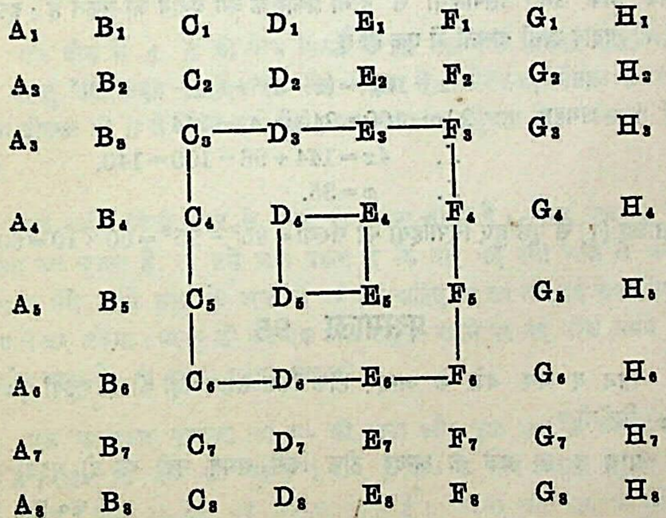
$$\therefore\ 3\tfrac{2}{3}=\frac{11}{10}\times\frac{3x+5}{x+1};\ \text{ अथवा }\ \frac{11}{3}=\frac{11}{10}\times\frac{3x+5}{x+1};$$

$$\text{अथवा}\quad 10(x+1)=3(3x+5);\qquad \therefore\ x=5.$$

इसलिए प्रति पाउंड बढ़िया चाय के साथ उसने पाँच पाउंड घटिया चाय मिलाई थी।

उदाहरण 9. कोई फौजी अफसर अपने सिपाहियों को 5-कतारवाले (5 deep) एक अन्तःशून्य वर्ग (a hollow square) के रूप में सजा सकता है; अथवा 6-कतारवाले (6 deep) एक अन्तःशून्य वर्ग के रूप में सजा सकता है; परन्तु दूसरे वर्ग की सबसे आगे की पंक्ति के सिपाहियों की संख्या पहले वर्ग के सबसे आगे की पंक्ति के सिपाहियों की संख्या से 4 कम है; तो उस टुकड़ी में कितने सिपाही थे?

[यदि कुछ मनुष्य कई समानान्तर और एक ही भाँति रक्खी हुई भिन्न भिन्न कतारों में इस प्रकार सजाये जाएँ कि प्रत्येक कतार के मनुष्यों की संख्या कुल कतारों की संख्या के बराबर हो तो उन मनुष्यों को एक अन्तःपूर्ण वर्ग में (in a solid square) सजाया हुआ कहते हैं। नीचे दिये हुये चित्र से इस प्रकार के वर्ग बनाने की रीति स्पष्ट विदित होगी। इस चित्र में A_1, B_1, C_1 आदि एक एक मनुष्य सूचित करते हैं।



चित्र में दिखलाये हुए अन्तःपूर्ण वर्ग में कुल आठ कतारें हैं, और प्रत्येक कतार में आठ आदमी हैं। इस वर्ग के अन्दर से यदि अन्तःपूर्ण वर्ग $C_3F_3F_6C_6$ को हटा लिया जाय

तो बाक़ी हिस्से को **2-क़तारवाला एक अन्तःशून्य वर्ग** (hollow square 2 deep) कहा जाता है; स्पष्ट है इसके भी सामने की पंक्ति के सिपाहियों की संख्या 8 है; परन्तु यदि $C_3F_3F_6C_6$ वर्ग के बदले $D_4E_4E_5D_5$ वर्ग हटाया जाता तो बाक़ी हिस्से को 3-क़तारवाला (3 deep) अन्तःशून्य वर्ग (hollow square) कहा जाता, इस हालत में भी सामने की पंक्ति के मनुष्यों की संख्या 8 ही होगी।

इसलिए, जाना जाता है कि सामने की पंक्ति में x मनुष्य रहें, तो 2-क़तारवाले किसी अन्तःशून्य वर्ग के मनुष्यों की संख्या $=x^2-(x-4)^2$; इसी प्रकार 3-क़तारवाले किसी अन्तःशून्य वर्ग के मनुष्यों की संख्या $=x^2-(x-6)^2$ आदि।

इसलिए, जिस अन्तःशून्य वर्ग के सामने की पंक्ति के मनुष्यों की संख्या x है; और जो n-क़तारवाला है, ऐसे अन्तःशून्य वर्ग के मनुष्यों की संख्या $=x^2-(x-2n)^2$ है।]

फ़र्ज़ करो कि उदाहरण में दिये हुए पहले वर्ग की अगली पंक्ति में मनुष्यों की संख्या $=x$; तो दूसरे वर्ग के सामने की पंक्ति के मनुष्यों की संख्या स्पष्टतः $=x-4$ है।

इसलिए पहले वर्ग के सिपाहियों की संख्या $=x^2-(x-10)^2$ ... ... (1)

और दूसरे वर्ग के सिपाहियों की संख्या $=(x-4)^2-\{(x-4)-12\}^2$ ... (2)

अब चूँकि उन्हीं सिपाहियों से दोनों प्रकार के वर्ग बनाये जा सकते हैं; इसलिए कुल सिपाहियों की तादाद दोनों हालतों में एक ही है।

इसलिए $x^2-(x-10)^2=(x-4)^2-\{(x-4)-12\}^2$

अथवा $20x-100=24(x-4)-144$

$\therefore \quad 4x=144+96-100=140,$

$\therefore \quad x=35.$

इसलिए (1) से पूछे हुए सिपाहियों की संख्या $=35^2-25^2=60\times10=600.$

प्रश्नमाला 95

1. तीन व चार बजे के अन्दर ठीक किस समय घड़ी की दो सूइयाँ एक दूसरे पर (coincide) मिलेंगी?

2. पाँच व छः बजे के अन्दर ठीक किस समय घड़ी की दो सूइयाँ एक साथ मिलेंगी? [क० ए०, 1886.]

3. सात व आठ बजे के अन्दर ठीक किस समय घड़ी की दो सूइयाँ (i) परस्पर विरुद्ध, (ii) परस्पर लम्ब व (iii) एक साथ होंगी?

4. छः बजे के बाद, सबसे पहले किस समय घड़ी की दोनों सुइयाँ (i) परस्पर विरुद्ध और (ii) परस्पर लम्ब होंगी ?

5. दो मनुष्यों में से एक A से B की ओर घंटे में p मील की चाल से और दूसरा B से A की ओर घंटे में q मील की चाल से चलता है ; वे एक ही समय चलना आरम्भ करते हैं, और यदि A से B की दूरी a मील हो, तो वे कहाँ मिलेंगे ?

6. दो मनुष्यों आपस में मुलाक़ात करने के लिए 22 मील की दूरी पर दो स्थान से क्रमश: घंटे में 5 मील व 6 मील की चाल से चलना आरम्भ करते हैं ; यदि वे पहली बार मिलने के बाद फिर इन्हीं दो स्थानों के बीच चलें तो वे कहाँ और किस समय फिर मिलेंगे ?

7. एक मनुष्य घोड़े पर सवार होकर A से B तक जाने के लिए तिहाई रास्ता घंटे में a मील की चाल से और बाक़ी रास्ता घंटे में $2b$ मील की चाल से चलता है ; यदि वह आरम्भ से बराबर $3c$ मील की चाल से चलता, तो वह इसी समय में B में पहुँचकर फिर A को लौट आ सकता था,

तो सिद्ध करो कि $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ [क० ए०, 1889.]

8. एक दौड़ में A, B को पाँच मिनट में 75 गज़ पीछे छोड़कर 900 गज़ दौड़ जाता है ; परन्तु इस समय A एकाएक गिर पड़ता है, और पहली चाल से फ़ी मिनट 20 गज़ कम दौड़कर भी B से केवल आधे मिनट बाद अन्त पर पहुँचता है। कितनी देर दौड़ जारी रही ?

9. एक व्यक्ति किसी शहर से सफ़र को रवाना होता है ; परन्तु जब वह सफ़र का चौथाई हिस्सा चल चुकता है, तो उसे जान पड़ता है कि यदि वह इसी चाल से चलता रहे, तो जिस समय उसे अपने सफ़र के अन्त पर पहुँचना चाहिए था तब तक वह केवल उस फ़ासले का $\frac{5}{6}$ हिस्सा तै कर सकेगा ; परन्तु फ़ी घंटे एक मील रफ़्तार बढ़ाने पर वह ठीक समय सफ़र के अन्त पर पहुँच जाता है ; तो उसकी रफ़्तार निकालो।

10. एक काश्तकार सालाना 80 पा० की रक़म और कुछ धान के लगान पर ज़मीन भाड़े लेता है ; जब कि धान फ़ी बुशेल 1 पा० 5 शि० के भाव बिकता है, तो ज़मीन का भाड़ा फ़ी एकड़ 1 पा० 15 शि० के हिसाब पड़ता है। परन्तु जब धान फ़ी बुशेल 1 पा० 10 शि० के भाव बिकता है तो उसका भाड़ा फ़ी एकड़ 2 पा० के हिसाब पड़ता है। तो भाड़े में कितने बुशेल धान का लगान है ?

11. एक चपरासी सालाना 8 पा० और एक वर्दी पाने की शर्त पर काम में रक्खा गया; परन्तु 7 महीने के बाद 2 पा० 3 शि० 4 पें० व वर्दी देकर वह काम से निकाल दिया गया; तो उसकी वर्दी का मूल्य कितना होगा ?

12. एक खरगोश 50 मर्तबा कूदकर जितनी दूर जा सकता है, उतनी दूर से एक कुत्ता खरगोश को पकड़ने के लिए दौड़ने लगा; कुत्ता जितनी देर में तीन मर्तबा कूदता है खरगोश उस समय में चार मर्तबा कूदता है; परन्तु कुत्ता जितनी दूर दो मर्तबा कूदकर जाता है, खरगोश तीन मर्तबा में उतनी दूर जाता है। कुत्ता कितनी बार कूदने के बाद खरगोश को पकड़ सकेगा ?

13. एक कुत्ता 60 मर्तबा कूदकर जितनी दूर जा सकता है, इतनी दूर पीछे से वह एक खरगोश को पकड़ने के लिए दौड़ पड़ा। खरगोश जिस मियाद में 5 बार कूदता है कुत्ता उतनी अवधि में 4 मर्तबा कूदता है; परन्तु खरगोश चार मर्तबा कूदकर जितनी दूर जाता है कुत्ता उतनी दूर तीन ही मर्तबा में जाता है; खरगोश की पकड़ तक उनमें से प्रत्येक कितनी बार कूदा होगा ?

14. "सेन्ट जान" की नाव 30 मर्तबा खेने पर जितनी दूरी जा सकती है, उतनी पीछे से "केअस" की नाव, "जान" की नाव से टकराने के लिए चलती है। "केअस" जब तक तीन मर्तबा खेता है, तब तक "जान" चार मर्तबा खेता है; परन्तु दो मर्तबा खेने से "केअस" की नाव जितनी दूर जाती है, तीन मर्तबा में "जान" की नाव उतनी ही दूर जाती है। "जान" की नाव के साथ टकराने तक "केअस" की नाव को कितनी बार खेना पड़ा होगा ?

15. A व B एक थली पाते हैं जिसमें कुछ शिलिंग हैं। A उसमें से 2 शि० और बाक़ी जो बचता है उसका छठा हिस्सा लेता है, और उसके बाद B 3 शिलिंग और उसके बाद जो बच रहता है, उसका छठा हिस्सा निकालकर देखता है कि दोनों के पास बराबर रक़म है। तो थैली में कितने शिलिंग थे और प्रत्येक ने कितने शिलिंग निकाले ?

16. फ़ी मल्लाह के लिए प्रतिदिन एक पाउंड के हिसाब से 60 दिन का खाने का सामान लेकर एक जहाज़ समुद्र-यात्रा को जाता है; परन्तु 20 दिन चलने के बाद तूफ़ान और लहरों की बाढ़ से पाँच आदमी वह जाते हैं, और जहाज़ को भी इतना नुक़सान पहुँचता है कि उसे 24 दिन अधिक समय लग जाता है, और इसलिए प्रत्येक मल्लाह को प्रतिदिन खाने का सामान एक पाउंड का $\frac{5}{7}$ वां हिस्सा दिया जाता है; तो जहाज़ कितने मल्लाह लेकर चला था ?

17. पानी में वज़न करने पर 19 पाउंड सोने का वज़न 18 पाउंड और 10 पाउंड चाँदी का वज़न 9 पाउंड हो और सोने और चाँदी से बने हुए एक सिल का वज़न साधारण रूप में (अर्थात् वायु में) 106 पाउंड और पानी में 99 पाउंड हो, तो उस मिल में कितने पाउंड सोना और कितने पाउंड चाँदी होगी ?

18. एक व्यक्ति नाव खेकर 10 घंटे में केम्ब्रिज (Cambridge) से 20 मील की दूरी पर इली (Ely) शहर तक जाकर फिर केम्ब्रिज को लौट आता है। नदी का बहाव इस बीच बराबर एक ही ओर रहता है ; वह देखता है कि बहाव के साथ खेने पर वह तीन मील की दूरी जितने समय में जाता है, बहाव के विरुद्ध उतने समय में वह केवल 2 मील की दूरी जा सकता है। केम्ब्रिज से इली जाने में उसे कितना समय लगा और इली से लौटने में कितना समय लगा ?

19. किसी आदमी ने अपने जीवन का छठा हिस्सा बचपन में, बारहवाँ हिस्सा जवानी में और ($\frac{1}{7}$ हिस्सा + 5 साल) विवाह के बाद व्यतीत किया ; उसके एक पुत्र हुआ जिसकी मृत्यु के बाद वह 4 साल और ज़िन्दा रहा, और उसका पुत्र अपने पिता की आधी उम्र को प्राप्त हुआ था : तो मृत्यु के समय पुत्र की आयु कितनो थी ?

20' धातुओं की दो छड़ें हैं, उनमें से पहली में 14 आउंस चाँदी और 6 आउंस टीन है और दूसरी में 8 आउंस चाँदी और 12 आउंस टीन है। 20 आउंस वज़न की एक छड़ बनाने के लिए दोनों छड़ों से कितना कितना वज़न लिया जाय कि उसमें चाँदी और टीन बराबर वज़न के हों ?

21. 607 पा० 1 शि० 8 पें० के ऐसे दो हिस्से बनाओ कि बड़ी रक़म का दो साल के लिए $3\frac{1}{3}$ सैकड़े का ब्याज, छोटी रक़म के $2\frac{1}{2}$ साल के $3\frac{1}{3}$ सैकड़े के ब्याज से 18 पा० 16 शि० अधिक हो।

22. घर के सामान की चार चीजें हटवाने के लिए मुझे पहले सामान के लिए दो, दूसरे के लिए तीन, तोसरे के लिए चार और चौथे के लिए पाँच कुलियों की ज़रूरत हुई। पहला सामान ले जानेवाले कुलियों को मैंने पैसों की एक ढेरी और एक पैसा दिया ; दूसरा सामान ले जानेवाले कुलियों को मैंने उतने ही पैसों की एक ढेरी और चार पैसे दिये, तीसरा सामान ले जानेवाले कुलियों को मैंने उतने ही पैसों की एक ढेरी और पाँच पैसे दिये, और चौथा सामान ले जानेवाले कुलियों को उतने ही पसों की एक ढेरी और नौ पैसे देकर, मैंने देखा कि तीसरे और चौथे सामान ले जानेवाले कुलियों में से प्रत्येक को बराबर पैसे मिले हैं ; तो बतलाओ कि प्रत्येक ढेरी में कितने पैसे थे, और प्रत्येक कुली को कितने पैसे मिले, और मैंने कुल कितने पैसे खर्च किये।

23. 15 गिन्नियों का वज़न 4 आउंस होना चाहिए; परन्तु खोटे सिक्कों के एक पार्सल का वज़न करके व गिनकर मालूम हुआ कि वज़न के अनुसार गिन्नियों की वाजिब तादाद से नौ गिन्नियाँ अधिक हैं। और कुल गिन्नियों का एक अंश जो कि आधे से साढ़े दस गिन्नियाँ अधिक का है उसका वज़न वाजिब वज़न से $1\frac{1}{8}$ आउंस कम है; तो पार्सल में कितनी गिन्नियाँ थीं?

24. एक कारीगर ने 10 पा० मूल्य की खुदाई का काम किये हुए चाँदी के सामान के बदले उसी वज़न को साधारण चाँदी व 3 पा० 15 शि० पाया। फिर उसे पहले की भाँति 12 आउंस खुदाई का काम किये हुए चाँदी के सामान के बदले 8 आउंस साधारण चाँदी (जिसका मूल्य उसो भाव से लिया गया है) और नक़द 2 पा० 16 शि० मिला। खुदाई का काम की हुई एक आउंस चाँदी का मूल्य कितना है; और पहली बार उसने कितने वज़न का खुदाई का काम किया हुआ चाँदी का सामान बेचा था?

25. दो मुसाफ़िरों को उनके अतिरिक्त माल के लिए क्रमशः 2 शि० 10 पें० व 7 शि० 6 पें० भाड़ा देना पड़ा; यदि कुल माल एक ही मुसाफ़िर के साथ होता तो उसे अतिरिक्त माल के लिए 14 शि० 6 पें० भाड़ा देना पड़ता; यदि कुछ भी माल बिना भाड़े न जाने दिया जाता तो उनमें से प्रत्येक को कितना भाड़ा देना पड़ता?

26. एक घसियारा 5 रुपया हज़ार के भाव के कितने गट्ठर घास, 6 रुपया हज़ार के भाव के 5600 गट्ठर के साथ मिलाय, कि मिलाई हुई घास के 100 गट्ठर 11 आने में बेचकर उसे 20 सैकड़ा लाभ हो?

[क० ए०, 1875.]

27. किसी लड़के ने 2 पें० में 3 के भाव से कुछ संतरे खरीदे, और एक पें० में 2 के भाव से, पूर्व संख्या के $\frac{1}{3}$ संतरे खरीदे। कुल संतरों को किस भाव से बेचने पर उसे 20 सैकड़ा मुनाफ़ा होगा? उसका कुल मुनाफ़ा यदि 5 शि० 4 पेंस हुआ हो, तो उसने कुल कितने संतरे खरीदे थे?

[क० ए०, 1885.]

28. एक मनुष्य ने विदेशी सोने के कुछ सिक्कों के प्रत्येक में से उसका पाँचवाँ हिस्सा रेतके निकालकर उन खोटे सिक्कों के $\frac{2}{3}$ हिस्सा चलाये और तब पकड़ गया; और एक खोटा सिक्का छोड़कर बाक़ी सिक्के छीन लिये गये। उस खोटे सिक्के को शामिल करके उसने देखा कि पहले उसने जितना मुनाफ़ा किया था उसे कुल उसका आधा नुक़सान हुआ। तो पहले उसके पास कितने विदेशी सिक्के थे?

29. तीन अंकवाली ऐसी एक संख्या निकालो कि उसके तीन अंकों में से प्रत्येक अंक उसके बाद के अंक से एक अधिक हो, और पूछी हुई संख्या तथा उसको उलट के

लिखने पर जो संख्या प्राप्त हो उसके चौथाई का अन्तर संख्या के तीनों अंकों के योगफल का 36 गुना हो।

30. कुछ पल्टन के सिपाहियों को अन्तःपूर्ण वर्ग में सजाने पर 60 सिपाही अधिक पाये जाते हैं; और उसकी सबसे आगे की पंक्ति में 5 सिपाही बढ़ाने पर और उसकी गभीरता में तीन सिपाही घटाने पर पल्टन का जो आयत रूप बनता है, उसे पूरा करने में एक सिपाही कम पड़ता है। तो पल्टन के सिपाहियों की संख्या निकालो।

31. एक फौजी अफ़सर अपने सिपाहियों से 10-कतारवाला एक अन्तःशून्य वर्ग बना सकता है, यदि पल्टन में कुल 2800 सिपाही हों तो उस वर्ग के सम्मुख की क़तार के सिपाहियों की संख्या कितनी है?

32. कुछ मनुष्य 4-कतारवाले एक अन्तःशून्य वर्ग में अथवा 8-कतारवाले एक अन्तःशून्य वर्ग में सजाये जा सकते हैं। परन्तु पहले वर्ग के आगे की कतार के मनुष्यों की संख्या दूसरे वर्ग के आगे की कतार के मनुष्यों की संख्या से 19 अधिक है; तो उन मनुष्यों की संख्या निकालो।

33. पल्टन की एक टुकड़ी, जिसमें कि आगे की कतार के सिपाहियों की संख्या से गभीरता पाँच अधिक है, कूच कर रही थी; परन्तु शत्रु की सेना दिखाई पड़ने पर सामने की पंक्ति में 845 सिपाही बढ़ाकर पल्टन को नई तौर पर सजाया जाता है; और ऐसा करने पर क़तार 5 हो जाती हैं। तो टुकड़ी में कुल कितने सिपाही थे?

सत्ताईसवाँ अध्याय

कठिन युगपत समीकरण (Harder Simultaneous Equations) और प्रश्नावली (Problems)

180. दो अनजानी राशिवाले सरल युगपत समीकरण हल करने की रीति अठारहवें अध्याय में बतलाई गई है। अब इस विषय पर और अच्छी तरह विचार किया जायगा।

181. वज्राभ्यास नियम (Method of Cross-Multiplication) :

यदि $a_1x+b_1y+c_1z=0$, और $a_2x+b_2y+c_2z=0$ * हो, तो सिद्ध करना होगा कि

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

पहले समीकरण को c_2, और दूसरे को c_1 द्वारा गुणा करके,

$$a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2z=0,$$

और $$a_2c_1x+b_2c_1y+c_2c_1z=0,$$

अब घटाने पर $$(c_1a_2-c_2a_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)y=0;$$

---

* इस नियम में x, y व z के गुणक रूप में जो अक्षर लिखे गये हैं उनके विषय में कुछ कहने की आवश्यकता है। स्पष्ट है कि c जैसे d अथवा अन्य किसी अक्षर से भिन्न है, इसी भाँति यहां पर भी मान लिया गया है, कि a_1, a_2, वैसे ही भिन्न हैं; b_1, b_2; c_1, c_2; आदि भी इसी भाँति काम में लाये गये हैं। इसका कारण यह है कि भिन्न समीकरणों के सजातीय पदों के गुणकों को भिन्न उत्तरस्थ अंक (different suffixes) वाले एक ही अक्षर द्वारा सूचित करने से, उनको हल करके जो मूल्य प्राप्त होते हैं, उनको याद रखना आसान होता है। इस उद्देश्य से पहले समीकरण के x के गुणक को a_1 द्वारा और दूसरे समीकरण के x के गुणक को a_2 द्वारा सूचित किया गया है; और b_1, b_2; c_1, c_2; आदि का भी ऐसा ही अर्थ समझना चाहिए। कभी कभी अक्षर गुणकों को अंक द्वारा उत्तरस्थ न करके मात्रा (dash) द्वारा ऐसा ही अर्थ सूचित किया जाता है। जैसेय दि x, y व z तीन अनजानी राशिवाले युगपत समीकरण हों, तो पहले में x, y, z के गुणकों को क्रमशः a', b', c' द्वारा, दूसरे में a'', b'', c'' द्वारा और तीसरे में a''', b''', c''' द्वारा सूचित किया जाता है।

$$\therefore \quad (c_1a_2-c_2a_1)x=(b_1c_2-b_2c_1)y\ ;$$

$$\therefore \quad \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}. \qquad \ldots \qquad (1)$$

अब पहले समीकरण को a_2 द्वारा और दूसरे को a_1 द्वारा गुणा करके होता है

$$a_1a_2x+b_1a_2y+c_1a_2z=0,$$

और $\quad a_2a_1x+b_2a_1y+c_2a_1z=0.$

इसलिए घटाने पर $\quad (a_1b_2-a_2b_1)y+(c_2a_1-c_1a_2)z=0\ ;$

$$\therefore \quad (a_1b_2-a_2b_1)y=(c_1a_2-c_2a_1)z\ ;$$

$$\therefore \quad \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}\ ; \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

इसलिए (1) व (2) से

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

टीका। समीकरणों को एक के नीचे दूसरे को लिखकर ऊपर दिये हुए सिद्धान्त को बहुत आसानी से याद रक्खा जा सकता है।

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{array}\right\}.$$

इससे मालूम होता है कि

(i) x के नीचे जो व्यंजक है वह = (पहले समीकरण के y का गुणक × दूसरे समीकरण के z का गुणक) ऋण-चिह्न (दूसरे समीकरण के y का गुणक × पहले समीकरण के z का गुणक) ;

(ii) y के नीचे का व्यंजक = (पहले समीकरण के z का गुणक × दूसरे समीकरण के x का गुणक) ऋण-चिह्न (दूसरे समीकरण के z का गुणक × पहले समीकरण के x का गुणक) ;

(iii) z के नीचे का व्यंजक = (पहले समीकरण के x का गुणक × दूसरे समीकरण के y का गुणक) ऋण-चिह्न (दूसरे समीकरण के x का गुणक × पहले समीकरण के y का गुणक)।

उपसिद्धान्त। ऊपर दिये हुए समीकरणों में यदि z के बदले 1 लिखा जाय तो

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1},$$ प्राप्त हुआ

और इससे $\quad a_1x+b_1y+c_1=0$
और $\quad a_2x+b_2y+c_2=0$

दो युगपत समीकरणों के मूल अर्थात् x व y के मूल्य निकाले जा सकते हैं।

टीका। ऊपर दिये हुए सिद्धान्तों को पूर्णरूप से याद रखना चाहिए। इनके द्वारा केवल दो अनजानी राशिवाले युगपत समीकरण ही आसानी और सुन्दर रूप में नहीं हल किये जा सकते बल्कि तीन अनजानी राशिवाले समघाती युगपत समीकरणों को हल करने में भी यही लागू होते हैं। अब कुछ दृष्टान्त दिये जाते हैं।

उदाहरण 1. हल करो : $\left.\begin{matrix} 3x-5y+9=0 \\ 5x-3y-1=0 \end{matrix}\right\}$

यहाँ पर $a_1=3,\quad b_1=-5,\quad c_1=\;\;9;$

$a_2=5,\quad b_2=-3,\quad c_2=-1.$

इसलिए,

$$\frac{x}{(-5)(-1)-(-3).9}=\frac{y}{9\times5-(-1).3}=\frac{1}{3.(-3)-5.(-5)};$$

अथवा $\frac{x}{5+27}=\frac{y}{45+3}=\frac{1}{-9+25}$; अथवा $\frac{x}{32}=\frac{y}{48}=\frac{1}{16}$;

$\therefore\quad x=\frac{32}{16}=2,\quad$ और $\quad y=\frac{48}{16}=3.$

इसलिए $x=2$ और $y=3.$

उदाहरण 2. हल करो :

$$\left.\begin{matrix} -7x+8y=\;\;9 & \ldots (1) \\ 5x-4y=-3 & \ldots (2) \end{matrix}\right\}$$

(1) से
(2) से
$$\left.\begin{matrix} -7x+8y-9=0 \\ 5x-4y+3=0 \end{matrix}\right\}$$

इसलिए,

$$\frac{x}{8\times3-(-4)(-9)}=\frac{y}{(-9).5-3.(-7)}=\frac{1}{(-7)(-4)-5\times8};$$

अथवा $\frac{x}{24-36}=\frac{y}{-45+21}=\frac{1}{28-40}$;

अथवा $\frac{x}{-12}=\frac{y}{-24}=\frac{1}{-12}$;

$\therefore\quad x=\frac{-12}{-12}=1,\quad$ और $\quad y=\frac{-24}{-12}=2.$

इसलिए $x=1$ और $y=2.$

उदाहरण 3. हल करो : $(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5 \quad \ldots(1)$
$5x-11y+35=0. \quad \ldots \quad \ldots(2)$

[क॰ ए॰, 1888.]

(1) से $$xy+7y-3x-14=xy+3x-y+2,$$

$$\therefore \quad 6x-8y+16=0\,;$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore \quad 3x-4y+\ 8&=0\\ \text{और} \quad 5x-11y+35&=0\end{aligned}\right\}$$

इसलिए,

$$\frac{x}{(-4).35-(-11).8}=\frac{y}{8\times5-35\times3}=\frac{1}{3.(-11)-5.(-4)}\,;$$

अथवा $$\frac{x}{-140+88}=\frac{y}{40-105}=\frac{1}{-33+20},$$

अथवा $$\frac{x}{-52}=\frac{y}{-65}=\frac{1}{-13}.$$

इसलिए $x=4$ और $y=5$.

उदाहरण 4. हल करो :

$$\left.\begin{aligned}2x-3y+4z&=\ 0 \quad \ldots \quad (1)\\ 7x+2y-6z&=\ 0 \quad \ldots \quad (2)\\ 4x+3y+\ z&=37 \quad \ldots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

अब (1) और (2) से

$$\frac{x}{(-3)(-6)-2\times4}=\frac{y}{4\times7-(-6).2}=\frac{z}{2\times2-7.(-3)},$$

अथवा $$\frac{x}{10}=\frac{y}{40}=\frac{z}{25}\,; \quad \text{अथवा} \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{8}=\frac{z}{5}.$$

फ़र्ज़ करो कि ऊपर दिया हुआ प्रत्येक भिन्न k इस अनजानी राशि के बराबर है,

तो $$\frac{x}{2}=\frac{y}{8}=\frac{z}{5}=k\,;$$

$$\therefore \quad x=2k, \quad y=8k, \quad z=5k. \quad \ldots \quad \ldots \quad (\text{क})$$

x, y, z के इन मूल्यों को (3) में प्रयोग करने से प्राप्त होता है,

$$k(8+24+5)=37,$$

अथवा $37k=37\,; \quad \therefore \quad k=1.$

इसलिए (क) से $x=2$, $y=8$ और $z=5$.

उदाहरण 5. हल करो :
$$\left.\begin{aligned} x+6y&=5z \quad \ldots \quad (1)\\ 7x+z&=6y \quad \ldots \quad (2)\\ 5x+6y-4z&=24 \quad \ldots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1) \text{ से} \quad x+6y-5z=0\\ &(2) \text{ से} \quad 7x-6y+z=0\end{aligned}\right\}$$

इसलिए $$\frac{x}{6\times1-(-6).(-5)}=\frac{y}{(-5).7-1\times1}=\frac{z}{1.(-6)-7\times6},$$

अथवा $$\frac{x}{6-30}=\frac{y}{-35-1}=\frac{z}{-6-42};$$

अथवा $$\frac{x}{-24}=\frac{y}{-36}=\frac{z}{-48};$$

$\therefore \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$. [प्रत्येक भिन्न को -12 द्वारा गुणा करने से]

अब प्रत्येक भिन्न $=k$ फर्ज़ कर के

$$x=2k, \quad y=3k, \quad z=4k. \quad \ldots \quad \ldots \quad (\text{क})$$

x, y, z के मूल्यों को (3) में प्रयोग करने पर

$$k(10+18-16)=24,$$

अथवा $12k=24$; $\therefore k=2$.

इसलिए (क) से $x=4$, $y=6$ और $z=8$.

प्रश्नमाला 96

हल करो :

1. $\left.\begin{aligned}2x+3y-8&=0\\3x-4y+5&=0\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned}3x-5y+9&=0\\5x+2y-16&=0\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned}4x-5y+8&=0\\2x-3y+6&=0\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned}-3x+2y+2&=0\\5x-3y-5&=0\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned}6x-7y+12&=0\\-7x+4y+11&=0\end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned}7x-8y&=-14\\5x-3y&=9\end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned}-6x+5y+2&=0\\13x-9y&=19\end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned}-7x+5y+11&=0\\8x-5y&=19\end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{ll} 4x = 11y + 6 & = 0 \\ 9x - 13y & = 10 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{ll} 8x - 7y & = 19 \\ 10x - 9y & = 23 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{ll} -12x + 17y + 16 & = 0 \\ 9x - 13y & = 11 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{ll} 14x - 11y + 18 & = 0 \\ 11x - 7y + 1 & = 0 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{ll} 17x - 7y & = 52 \\ 3x & = 2y \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{ll} 9x + 5y & = 124 \\ 7x & = 3y \end{array}\right\}$

[दूसरे समीकरण से फ़र्ज़ करो कि $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$]

15. $\left.\begin{array}{ll} 15x + 7y & = 246 \\ 9x & = 4y \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{ll} 9x & = 8y \\ 10x + 23y - 287 & = 0 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{ll} 4x - 3y & = 0 \\ 7x - 11y + 92 & = 0 \end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{ll} 4x - 7y & = 0 \\ 10x - 9y - 102 & = 0 \end{array}\right\}$

19. $\begin{array}{ll} 13x - 12y + 15 & = 0 \\ 8x - 7y & = 0 \end{array}$

20. $\left.\begin{array}{ll} 11x - 10y + 82 & = 0 \\ 14x - 9y & = 0 \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{3}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y) & = 59 \\ 5x - 33y & = 0 \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{4x + 5y}{40} = x - y \\ \dfrac{2x - y}{3} + 2y = 20 \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{ll} y(3 + x) & = x(7 + y) \\ 4x + 9 & = 5y - 14 \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{ll} \dfrac{4y - 6}{x + y} & = 2 \\ \dfrac{8x - 5}{y - x} & = 9 \end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{ll} (x + 5)(y + 7) & = (x + 1)(y - 9) + 112 \\ 2x + 10 & = 3y + 1 \end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{ll} 4x - 5y + 2z & = 0 \\ 2x - 7y + 4z & = 0 \\ x + y + z & = 6 \end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{ll} 5x + 6y + 8z & = 0 \\ 3x + 4y + 6z & = 0 \\ x + 5y + 16z & = 3 \end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{ll} 2x - 7y + 11z & = 0 \\ 6x - 8y + 7z & = 0 \\ 3x + 4y + 5z & = 35 \end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{ll} 7x + 3y - 8z & = 0 \\ 5x - 7y + 8z & = 0 \\ 3x + 5y + 7z & = 64 \end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{ll} x - 2y + z & = 0 \\ 9x - 8y + 3z & = 0 \\ 2x + 3y + 5z & = 36 \end{array}\right\}$

[क॰ ए॰, 1887.]

31. $\left.\begin{array}{ll} 2(4x + 9y) & = 7(2y + z) \\ 7(x + 2y) & = 8(y + z) \\ 3x + 4y + 5z & = 38 \end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{ll} 4(x+y) & =3(2z-y) \\ 5(x-2y) & =3(2y-3z) \\ 6(x-2)+7(y-3)+8(z-4) & =67 \end{array}\right\}$

33. $\left.\begin{array}{l} 5x=2y,\ 7y=5z \\ 4x+5y+6z=150 \end{array}\right\}$

34. $\left.\begin{array}{l} 15x=10y=6z \\ 7x+8y+9z=332 \end{array}\right\}$

35. $\left.\begin{array}{l} 4x-13y+8z=0 \\ 7x+6y-9z=0 \\ \frac{5}{x}+\frac{8}{y}+\frac{15}{z}=6\frac{2}{3} \end{array}\right\}$

182. $\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{array}\right\}$

ऊपर दिये हुए रूप के युगपत समीकरणों को हल करना :

पहले समीकरण को c_2 द्वारा और दूसरे को c_1 द्वारा गुणा करके पहले में से दूसरे को घटाने पर $(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1.$ ... (1)

इसी प्रकार पहले समीकरण को c_3 द्वारा और तीसरे को c_1 द्वारा गुणा करके पहले में से तीसरा घटाने पर

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1. \quad \cdots \quad (2)$$

अब (1) और (2) से वज्राभ्यास-प्रणाली के अनुसार x व y के मूल्य निकाले जा सकते हैं। उसके बाद दिये हुए तीन समीकरणों से किसी में x व y के इस रूप से प्राप्त मूल्य प्रयोग करके z का मूल्य निकाला जा सकता है।

विकल्प विधि (Alternative Method) :

पहले समीकरण को d_2 द्वारा और दूसरे को d_1 द्वारा गुणा करके पहले से दूसरे को घटाने पर

$$(a_1d_2-a_2d_1)x+(b_1d_2-b_2d_1)y+(c_1d_2-c_2d_1)z=0. \quad (\text{क})$$

इसी प्रकार पहले समीकरण को d_3 द्वारा और तीसरे को d_1 द्वारा गुणा करके पहले में से तीसरे को घटाने पर

$$(a_1d_3-a_3d_1)x+(b_1d_3-b_3d_1)y+(c_1d_3-c_3d_1)z=0. \quad (\text{ख})$$

अब स्पष्ट है कि (क) व (ख) द्वारा सूचित दो समीकरणों को और दिये हुए तीन समीकरणों में से किसी एक को युगपत समीकरण मानकर पहले बतलाये हुए नियम के अनुसार वे हल किये जा सकते हैं।

1. हल करो : $4x-3y+2z=40$ ... ... (1)
$5x+9y-7z=47$ ... ... (2)
$9x+8y-3z=97$ ... ... (3)

(1) को 7 द्वारा और (2) को 2 द्वारा गुणा करने पर

$$\left.\begin{aligned} 28x-21y+14z&=280 \\ \text{और}\quad 10x+18y-14z&=94 \end{aligned}\right\}$$

इसलिए जोड़ने पर $38x-3y=374.$ ... ... (4)

अब (1) को 3 द्वारा और (3) को 2 द्वारा गुणा करने पर

$$\left.\begin{aligned} 12x-9y+6z&=120 \\ \text{और}\quad 18x+16y-6z&=194 \end{aligned}\right\}$$

इसलिए जोड़ने पर $30x+7y=314.$ ... ... (5)

अब (4) और (5) से क्रमशः

$$\left.\begin{aligned} 38x-3y-374&=0 \\ \text{और}\quad 30x+7y-314&=0 \end{aligned}\right\} \text{ प्राप्त हुआ।}$$

वज्राभ्यास-प्रणाली के अनुसार

$$\frac{x}{3\times314-7.(-374)}=\frac{y}{(-374).30-(-314).38}=\frac{1}{38\times7-30.(-3)};$$

अथवा $$\frac{x}{942+2618}=\frac{y}{-11220+11932}=\frac{1}{266+90};$$

अथवा $$\frac{x}{3560}=\frac{y}{712}=\frac{1}{356}.$$

इसलिए $x=10$ और $y=2.$

x और y के इन मूल्यों को (1) में प्रयोग करने पर

$$40-6+2z=40; \quad \therefore \quad z=3.$$

इसलिए $x=10,\ y=2$ और $z=3.$

उदाहरण 2. हल करो : $2x-4y+9z=28$ ... ... (1)
$7x+3y-5z=3$ ... ... (2)
$9x+10y-11z=4$ ... ... (3)

(1) को 3 द्वारा और (2) को 4 द्वारा गुणा करने पर

$$\left.\begin{aligned} 6x-12y+27z&=84 \\ \text{और}\quad 28x+12y-20z&=12 \end{aligned}\right\}$$

इसलिए जोड़ने पर $34x+7z=96.$ ... ... (4)

फिर (2) को 10 द्वारा और (3) को 3 द्वारा गुणा करने पर

$$\left.\begin{array}{r} 70x+30y-50z=30, \\ \text{और}\quad 27x+30y-33z=12 \end{array}\right\}$$

इसलिए घटाने पर $\qquad 43x-17z=18.$ ... ... (5)

अब (4) और (5) से

$$\left.\begin{array}{r} 34x+\ 7z-96=0 \\ \text{और}\quad 43x-17z-18=0 \end{array}\right\}$$

इसलिए $\dfrac{x}{7.(-18)-(-17).(-96)}=\dfrac{z}{(-96).43-(-18).34}$

... ... $=\dfrac{1}{34.(-17)-43\times 7}$;

अथवा $\dfrac{x}{-126-1632}=\dfrac{z}{-4128+612}=\dfrac{1}{-578-301}$;

अथवा $\dfrac{x}{-1758}=\dfrac{z}{-3516}=\dfrac{1}{-879}.$

$\therefore\ x=\dfrac{-1758}{-879}=2$ और $z=\dfrac{-3516}{-879}=4.$

x और z के इन मूल्यों को (2) में प्रयोग करने पर $14+3y-20=3$,

इसलिए $3y=9$; $\qquad\therefore\ y=3.$

इसलिए $x=2,\ y=3$ और $z=4.$

उदाहरण 3. हल करो

$$\left.\begin{array}{rl} 12x+\ 9y-\ 7z=2 & \text{...}\ (1) \\ 8x-26y+\ 9z=1 & \text{...}\ (2) \\ 23x+21y-15z=4 & \text{...}\ (3) \end{array}\right\}$$

(2) को 2 द्वारा गुणा करने पर $\quad 16x-52y+18z=2,$

और $\quad 12x+\ 9y-\ 7z=2.$ ... ... (1)

इंसलिए घटाने पर ... $\quad 4x-61y+25z=0.$ ... ... (4)

अब (1) को 2 द्वारा गुणा करने पर

$$24x+18y-14z=4,$$

और $\quad 23x+21y-15z=4.$ ... ... (3)

इसलिए घटाने पर ... $\quad x-3y+z=0.$ ... ... (5)

अब चूँकि
$$\left.\begin{aligned} 4x-61y+25z&=0, \quad \cdots (4)\\ x-\ 3y+\ \ z&=0. \quad \cdots (5)\end{aligned}\right\}$$

इसलिए वज्राभ्यास-प्रणाली के अनुसार

$$\frac{x}{-61+75}=\frac{y}{25-4}=\frac{z}{-12+61},$$

अथवा $\frac{x}{14}=\frac{y}{21}=\frac{z}{49}$; अर्थात् $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{7}$.

प्रत्येक भिन्न को k के बराबर मानकर

$$x=2k, \quad y=3k, \quad z=7k.$$

इसलिए (1) से $k(24+27-49)=2,$

अथवा $2k=2$; $\therefore k=1.$

इसलिए $x=2,\ y=3$ और $z=7.$

प्रश्नमाला 97

हल करो :

1. $\left.\begin{aligned} 2x-3y+5z&=11\\ 5x+2y-7z&=-12\\ -4x+3y+z&=5\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 3x+2y+5z&=32\\ 2x+5y+3z&=31\\ 5x+3y+2z&=27\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x+y-z&=1\\ 8x+3y-6z&=1\\ 3z-4x-y&=1\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} 2x+3y+4z&=29\\ 3x+2y+5z&=32\\ 4x+3y+2z&=25\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} 2x+3y+4z&=16\\ 3x+2y-5z&=8\\ 5x-6y+3z&=6\end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} 4x-3y+2z&=8\\ 3x-4y+5z&=6\\ -6x+5y+7z&=-1\end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} 8x-7y-5z&=1\\ -7x+5y+6z&=-1\\ 12x-8y-11z&=2\end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} x+5y-4z&=5\\ 3x-2y+2z&=14\\ -10x+8y+z&=6\end{aligned}\right\}$

[क० ए०, 1867.

9. $\left.\begin{aligned} 2x+4y+5z&=49\\ 3x+5y+6z&=64\\ 4x+3y+4z&=55\end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned} x+3y+5z&=10\\ 3x+5y+7z&=14\\ 5x+7y+8z&=15\end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{r}12x+8y-11z=-3\\ 11x-13y-z=2\\ 8x+17y-12z=-2\end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{r}5x-4y+9z=19\\ 7x+6y-12z=16\\ -9x+8y+15z=-13\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{r}x-y-z=-15\\ y+x+2z=40\\ 4z-5x-6y=-150\end{array}\right\}$
[कलकत्ता, 1886.]

14. $\left.\begin{array}{r}2(x-y)=3z-2\\ x-3z=3y-1\\ 2x+3z=4(1-y)\end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{r}3x+2y-z=20\\ 2x+3y+6z=70\\ x-y+6z=41\end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{r}4(y-x)=5z-22\\ 3z+4x=6y+2\\ z-3y=14-10x\end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{r}5x+2y+z=30\\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{10}z=4\\ 2x+5y+10z=129\end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=12-\frac{1}{6}z\\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}x=8\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}z=10\end{array}\right\}$
[क० ए०, 1868.]

19. $\left.\begin{array}{r}\frac{1}{x}+\frac{5}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{12}\\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{19}{24}\\ -\frac{4}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{r}\frac{3}{x}-\frac{4}{5y}+\frac{1}{z}=7\frac{3}{5}\\ \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}+\frac{2}{z}=10\frac{1}{6}\\ \frac{4}{5x}-\frac{1}{2y}+\frac{4}{z}=16\frac{1}{10}\end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{r}5x+3y=65\\ 2y-z=11\\ 3x+4z=57\end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{r}\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}\\ \frac{3}{z}-\frac{2}{y}=2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}\end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{r}ay+bx=c\\ cx+az=b\\ bz+cy=a\end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{r}3x+4y-11=0\\ 5y-6z=-8\\ 7z-8x-13=0\end{array}\right\}$
[क० ए०, 1877.]

25. $\left.\begin{array}{r}3y+x-2=0\\ 3z-4y=x+15\\ 2x+7z=7\end{array}\right\}$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1883.]

183. विविध उदाहरणमाला :

उदाहरण 1. हल करो : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,\quad \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1,\quad \frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1.$

तीनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=3,$$

अथवा $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{3}{2}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (\text{क})$$

(क) से दूसरे समीकरण को घटाने पर

$$\frac{a}{x}=\frac{1}{2}; \qquad \therefore \quad x=2a.$$

इसी प्रकार $y=2b$ और $z=2c$.

उदाहरण 2. हल करो :

$$\text{(i)}\ \frac{xy}{x+y}=1; \qquad \text{(ii)}\ \frac{xz}{x+z}=2; \qquad \text{(iii)}\ \frac{yz}{y+z}=3.$$

अब (i) से $\dfrac{x+y}{xy}=1,$ अथवा $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1;$ ··· (4)

(ii) ,, $\dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{1}{2},$ अथवा $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2};$ ··· (5)

(iii) ,, $\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{3},$ अथवा $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}.$ ··· (6)

(4), (5) और (6) को एक साथ जोड़ने पर

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (7)$$

(7) में से (6) को घटाने पर

$$\frac{1}{x}=\frac{11}{12}-\frac{1}{3}=\frac{7}{12}; \qquad \therefore \quad x=\tfrac{12}{7}.$$

(7) में से (5) को घटाने पर

$$\frac{1}{y}=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}; \qquad \therefore \quad y=\tfrac{12}{5}.$$

(7) में से (4) को घटाने पर

$$\frac{1}{z}=\frac{11}{12}-1=-\frac{1}{12}; \quad \therefore \quad z=-12.$$

उदाहरण 3. हल करो : $xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz)$
$= c(xy - yz - zx)$.

चूँकि $xyz = a(yz - zx - xy)$,

$$\therefore \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}; \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

[दोनों पदों को $a \times xyz$ द्वारा भाग करने पर]

इसी प्रकार $\frac{1}{b} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$, ... (2)

और $\frac{1}{c} = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. ... ... (3)

(2) और (3) को एक साथ जोड़ने पर

$$-\frac{2}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc}; \qquad \therefore \quad x = \frac{-2bc}{b+c}.$$

इसी प्रकार $-\frac{2}{y} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{a+c}{ac}; \qquad \therefore \quad y = \frac{-2ca}{c+a}$,

और $-\frac{2}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}; \qquad \therefore \quad z = \frac{-2ab}{a+b}$.

उदाहरण 4. हल करो :

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z &= 0 \\ bcx + cay + abz &= 1 \end{aligned}\right\}$$

चूँकि $(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$
और $x + y + z = 0$

इसलिए वज्राभ्यास-प्रणाली के अनुसार

$$\frac{x}{(c+a)-(a+b)} = \frac{y}{(a+b)-(b+c)} = \frac{z}{(b+c)-(c+a)},$$

अथवा $\frac{x}{c-b} = \frac{y}{a-c} = \frac{z}{b-a}$.

प्रत्येक भिन्न को k के बराबर मान कर

$$x = k(c-b),\ y = k(a-c),\ z = k(b-a).$$

x, y, z के मूल्यों को तीसरे समीकरण में प्रयोग करने पर

$$k\{bc(c-b) + ca(a-c) + ab(b-a)\} = 1.$$

किन्तु $bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$

$$=bc(c-b)+a^2(c-b)-a(c^2-b^2)$$
$$=(c-b)\{bc+a^2-a(c+b)\}$$
$$=(c-b)(a-c)(a-b).$$

इसलिए $k(c-b)(a-c)(a-b)=1$; $\quad\therefore\ k=\dfrac{1}{(c-b)(a-c)(a-b)}.$

इसलिए
$$x=k(c-b)=\frac{1}{(a-c)(a-b)};$$
$$y=k(a-c)=\frac{1}{(c-b)(a-b)};$$
$$z=k(b-a)=\frac{1}{(c-b)(c-a)}.$$

प्रश्नमाला 98

निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1,\quad \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a,\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=b,\quad \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=c.$

3. $\dfrac{yz}{y+z}=a,\quad \dfrac{zx}{z+x}=b,\quad \dfrac{xy}{x+y}=c.$

4. $\left.\begin{aligned} axy&=c(bx+ay)\\ bxy&=c(ax-by)\end{aligned}\right\}$

5. $3xy=4(x+y),\quad 2xz=3(x+z),\quad 5yz=12(y+z).$

6. $y+z=4,\quad z+x=6,\quad x+y=8.$

7. $y+z-x=6,\quad z+x-y=10,\quad x+y-z=14.$

8. $\left.\begin{aligned} x-4y+z&=-10\\ y-4z+x&=-15\\ z-4x+y&=-35\end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned} y+z-7x+16&=0\\ z+x-7y+24&=0\\ x+y-7z+40&=0\end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned} a^2x+b^2y&=2ab(a+b)\\ b(2a+b)x+a(a+2b)y&=a^3+a^2b+ab^2+b^3\end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{aligned} x+y+z&=A\\ ax+by+cz&=0\\ a^2x+b^2y+c^2z&=0\end{aligned}\right\}$

12. $\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ (a+b)x+(a+c)y+(b+c)z&=0\\ abx+acy+bcz&=1\end{aligned}\right\}$

13. $\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=0\\ \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}&=1 \end{aligned}\right\}$

14. $\left.\begin{aligned} x-ay+a^2z&=a^3\\ x-by+b^2z&=b^3\\ x-cy+c^2z&=c^3 \end{aligned}\right\}$

15. $\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=0\\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z&=0\\ a^2x+b^2y+c^2z&=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \end{aligned}\right\}$

16. किस शर्त पर नीचे दिये हुए तीन समीकरण x और y के एक ही मूल्य के लिए सिद्ध होंगे :

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,\quad a_3x+b_3y+c_3=0.$$

17. यदि नीचे दिये हुए चार समीकरण x, y, z के एक ही मूल्य के लिए सिद्ध हों तो a का मूल्य क्या है :

$$2x-3y+5z=18,\quad 3x-y+4z=20,\quad 4x+2y-z=5,$$
$$(a+1)x+(a+2)y+(a+3)z=76.$$

18. $\left.\begin{aligned} 3w-2y&=2\\ 5x-7z&=11\\ 2x+3y&=39\\ 4y+3z&=41 \end{aligned}\right\}$

19. $\left.\begin{aligned} 9x-2z+w&=41\\ 7y-5z-t&=12\\ 4y-3x+2w&=5\\ 3y-4w+3t&=7\\ 7z-5w&=11 \end{aligned}\right\}$

20. $\left.\begin{aligned} x+y+z&=ab+bc+ca\\ \frac{x}{ab}+\frac{y}{bc}+\frac{z}{ca}&=3\\ (c-b)x+(a-b)y+(c-a)z&=2abc-ab^2-b^2c+ac^2-a^2c \end{aligned}\right\}$

II. एक से अधिक अनजाना राशिवाले युगपत समीकरण की प्रश्नावली

(Problems producing Simultaneous Equations involving more than one unknown quantity)

184. अठारहवें अध्याय में बतलाये हुए प्रश्नों की अपेक्षा कठिन प्रश्नों पर अब विचार किया जायगा।

निम्नलिखित उदाहरण दृष्टान्त रूप से दिये जा रहे हैं।

उदाहरण 1. एक पीपे P में 12 गैलन शराब व 18 गैलन पानी, और दूसरे पीपे Q में 9 गैलन शराब व 3 गैलन पानी है। प्रत्येक पीपे से कितना लेकर मिलाने पर 7 गैलन पानी और 7 गैलन शराब का मिश्रण होगा ?

P पीपे में 30 गैलन में 12 गैलन शराब है, इसलिए इसका $\frac{12}{30}$ अर्थात् $\frac{2}{5}$ अंश शराब है ; $\therefore$ $\frac{3}{5}$ हिस्सा पानी है।

इसी प्रकार Q से प्राप्त प्रति गैलन में $\frac{3}{4}$ हिस्सा शराब और $\frac{1}{4}$ हिस्सा पानी है।

अब मान लो कि P से प्राप्त गैलनों की संख्या $= x$,

और Q से प्राप्त गैलनों की संख्या $= y$.

अब चूँकि P से प्राप्त x गैलन में $\frac{2}{5}x$ गैलन शराब व $\frac{3}{5}$ गैलन पानी है ; और Q से प्राप्त y गैलन में $\frac{1}{4}y$ गैलन पानी है ;

इसलिए दोनों को मिलाने पर $(\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y)$ गैलन शराब और $(\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}y)$ गैलन पानी होगा।

इसलिए दी हुई शर्त के अनुसार

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{2}{5}x+\tfrac{3}{4}y=7\,; \qquad \cdots \qquad (1)\\ \text{और}\quad &\tfrac{3}{5}x+\tfrac{1}{4}y=7. \qquad \cdots \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

(2) को 3 द्वारा गुणा करने पर प्राप्त समीकरण में से (1) को घटाने पर

$$\tfrac{7}{5}x=14\,; \qquad \therefore\ x=10.$$

इसलिए (2) से $y=4(7-\frac{3}{5}\times 10)=4$.

इसलिए P से 10 गैलन और Q से 4 गैलन लिया गया है।

उदाहरण 2. 120 गज़ जाने में एक गाड़ी के सामने का पहिया पीछे के पहिये से 6 बार अधिक घूमता है ; यदि सामने के पहिये की परिधि के माप में उसकी वर्तमान माप के चौथाई हिस्से की वृद्धि कर दी जाय, और उसके पीछे के पहिये की परिधि के माप में उसके वर्तमान माप का पाँचवाँ हिस्सा बढ़ा दिया जाय, तो सामने का पहिया पीछे के पहिये से केवल 4 बार अधिक घूमेगा। प्रत्येक पहिये की परिधि निकालो।

मान लो कि सामने के पहिये की परिधि x गज़ और पीछे के पहिये की परिधि y गज़ है।

तो पहिये 120 गज़ जाने में $\frac{120}{x}$ और $\frac{120}{y}$ बार घूमेंगे।

सामने और पीछे के पहियों की परिधियों को $\frac{1}{4}$ अंश और $\frac{1}{5}$ अंश क्रमशः अधिक करने से उनकी नई परिधियां क्रमशः $\left(x+\frac{x}{4}\right)$ और $\left(y+\frac{y}{5}\right)$ गज़ अर्थात् $\frac{5x}{4}$ व $\frac{6y}{5}$ गज़ होंगी। इसलिए 120 गज़ जाने में पहिये $120\div\frac{5x}{4}$ वार अर्थात् $\frac{96}{x}$ और $120\div\frac{6y}{5}$ अर्थात् $\frac{100}{y}$ मर्तवा घूमेंगे ;

इसलिए दी हुई शर्त के अनुसार

$$\left.\begin{aligned}\frac{120}{x}&=\frac{120}{y}+6\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)\\ \text{और}\quad \frac{96}{x}&=\frac{100}{y}+4. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

(1) को 5 द्वारा और (2) को 6 द्वारा गुणा करने पर

$$\frac{600}{x}=\frac{600}{y}+30\,;$$

$$\text{और}\quad \frac{576}{x}=\frac{600}{y}+24\,;$$

$\therefore$ घटाने से $$\frac{24}{x}=6\,; \qquad \therefore \; x=4.$$

इसलिए, (1) से $$\frac{120}{y}=\frac{120}{4}-6=24\,; \qquad \therefore \; y=5.$$

इसलिए, सामने व पीछे के पहियों की परिधियां क्रमशः 4 व 5 गज़ है।

उदाहरण 3. एक पाउंड चाय और तीन पाउंड चीनी का मूल्य कुल 6 शि० है। परन्तु चीनी और चाय का मूल्य क्रमशः सैकड़ा 50 शि० व 10 शि० अधिक होने पर उनका मूल्य कुल 7 शि० होगा। चाय व चीनी प्रत्येक का मूल्य निकालो।

फ़र्ज़ करो कि एक पाउंड चाय का मूल्य x शि० और एक पाउंड चीनी का मूल्य y शि० है। तो स्पष्ट है कि $x+3y=6.$ ... ... (1)

चाय का मूल्य सैकड़ा 10 शि० अधिक होने पर एक पाउंड चाय का मूल्य $=\left(x+\frac{x}{10}\right)$, अर्थात् $\frac{11}{10}x$ शि० होता है ; और चीनी का मूल्य सैकड़ा 50 शि० अधिक होने पर एक पाउंड चीनी का मूल्य $=\left(y+\frac{y}{2}\right)$, अर्थात् $\frac{3y}{2}$ शि० है।

इसलिए $$\frac{11}{10}x+3\cdot\frac{3y}{2}=7. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(2) से $\frac{11}{5}x+9y=14$; ... ... (3)

और (1) से $3x+9y=18$; ... ... (4)

$\therefore$ (4) से (3) को घटाने पर $(3-\frac{11}{5})x=4$;

अथवा $\frac{4x}{5}=4$; $\therefore$ $x=5$.

इसलिए (1) से $y=\frac{6-5}{3}=\frac{1}{3}$.

इसलिए एक पाउंड चाय का मूल्य 5 शि० है और एक पाउंड चीनी का मूल्य $\frac{1}{3}$ शि० अर्थात् 4 पें० है।

उदाहरण 4. एक रक़म कई लोगों में बाँटनी है ; यदि तीन आदमी कम होते ता प्रत्येक को 150 पाउंड अधिक मिलता, परन्तु यदि 6 आदमी अधिक होते तो प्रत्येक को 120 पा० कम मिलता ; तो निकालो कि कितनी रक़म और कितने आदमी हैं।

फर्ज़ करो कि रक़म x पा० है ; और जिन लोगों में बाँटी जायगी उनकी संख्या y है।

इसलिए प्रयेक को $\frac{x}{y}$ पा० मिलेंगे ; यदि तीन आदमी कम होते तो प्रत्येक को $\frac{x}{y-3}$ पा० मिलते ; और 6 आदमी अधिक होते तो प्रत्येक को $\frac{x}{y+6}$ पा० मिलते। इसलिए दी हुई शर्त के अनुसार,

$$\frac{x}{y-3}=\frac{x}{y}+150, \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{और} \quad \frac{x}{y+6}=\frac{x}{y}-120. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) से $150=x\left(\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y}\right)=\frac{3x}{y^2-3y}$; $\therefore$ $x=50(y^2-3y)$.

(2) से $120=x\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}\right)=\frac{6x}{y^2+6y}$; $\therefore$ $x=20(y^2+6y)$.

इसलिए $50(y^2-3y)=20(y^2+6y)$,

अथवा $30y^2=(150+120)y=270y$; $\therefore$ $y=9$.

[क्योंकि, y का मूल्य 0 नहीं हो सकता]

$\therefore$ $x=20(81+54)=20\times135=2700$.

इसलिए आदमियों की संख्या = 9 ; और रक़म = £2700.

उदाहरण 5. कोई मनुष्य 40 मील सफ़र करने पर, अपनी चाल घंटे में 2 मील बढ़ाता है। परन्तु यदि वह पहले से ही इस तेज़ चाल से चलता, तो वह जहाँ जाना चाहता है वहाँ 40 मिनट पहले पहुँचता ; और यदि पहले की चाल से कुल रास्ता चलता तो वह 20 मिनट बाद पहुँचता। तो वह कितने मील रास्ता चला था ?

फ़र्ज़ करो कि वह मुसाफ़िर घंटे में y मील की चाल से 40 मील रास्ता चल चुका है, और कुल x मील का सफ़र करना है।

इसलिए सफ़र का वास्तविक समय $=\left(\frac{40}{y}+\frac{x-40}{y+2}\right)$ घंटा $=\frac{80+xy}{y(y+2)}$ घंटा है।

परन्तु तेज़ चाल से चलने से वह $\frac{x}{y+2}$ घंटों में जा सकता था, और यदि पहली चाल से चलता तो $\frac{x}{y}$ घंटों में जा सकता था।

इसलिए दी हुई शर्त के अनुसार

$$\frac{x}{y+2}=\frac{80+xy}{y(y+2)}-\frac{2}{3}, \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

और $$\frac{x}{y}=\frac{80+xy}{y(y+2)}+\frac{1}{3}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2) से (1) को घटाने पर $$x\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)=1,$$

अथवा $$2x=y(y+2). \quad \ldots \quad (3)$$

फिर (2) से $3x(y+2)=3(80+xy)+y(y+2)$;

अथवा $$6x-240=y(y+2). \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

फिर (3) व (4) से $6x-240=2x$;

अथवा $4x=240$, $\therefore\ x=60.$

इसलिए वह 60 मील रास्ता चला था।

उदाहरण 6. A से B तक घोड़ेगाड़ी पर जाने में जितना समय लगता है ; रेल पर, यदि कोई विपद् न हो तो ठीक उसका आधा समय लगेगा ; रेलगाड़ी रास्ते में अचानक घटनाओं के कारण 3 घंटे तक रुककर भी पूरी यात्रा के लिए जो समय लेती है, उतने समय में घोड़ागाड़ी 15 मील पीछे रह जाती है। परन्तु यदि कुल रास्ता, वर्तमान रास्ते का $\frac{2}{3}$ हिस्सा होता तो रेलगाड़ी से चलकर विपद् के लिए 3 घंटा शामिल करने पर भी पूरा रास्ता चलने में रेलगाड़ी व घोड़ेगाड़ी पर एक ही समय लगता। तो A से B की दूरी निकालो

फ़र्ज़ करो कि A से B की दूरी $=x$ मील ; और घोड़ागाड़ी घंटे में y मील की चाल से चलती है ; तो स्पष्ट है कि रेलगाड़ी की चाल घन्टे में $2y$ मील है।

अब, (रेलगाड़ी पर A से B तक जाने का समय) $+ 3$ घन्टा $=$ घोड़ागाड़ी पर $(x-15)$ मील जाने का समय ;

इसलिए $\quad \frac{x}{2y}+3=\frac{x-15}{y}$; $\quad \dots \quad \dots \quad (1)$

और $\quad \frac{\frac{2}{3}x}{2y}+3=\frac{\frac{2}{3}x}{y}$, $\quad$ अथवा $\frac{x}{3y}+3=\frac{2x}{3y}$. $\quad (2)$

(2) से $\quad \frac{x}{3y}=3$, $\quad$ अथवा $\quad x=9y$. $\quad (3)$

(1) से $\quad x+6y=2x-30$; $\quad$ अथवा $\quad 6y=x-30$. $\quad (4)$

इसलिए (3) व (4) से $\quad 6y=9y-30$; $\quad$ अथवा $\quad y=10$;

$$\therefore \quad x=9\times 10=90.$$

तो उसका सफ़र $=90$ मील।

उदाहरण 7. एक नाव 10 घन्टे में बहाव के विरुद्ध 30 मील व बहाव की ओर 44 मील रास्ता जा सकती है ; और 13 घन्टे में बहाव के विरुद्ध 40 मील और बहाव की ओर 55 मील जा सकती है। तो बहाव व नाव की चाल निकालो।

[कल० एन्ट्रेंस, 1880.]

फ़र्ज़ करो कि जब बहाव नहीं है, और पानी स्थिर है तो नाव घन्टे में x मील जा सकती है ; और बहाव की चाल घन्टे में y मील है।

तो एक घन्टे में नाव बहाव की ओर $x+y$ मील और बहाव के विरुद्ध $x-y$ मील जाती है। इसलिए बहाव के विरुद्ध 30 मील जाने में नाव को $\frac{30}{x-y}$ घन्टे और बहाव की ओर 44 मील जाने में उसे $\frac{44}{x+y}$ घन्टे लगेंगे। इसलिए प्रश्न में दी हुई पहली शर्त के अनुसार

$$\frac{30}{x-y}+\frac{44}{x+y}=10 ; \quad \dots \quad (1)$$

इसी प्रकार दूसरी शर्त के अनुसार $\quad \frac{40}{x-y}+\frac{55}{x+y}=13$; $\quad \dots \quad (2)$

(1) को 4 द्वारा और (2) को 3 द्वारा गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{120}{x-y}+\frac{176}{x+y}=40\,;$$

और $$\frac{120}{x-y}+\frac{165}{x+y}=39\,;$$

$\therefore$ घटाने पर $\frac{11}{x+y}=1$; अथवा $x+y=11$. ... (3)

इसलिए (1) से $\frac{30}{x-y}=10-4=6$; $\therefore\ x-y=5$. (4)

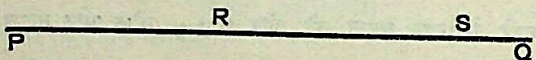
इस प्रकार प्राप्त हुआ $x+y=11$
और $x-y=5$

अब जोड़ने पर $2x=16$; $\therefore\ x=8$
और घटाने पर $2y=6$; $\therefore\ y=3$

इसलिए बहाव व नाव की चाल घन्टे में क्रमशः 3 और 8 मील है।

उदाहरण 8. साइकल पर 1040 गज़ की दूरी जाने की प्रतियोगिता हुई ; B के 120 गज़ रास्ता जाने के बाद A चलता है, और B से केवल 5 सेकेंड के बाद पथ के अंत पर पहुँचता है ; दूसरी बार A, B से पाँच सेकेंड बाद चलकर B को 120 फ़ुट की दूरी से हराता है। उनमें से प्रत्येक कितने समय में पथ के अंत पर पहुँचता है ?

मान लो कि पथ के अंत पर पहुँचने में A को x सेकेंड और B को y सेकेंड लगे। तो एक गज़ जाने में A को $\frac{x}{1040}$ सेकेंड और B को $\frac{y}{1040}$ सेकेंड लगे थे।



फ़र्ज़ करो कि ऊपर दिखलाये हुए चित्र में PQ दौड़ के कुल पथ को और PR व SQ क्रमानुसार 120 गज़ व 120 फ़ुट (अर्थात् 40 गज़) की दूरी सूचित करते हैं।

पहली बार दौड़ में B के R तक पहुँचने के बाद A, P से चलकर B से 5 सेकेंड बाद Q पर पहुँचा, इसलिए B को RQ का रास्ता चलने में $(x-5)$ सेकेंड लगे।

इसलिए $x-5=(1040-120)\times\frac{y}{1040}=(1-\frac{3}{26})y=\frac{23}{26}y$. ... (1)

दूसरी बार A, B से 5 सेकेंड बाद चलकर जब Q पर पहुँचा, तब B, P से चलकर केवल S तक पहुँच सका। इसलिए PS की दूरी जाने में B को कुल $(x+5)$ सेकेंड लगे।

इसलिए $x+5=(1040-40 \times \frac{y}{1040}=(1-\frac{1}{26})y=\frac{25}{26}y$ ... (2)

अब (2) से (1) को घटाने पर $\frac{2}{26}y=10$; $\therefore\ y=130.$

इसलिए (1) से $x=5+\frac{23}{26}\times 130=5+115=120.$

इसलिए A व B के पथ के अंत पर पहुँचने का समय क्रमश: 120 व 130 सेकेंड है।

इसलिए A 2 मिनट में व B 2 मिनट 10 से० में पथ के अंत पर जाता है।

उदाहरण 9. यदि किसी संख्या के अंकों का योगफल 9 द्वारा विभाज्य हो, तो अंक भी 9 द्वारा विभाज्य होगा। [बी. सी. एस. 1923.]

यदि संख्या एक अंकवाली है, तो स्पष्ट है कि वह 9 ही है, इसलिए ऊपर दिया हुआ नियम एक अंकवाली संख्या के लिए सिद्ध है।

अब दो अंकवाली एक संख्या लो ; और फर्ज़ करो कि उसकी दहाई का अंक y द्वारा और इकाई का x द्वारा सूचित होता है। तो संख्या अवश्य $=10y+x$.

$$\text{अब } \frac{10y+x}{9}=y+\frac{y+x}{9}.$$

इसलिए $x+y$ (अर्थात् अंकों का योगफल) यदि 9 द्वारा विभाज्य हो तो संख्या (अर्थात् $10y+x$) भी 9 द्वारा विभाज्य होगी।

इसी प्रकार दो से अधिक अंकवाली संख्याओं के लिए भी दिखलाया जा सकता है कि ऊपर दिया हुआ नियम सिद्ध होगा।

प्रश्नमाला 99

1. तीन अंकवाली एक ऐसी संख्या निकालो जो कि उसके तीनों अंकों के योगफल का 25 गुना होगी ; और जिसके साथ 198 जोड़ने पर प्राप्त योगफल दी हुई संख्या के तीन अंकों को उलटे क्रम से लिखने पर जो संख्या प्राप्त होती है, उसके बराबर होगा ; और जिसके बीच का अंक उसके दोनों ओर के अंकों के योगफल से 1 अधिक होगा।

2. एक दुकानदार वहीखाता अच्छी तरह न रखने के कारण एक वस्तु के खरीदने का मूल्य और वज़न नहीं मालूम कर सकता था। उसे उस वस्तु के विषय में केवल इतना

ही मालूम था कि वह यदि उसे प्रति पाउंड 30 शि॰ के भाव से बेचता तो उसे 5 पा॰ नफ़ा होता, परन्तु यदि प्रति पाउंड 22 शि॰ के भाव से बेचता, तो उसे 15 पाउंड का नुक़सान होता। उस वस्तु का वज़न व क्रय-मूल्य निकालो।

3. A व B दो व्यक्ति ताश खेलते हैं। कई बार खेलने के बाद A देखता है कि उसने जितनी रक़म लेकर खेल आरम्भ किया था, उसकी आधी रक़म वह जीता है; और यदि उसके पास और 15 शि॰ होते तो उसके पास B के रक़म की तिगुनी रक़म होती, परन्तु B उसके बाद 10 शि॰ जीतता है, और B की रक़म A की रक़म की दूनी हो जाती है। उनमें से प्रत्येक ने कितनी रक़म लेकर खेल आरम्भ किया था?

4. A व B एक साथ किसी काम को 12 दिन में कर सकते हैं, जो कि B अकेला 15 दिन तक, और उसके बाद C अकेला 30 दिन तक काम करने से खतम कर सकते हैं; ये तीनों एक साथ काम करने से 10 दिन में कर सकते हैं; कितने दिन में इन तीनों में से प्रत्येक इस काम को अलग अलग कर सकता है?

5. A के पास जितने शिलिंग हैं उसके दूने पेन्स हैं, और B के पास A से 8 पें॰ अधिक हैं, और B के पास जितने पेन्स हैं, उसके दूने शि॰ हैं। A व B के पास कुल जितनी रक़म है उसमें शिलिंग की संख्या से पेन्स की संख्या एक अधिक है। तो प्रत्येक के पास कितनी रक़म है निकालो।

6. किसी काम को A व B दोनों मिलकर m दिन में समाप्त करते हैं; दोनों के एक साथ n दिन तक काम करने के बाद A काम छोड़ देता है और B उस काम के बाक़ी हिस्से को p दिन में करता है। उनमें से प्रत्येक अलग अलग उस काम को कितने दिन में समाप्त कर सकेगा?

7. A, B व C अपनी अपनी पूँजी की तुलना करते हैं। A ने B से कहा "मुझे अपनी रक़म से 700 रु॰ दे दो, तो तुम्हारे पास जितनी रक़म बच रहेगी उसका दूना मेरे पास होगा।" B, C से कहता है, "मुझे 1400 रु॰ दे दो, तो तुम्हारे पास जो रक़म बच रहेगी उसका तिगुना मेरे पास होगा।" C, A से कहता है, "मुझे 420 रु॰ दे दो तो तुम्हारे पास जितनी रक़म बच रहेगी उसका पचगुना मेरे पास होगा।" प्रत्येक के पास कितनी रक़म है?

8. 35 मील जाने के लिए एक आदमी कुछ रास्ता घन्टे में 4 मील और बाक़ी रास्ता घन्टे में 5 मील की चाल से जाता है। जितनी दूरी वह घन्टे में 4 मील की चाल से गया था, यदि वह रास्ता 5 मील की चाल से, और बाक़ी रास्ता 4 मील की चाल से जाता तो उतने ही समय में वह दो मील अधिक जा सकता। तो निकालो कि इस यात्रा में उसे कितना समय लगा था।

9. एक रेलगाड़ी एक ही चाल से कुछ दूर तक जाती है। यदि उसकी चाल घन्टे में 6 मील अधिक होती, तो उसे उतनी दूरी तक जाने में 4 घन्टे कम समय लगता; और यदि उसकी चाल घन्टे में 6 मील कम होती, तो उतना ही रास्ता जाने में उसे 6 घन्टे अधिक समय लगता। तो रेलगाड़ी कितनी दूर गई थी ?

10. दो भांडों में प्रत्येक में पानी व शराब मिली हैं; एक में जितना पानी है, उसकी तिगुनी शराब है; और दूसरे में जितनी शराब है उसका पांचगुना पानी है। 7 गैलन समा सके ऐसा एक भांडा भरने के लिए इन दोनों भांडों में से, प्रत्येक से कितना पानी और कितनी शराब निकालनी होगी कि उसमें पानी व शराब बराबर हो ?

11. तीन अंकवाली किसी संख्या के तीनों अंकों का जोड़ 10 है; बीचवाला अंक उसके दोनों ओर के अंकों के जोड़ के बराबर है; और तीनों अंकों को उल्टे क्रम से लिखने पर जो संख्या बनती है वह दी हुई संख्या से 99 अधिक है। तो संख्या निकालो।

12. एक मनुष्य के पास आधे-क्राउन, शिलिंग व पेंस, इन तीन प्रकार के कुल 20 सिक्कों में एक पाउंड की रक़म है। यदि वह सब 6-पेंस के सिक्कों को पेन्सों के सिक्कों में और सब शिलिंग के सिक्कों को 6-पेंस के सिक्कों में भुना लेता, तो उसके पास कुल 73 सिक्के होते। तो प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्के उसके पास थे ?

13. एक रक़म कई लोगों में बराबर हिस्सों में बाँट दी गई। यदि लोगों की संख्या 4 अधिक होती, तो प्रत्येक को एक शिलिंग कम मिलता और यदि उनकी संख्या 5 कम होती, तो प्रत्येक को 2 शि० अधिक मिलता। तो निकालो प्रत्येक ने कितने रुपये पाये।

14. किसी हौज़ में पानी के लिए तीन नल लगे हैं, और उनमें से दो नल बिलकुल बराबर हैं। यदि तीनों नल एक साथ खोले जायँ, तो 4 घन्टे में हौज़ का $\frac{5}{12}$ हिस्सा भर जाता है। दो समान नलों में से एक को बन्द करने से 10 घन्टे 40 मिनट में हौज़ का $\frac{7}{9}$ हिस्सा भर जाता है। तो प्रत्येक नल अलग अलग कितने समय में हौज़ को भर सकेगा ?

15. एक मनुष्य 12 बुशेल गेहूँ के बदले 8 बुशेल जौ और 2 पा० 16 शि० लेता है; और कुछ गेहूँ उतने ही वज़न के जौ और नक़द 3 पा० 15 शि० के बदले में, अथवा कुल 10 पा० नक़द लेकर बेचने को राज़ी होता है। तो फ़ी बुशेल गेहूँ और जौ की क़ीमत निकालो।

16. एक शराब वेचनेवाले के पास दो तरह की शराव है; एक 2 शि० प्रति क्वार्ट (quart) के भाव की और दूसरी 3 शि० 4 पें० प्रति क्वार्ट के भाव की है। इनको मिलाकर यदि उसे 2 शि० 4 पें० प्रति क्वार्ट की 100 क्वार्ट शराब बनानी हो, तो प्रत्येक प्रकार की शराब में से कितने कितने क्वार्ट उसे लेना होगा?

17. ज़मीन के एक टुकड़े के लगान में कुछ विशेष परिमाण गेहूँ, व कुछ विशेष परिमाण जौ देना पड़ता है, जब कि गेहूँ का भाव फ़ी क्वार्टर 55 शि० और जौ का भाव फ़ी क्वार्टर 33 शि० हो तब लगान के गेहूँ और जौ का मूल्य बराबर है; परन्तु यदि गेहूँ व जौ का मूल्य क्रमश: 65 शि० व 41 शि० फ़ी क्वार्टर हो तो लगान मूल्य की दृष्टि से 7 पा० अधिक होता है। तो लगान में कितना गेहूँ व कितना जौ शामिल है?

18. 60 गज़ लम्बी एक चलती हुई रेलगाड़ी समानान्तर रेल की पटरी पर एक ही ओर चलती हुई 72 गज़ की लम्बी एक दूसरी रेलगाड़ी को 12 सेकेंड में पार करती है। धीरे चलनेवाली रेलगाड़ी की चाल यदि उसकी चाल की आधी और अधिक हो जाय तो तेज़ चलनेवाली गाड़ी उससे 24 सेकेंड में गुज़र जायगी। प्रत्येक गाड़ी की चाल निकालो।

19. एक किसान फ़ी बुशेल 3 शि० 4 पें० भाव के 100 बुशेल की मिलावट बनाने के लिए 2 शि० 4 पें० भाव के 28 बुशेल जौ के साथ कितने बुशेल 3 शि० फ़ी बुशेल भाव की राई और कितने बुशेल 4 शि० फ़ी बुशेल भाव का गेहूँ मिलायगा?

20. एक मनुष्य के पास 27 पा० 6 शि० गिन्नी और क्राउन सिक्कों में हैं, जिसमें से वह 14 पा० 17 शि० का क़र्ज़ा अदा करता है; और उसके बाद देखता है कि उसके पास ठीक उतनी ही गिन्नियाँ बच रहती हैं, जितने क्राउन वह दे चुका है, और उतने ही क्राउन बच रहते हैं, जितनी गिन्नियाँ वह दे चुका है। तो बतलाओ कि प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्के उसके पास थे, और प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्के उसके पास बच रहते हैं।

21. एक नाववाला देखता है कि बहाव के साथ A से B तक, 18 मील की दूरी जाने में उसे डेढ़ घंटे लगते हैं, और B से A को उसी बहाव के विरुद्ध जाने में, जब कि वह किनारे किनारे जाता है, जहाँ पर बहाव की चाल बीच के बहाव की चाल का $\frac{3}{4}$ हिस्सा है, उसे $2\frac{1}{2}$ घंटे लगते हैं; तो बीच के बहाव की चाल निकालो।

22. A व B एक मील दौड़ते हैं। पहली बार B के 44 गज़ दौड़ने के बाद A दौड़ता है और उसे 51 सेकेंड से हरा देता है; दूसरी बार B के दौड़ने के 1 मि० 15 से० बाद A दौड़ता है, और 83 गज़ से हार जाता है। तो निकालो A व B एक मील कितने समय में दौड़ते हैं।

23. दो मील की दौड़ में पहली बार B ने A को दो मिनट से हरा दिया; दूसरी बार A की चाल घंटे में दो मील बढ़ाने और B की चाल घंटे में दो मील घटाने के कारण A, B को दो मिनट से हरा देता है। A व B की पहली बार दौड़ने की चाल निकालो।

24. एक रेलगाड़ी लंदन से केम्ब्रिज जाते समय रास्ते में एक विपद् हो जाने से पहली चाल के $\frac{1}{n}$ हिस्से की चाल से चलती है; और इस कारण वह a घन्टे देर में पहुँचती है। यदि वह विपद् केम्ब्रिज से b मील और नज़दीक होती, तो गाड़ी c घन्टे देर में पहुँचती। तो विपद् होने के पूर्व गाड़ी की चाल निकालो।

25. एक घंटा चलने के बाद एक विपद् होने के कारण, एक रेलगाड़ी को 1 घंटा रुकना पड़ता है, जिसके बाद वह पूरी चाल के $\frac{3}{5}$ हिस्से की चाल से चलती है, और तीन घंटे देर से पहुँचती है; यदि वह विपद् 50 मील और आगे होती तो गाड़ी 1 घंटे 20 मि० और पहले पहुँचती। तो निकालो रेलगाड़ी को कितनी दूरी की यात्रा करनी थी।

26. यदि किसी संख्या के सम स्थान के अंकों के योगफल, और विषम स्थान के अंकों के योगफल का अन्तर शून्य हो अथवा 11 से विभाज्य हो तो संख्या भी 11 से विभाज्य होगी। [बंगाल सिविल सर्विस, 1923.]

27. यदि किसी संख्या के अंकों का योगफल 3 द्वारा विभाज्य हो, तो संख्या भी 3 द्वारा विभाज्य होगी।

———

अट्ठाईसवाँ अध्याय

रेखाचित्र और उसका प्रयोग

(Graphs and their Applications)

185. विन्दु व रेखाओं द्वारा किस प्रकार बीजीय व्यंजक सूचित किये जा सकते हैं, वह सातवें व उन्नीसवें अध्यायों में बताया गया है।

अब रेखाचित्र के प्रयोग द्वारा किस प्रकार समीकरण और उनकी प्रश्नावली हल की जा सकती है, उसी पर विचार किया जायगा। रेखाचित्र द्वारा प्रश्नों से जो फल प्राप्त होते हैं, वह वास्तव फल के लगभग होते हैं, परन्तु पहले बतलाई हुई बीजीय पद्धति से प्राप्त जो शुद्ध ठीक फल पाये जाते हैं, उससे अक्सर हालतों में रेखाचित्र द्वारा अधिक आसानी से फल प्राप्त होता है।

186. रेखाचित्र-द्वारा समीकरणों को हल करना :

उदाहरण 1. रेखाचित्र-द्वारा हल करो : $\left.\begin{array}{l} 2x-7y+12=0 \\ 3x+2y=32 \end{array}\right\}$

पहले इन दो समीकरणों को रेखाचित्र खींचना चाहिए।

अब मालूम होता है कि

$\left.\begin{array}{l} x=-6 \\ y=0 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$ पहले समीकरण के रेखाचित्र पर के विन्दु हैं।

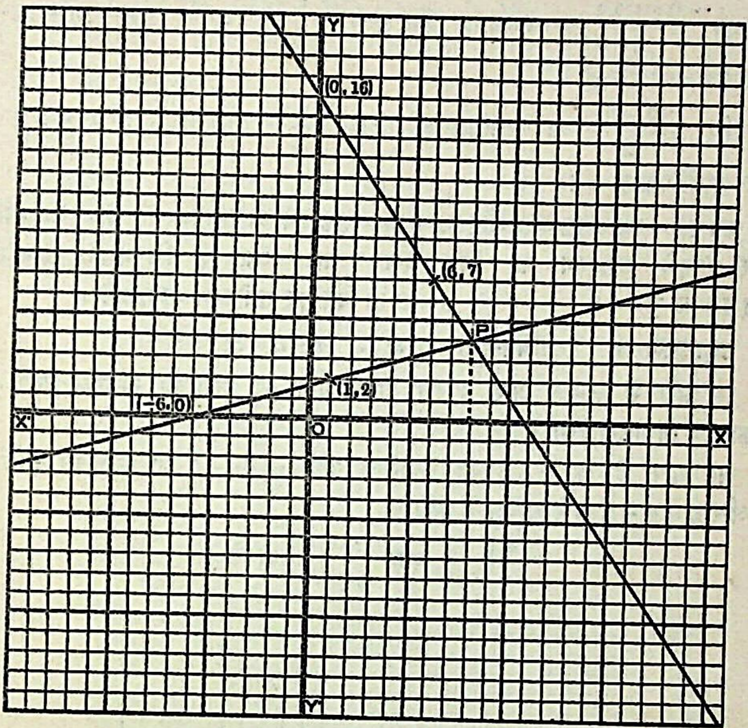
और $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=16 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=7 \end{array}\right\}$ दूसरे समीकरण के रेखाचित्र पर के विन्दु हैं।

इसलिए वर्गांकित कागज़ के छोटे वर्गों के एक बाहु को लम्बाई को इकाई मानकर दो समीकरणों के रेखाचित्र आगे दिये गये हैं।

अब मालूम होता है कि P विन्दु पर दोनों रेखाचित्र काटते हैं; और चूँकि P दोनों रेखाचित्र पर है, अतः इसके भुजकोटि दोनों समीकरणों को सिद्ध करते हैं।

अब मालूम होता है कि P के भुजकोटि 8 और 4 हैं।

इसलिए $\left.\begin{array}{l} x=8 \\ y=4 \end{array}\right\}$ पूछा हुआ जवाब है।



जवाब की जांच : दिये हुए समीकरणों में सब पदों को बराबरी के चिह्न की बायीं तरफ रख कर और $x = 8$ और $y = 4$ प्रयोग करके मालूम होता है कि,

पहले समीकरण में बायीं तरफ $= 2x - 7y + 12 = 2 \times 8 - 7 \times 4 + 12 = 0 =$ दायीं तरफ ;

और दूसरे समीकरण में बायीं तरफ $= 3x + 2y - 32 = 3 \times 8 + 2 \times 4 - 32 = 0$ $=$ दायीं तरफ।

इसलिए दोनों समीकरण $x = 8$, और $y = 4$ द्वारा सिद्ध होते हैं।

उदाहरण 2. रेखाचित्र-द्वारा हल करो : $\frac{2x + 12}{7} = \frac{32 - 3x}{2}$.

इस प्रश्न में $\frac{2x + 12}{7}$ और $\frac{32 - 3x}{2}$ का रेखाचित्र खींचकर उनके छेदन बिन्दु का भुज (abscissa) निकालना है।

अब $\frac{2x+12}{7}$ का रेखाचित्र और $y=\frac{2x+12}{7}$ (अर्थात् $2x-7y+12=0$) का रेखाचित्र दोनों एक ही हैं।

और $\frac{32-3x}{2}$ का रेखाचित्र और $y=\frac{32-3x}{2}$ (अर्थात् $3x+2y=32$) का रेखाचित्र दोनों एक ही हैं।

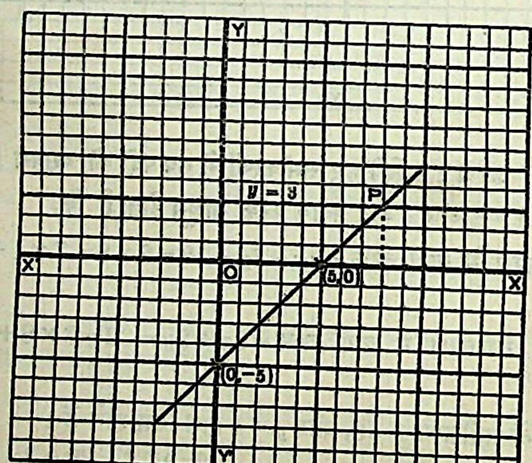
अब $2x-7y+12=0$ और $3x+2y=32$ इन दो समीकरणों के रेखाचित्रों को खींचकर (पहले उदाहरण का चित्र देखो) जाना जाता है कि उसके छेदन बिन्दु (अर्थात् P) का भुज $=8$. $\therefore$ $x=8$ ही दिये हुए समीकरण का मूल है।

उदाहरण 3. रेखाचित्र-द्वारा हल करो : $x-5=3$.

इस प्रश्न में $x-5$ और 3 इन दो राशियों का रेखाचित्र खींचकर उनके छेदन बिन्दु का भुज निकालना होगा।

अब साफ है कि $x-5$ का रेखाचित्र और $y=x-5$ का रेखाचित्र दोनों एक ही हैं और $y=x-5$ के रेखाचित्र के ऊपर

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=-5\end{array}\right\} \text{ और } \left.\begin{array}{l}x=5\\y=0\end{array}\right\} \text{ दो बिन्दु हैं :}$$

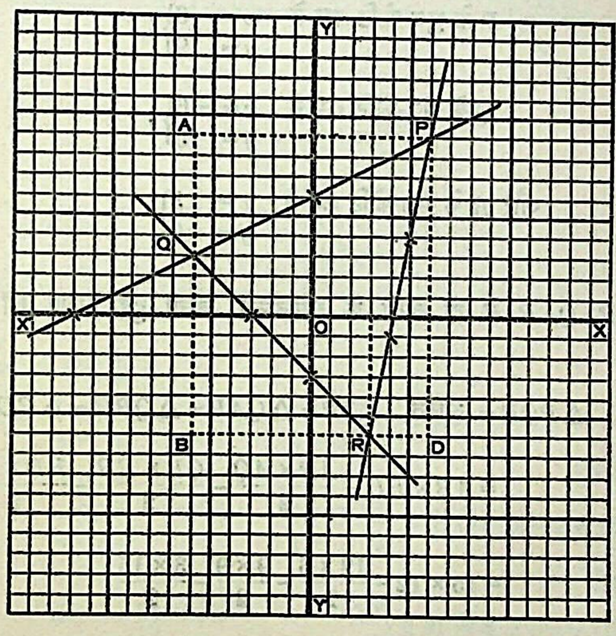


और 3 का रेखाचित्र और $y=3$ का रेखाचित्र दोनों एक ही हैं; और स्पष्ट है कि $y=3$ का रेखाचित्र x-अक्षरेखा के समानान्तर और मूल बिन्दु से तीन इकाई की दूरी पर एक सरल रेखा है।

वर्गांकित कागज़ के छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई को इकाई मानकर दो रेखाचित्र पीछे दिये गये हैं। दोनों रेखाचित्र के छेदन बिन्दु को यदि P बिन्दु द्वारा सूचित किया जाय तो स्पष्ट है कि P का भुज $=8$ है।

इसलिए $x=8$ ही दिये हुए समीकरण का मूल है।

उदाहरण 4. $x-2y+12=0$, $x+y+3=0$, और $5x-y-21=0$, इन तीन सरल रेखाओं द्वारा जो त्रिभुज बनता है उसके तीनों शीर्ष बिन्दुओं के भुजकोटि व त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो।



अब मालूम होता है कि

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=6 \end{array}\right\}$, और $\left.\begin{array}{l} x=-12 \\ y=0 \end{array}\right\}$ ये दो बिन्दु $x-2y+12=0$ के रेखाचित्र पर हैं।

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-3 \end{array}\right\}$, और $\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=0 \end{array}\right\}$ ये दो बिन्दु $x+y+3=0$ के रेखाचित्र पर हैं।

और $\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -1 \end{array}\right\}$, और $\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 4 \end{array}\right\}$ ये दो बिन्दु $5x - y - 21 = 0$ के रेखाचित्र पर हैं।

वर्गांकित कागज़ के छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई को इकाई मानकर पहले, दूसरे व तीसरे समीकरण के रेखाचित्र पीछे दिये हुए चित्र में क्रमशः PQ, QR और RP सरल रेखा द्वारा सूचित किये गये हैं।

चित्र से मालूम होता है

P के भुज-कोटि क्रम से $\left.\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 9 \end{array}\right\}$;

Q के भुज-कोटि क्रम से $\left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = 3 \end{array}\right\}$;

और R के भुज-कोटि क्रम से $\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -6 \end{array}\right\}$.

अब P, Q, R से दो अक्षों के समानान्तर खींची हुई रेखाएं खींचकर मालूम होता है कि

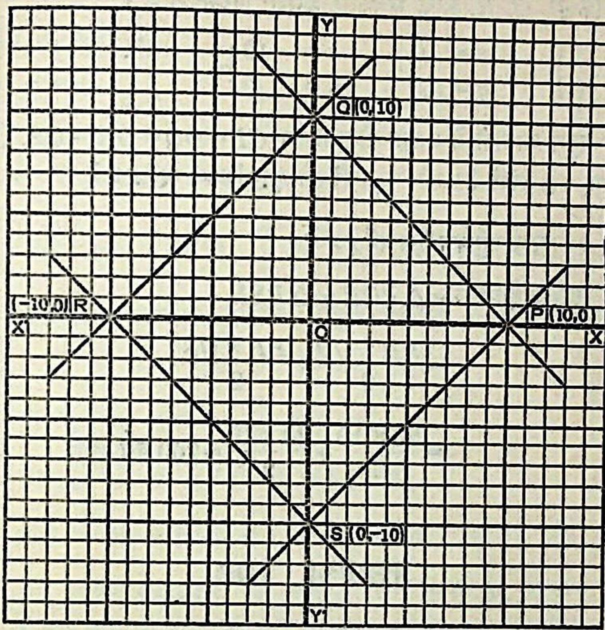
$$\triangle PQR = \text{आयत } ABDP - \triangle QAP - \triangle QBR - \triangle RDP$$

$$= AB \times BD - \frac{AP \times AQ}{2} - \frac{QB \times BR}{2} - \frac{RD \times DP}{2}$$

$$= 15 \times 12 - \frac{12 \times 6}{2} - \frac{9 \times 9}{2} - \frac{3 \times 15}{2}$$

$$= 180 - 36 - \tfrac{81}{2} - \tfrac{45}{2} = 81 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण 5. $x + y - 10 = 0$, $x - y + 10 = 0$, $x + y + 10 = 0$ और $x - y - 10 = 0$, इन चार सरल रेखाओं द्वारा जो चतुर्भुज बनता है, उसके शीर्षों के भुजकोटि निकालो, और दिखाओ कि यह चतुर्भुज एक वर्ग है; इसका क्षेत्रफल निकालो।



अब मालूम होता है कि

$\left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ और $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 10 \end{matrix}\right\}$ ये दो विन्दु $x + y - 10 = 0$ के रेखाचित्र पर हैं।

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 10 \end{matrix}\right\}$ और $\left.\begin{matrix} x = -10 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ ये दो विन्दु $x - y + 10 = 0$ के रेखाचित्र पर हैं।

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = -10 \end{matrix}\right\}$ और $\left.\begin{matrix} x = -10 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ ये दो बिन्दु $x + y + 10 = 0$ के रेखाचित्र पर हैं।

और $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = -10 \end{matrix}\right\}$ और $\left.\begin{matrix} x = 10 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ ये दो बिन्दु $x - y - 10 = 0$ के रेखाचित्र पर हैं।

अब वर्गांकित कागज़ के छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई को इकाई मानकर रेखाचित्र खींचने से जाना जाता है कि पीछे दिखलाये हुए चित्र में दिये हुए समीकरण। क्रमशः PQ, QR, RS व SP सरल रेखाओं द्वारा सूचित होते हैं [चित्र देखो]।

स्पष्ट है कि P, Q, R, S के भुजकोटि क्रमशः निम्नांकित हैं ।

$$\left.\begin{array}{l}x=10\\y=0\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}x=0\\y=10\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}x=-10\\y=0\end{array}\right\}, \quad \text{और} \quad \left.\begin{array}{l}x=0\\y=-10\end{array}\right\}.$$

चित्र से वहुत आसानी से मालूम होता है कि $OP=OQ=OR=OS$, (चूँकि इनमें से प्रत्येक की लम्बाई 10 इकाई है) और PR विकर्ण QS विकर्ण पर लम्ब है ।

इसलिए $PQRS$ चतुर्भुज एक वर्गक्षेत्र है ।

$$\text{इसका क्षेत्रफल} = \triangle PQR + \triangle PSR$$

$$= \frac{PR \times OQ}{2} + \frac{PR \times OS}{2}$$

$$= \frac{20 \times 10}{2} + \frac{20 \times 10}{2} = 200 \text{ वर्ग इकाई ।}$$

प्रश्नमाला 100

रेखाचित्र-द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल करो :

1. $x+y=9,\ 3x-2y=7.$

2. $4x+3y=13,\ 3x+2y=11.$

3. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=4,\ 4x-5y=2.$

4. $y-x=2,\ 3x-2y=5.$

5. $5x-3y=11,\ 2y-3x+4=0.$

6. $\frac{x-2}{2}=\frac{-5x+4}{5}.$

7. $\frac{2x+7}{3}=\frac{3x-7}{2}.$

8. $\frac{4x-3}{5}=\frac{6x}{7}-1.$

9. $x-12=-3.$

10. $5x-13=7.$

11. $-x+3y=18$, $x+7y=22$ और $y+3x=26$ तीन सरल रेखाओं द्वारा जो त्रिभुज वनता है उसके तीन शीर्षों के भुजकोटि और त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो ।

12. दिखाओ कि $4x-y=16$, $3x-2y=7$ और $x+y=9$ द्वारा सूचित तीन सरल रेखाएँ एक विन्दुगामी (concurrent) हैं । और समछेदन-विन्दु के भुज-कोटि निकालो ।

13. नीचे दिये हुए समीकरणों के रेखाचित्र-द्वारा जो चतुर्भुज बनते हैं उनके शीर्ष बिन्दु और उनके क्षेत्रफल निकालो :

(i) $x+y=3$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$, $\frac{x+y}{3}=-1$ और $x-y+3=0$;

(ii) $x=1$, $y=5$, $x=12$ और $y=10$;

(iii) $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ और $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}=1$.

14. निम्नलिखित रेखाचित्र-द्वारा जो त्रिभुज बनते हैं, उनके शीर्ष बिन्दु और क्षेत्रफल निकालो :

(i) $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$;

(ii) $x-2=0$, $y-1=0$, $x+y=6$;

(iii) $x-2y+8=0$, $x+y+2=0$, $5x-y-14=0$.

निम्नलिखित युगपत समीकरणों का साधारण मूल निकालकर दिखाओ कि उनमें से प्रत्येक x व y के उसी मूल्य द्वारा सिद्ध होता है। x व y के इन साधारण मूल्यों को निकालो और रेखाचित्र की सहायता से उनको जाँचो कि x व y के मूल्य ठीक हैं :

15. $x+y=2$, $x=1$, $y=1$.

16. $7x+5y=24$, $x+y=2$, $2x+y=9$.

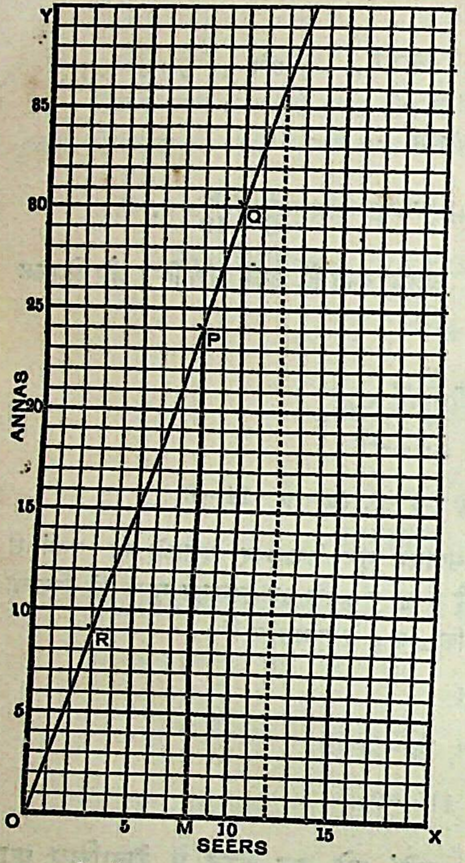
17. $2x-y=7$, $y-x=2$, $11x=9y$.

187. समीकरण-सम्बन्धी प्रश्नों को हल करने में रेखाचित्र का प्रयोग।

उदाहरण 1. एक सेर चावल का मूल्य यदि 3 आने हो तो दिखाओ कि वर्गांकित कागज़ पर एक ऐसी सरल रेखा खींची जा सकती है जिसके ऊपर के किसी बिन्दु का भुज चावल का वज़न बतलायगा, और उस बिन्दु का कोटि उतने वज़न चावल का मूल्य सूचित करेगा।

और इस सरल रेखा की सहायता से (i) 12 सेर चावल का दाम और (ii) 27 आने मूल्य के चावल का वज़न निकालो।

इस चित्र में मान लो कि OX अक्षरेखा पर छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई 'एक सेर' और OY अक्षरेखा पर एक बाहु की लम्बाई "एक आना" सूचित करती है। तो OX और OY के पास-पास जो अंक लिखे गए हैं उनका अर्थ स्पष्ट है।



चूँकि एक सेर का मूल्य 3 आना है, इसलिए 8 सेर का मूल्य 24 आना होगा। इसलिए P एक ऐसा विन्दु है जिसका भुज OM चावल का वज़न (अर्थात् 8 सेर) बतलाता है, और उसका कोटि PM उतने वज़न चावल का मूल्य (अर्थात् 24 आना) सूचित करता है।

OP सरल रेखा खींचो और उसको दोनों ओर बढ़ाओ। तो OP ही एक ऐसी सरल रेखा है जिसके ऊपर के किसी विन्दु के भुजकोटि P के भुजकोटि की भाँति परस्पर सम्बन्ध रखते हैं। इसलिए उसके ऊपर Q (10, 30) एक ऐसा विन्दु है, जिसका भुज चावल का वज़न बतलाता है और जिसका कोटि उतने वज़न चावल का मूल्य सूचित करता है। R (3, 9) विन्दु के भुजकोटि में ऐसा ही परस्पर सम्बन्ध है, आदि।

इसलिए OP ही पूछी हुई सरल रेखा है।

इस सरल रेखा की सहायता से चावल के किसी वज़न का मूल्य आसानी से निकाला जा सकता है। जैसे जिस विन्दु का भुज 12 है, उसका कोटि स्पष्टत: 36 है; इसलिए 12 सेर चावल का मूल्य 36 आने है।

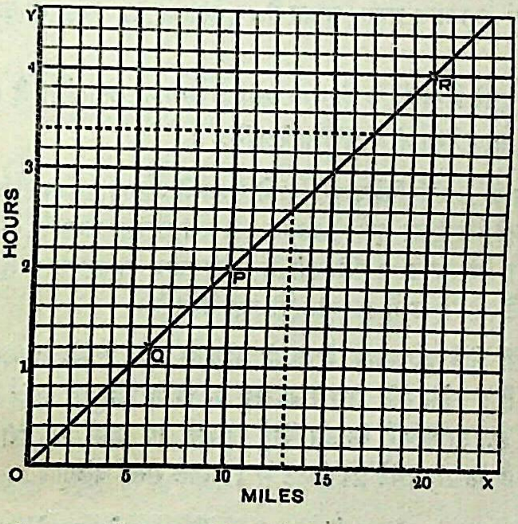
इस चित्र (अर्थात् OP सरल रेखा) से किसी विशेष मूल्य में कितना चावल मिलेगा

यह भी आसानी से मालूम किया जा सकता है। जैसे जिस विन्दु का कोटि 27 है, उसका भुज स्पष्टतः 9 है; इसलिए 27 आने में 9 सेर चावल मिलेगा।

टीका। *OP* सरल रेखा को चावल का मूल्य बतलानेवाला रेखाचित्र (price-graph) कहते हैं।

उदाहरण 2. *B* नाम का एक व्यक्ति घन्टे में पाँच मील की चाल से किसी स्थान से चलता है, तो दिखाओ कि सरल रेखा के रूप में एक ऐसा रेखाचित्र खींचा जा सकता है जिसके ऊपर के किसी बिन्दु का भुज बतलायगा कि *B* कितने मील चला है, और उसने जो समय लिया है वह उस विन्दु के कोटि द्वारा सूचित होगा।

इस रेखाचित्र से निकालो कि (i) 3 घण्टे 24 मिनट में *B* कितने मील चल सकता है, और (ii) 13 मील जाने में *B* को कितना समय लगेगा।



फर्ज़ करो कि *OX* के ऊपर छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई 'एक मील' और *OY* के ऊपर एक छोटे वर्ग के बाहु की लम्बाई '12 मिनट' समय सूचित करती है; और उसके अनुसार ऊपर दिखलाया हुआ रेखाचित्र खींचा गया है। तो *OX* व *OY* के पास-पास जो अंक लिखे गए हैं उनका अर्थ स्पष्ट है।

चूँकि *B* एक घन्टे में 5 मील रास्ता चलता है, इसलिए वह 2 घन्टे में 10 मील रास्ता चल सकेगा। इसलिए रेखाचित्र से मालूम होता है, कि *P* ऐसा एक विन्दु है जिसका भुज

जितने मील (यहां पर 10 मील) सूचित करता है, उस विन्दु का कोटि उस दूरी तक चलने में B का लगा हुआ समय (यहाँ 2 घन्टे) सूचित करता है।

OP सरल रेखा खींचो और उसे दोनों ओर बढ़ाओ। तो OP ही एक ऐसी सरल रेखा है, जिसके ऊपर के किसी विन्दु के भुजकोटि P के भुजकोटि की भांति परस्पर सम्बन्ध रखते हैं।

इस सरल रेखा पर एक दूसरा विन्दु Q लेकर भी देखा जाता है कि उसका भुज 6 मील और कोटि 1 घन्टा 12 मिनट समय सूचित करता है; परन्तु यह स्पष्ट है कि यह व्यक्ति 1 घंटा 12 मिनट में 6 मील रास्ता जाता है। इसलिए Q विन्दु भी ऊपर दी हुई शर्तों को पूरी करता है।

इसी प्रकार इस सरल रेखा पर एक और बिन्दु R लेकर देखा जाता है कि उसका भुज 20 मील और कोटि 4 घंटे का समय सूचित करता है। परन्तु हम जानते हैं कि यह व्यक्ति 4 घंटे में 20 मील रास्ता चलता है। इसलिए R विन्दु भी ऊपर दी हुई शर्तों को पूरी करता है।

इस रेखा पर दूसरे बिन्दुओं के लिए भी ऐसा ही सिद्धान्त लागू होता है।

इसलिए OP सरल रेखा ही पूछा हुआ रेखाचित्र है।

इस रेखाचित्र से B कोई विशेष दूरी कितने समय में जायगा यह आसानी से जाना जाता है। जैसे यदि किसी बिन्दु का भुज 13 मील की दूरी सूचित करता है, तो चित्र से मालूम होता है कि उस विन्दु का कोटि 2 घंटे 36 मिनट का समय सूचित करता है; इसलिए मालूम होता है कि B 2 घंटे 36 मिनट में 13 मील की दूरी जाता है।

और B किसी दिये हुए समय में कितने मील की दूरी जा सकेगा वह भी इस चित्र से निकाला जा सकता है। जैसे यदि उस रेखाचित्र पर किसी विन्दु का कोटि 3 घंटा 24 मिनट समय सूचित करता है, तो स्पष्ट है कि उस विन्दु का भुज 17 मील की दूरी सूचित करेगा। इसलिए जाना जाता है कि B 3 घंटे 24 मिनट में 17 मील रास्ता चलेगा।

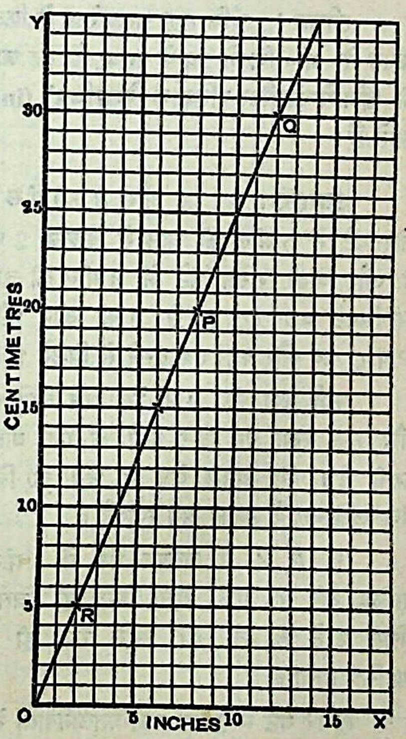
टीका। OP सरल रेखा को B की **'गति बतलानेवाला रेखाचित्र' (motion-graph)** कहते हैं।

उदाहरण 3. यदि एक इंच की लम्बाई 2·5 सेंटीमीटर की लम्बाई के बराबर है, तो दिखाओ कि एक ऐसी सरल रेखा खींची जा सकती है जिसके ऊपर के किसी बिन्दु का भुज जितने इंच सूचित करेगा उस विन्दु का कोटि लम्बाई में उसके बराबर सेंटीमीटर की नाप सूचित करेगा।

इस चित्र से निकालो कि (i) 10 इंच कितने सेन्टीमीटरों के बराबर हैं और (ii) 15 सेन्टीमीटर कितने इंचों के बराबर हैं।

अब फ़र्ज़ करो कि OX के ऊपर छोटे वर्ग के एक बाहु की लम्बाई "एक इंच" है, और OY के ऊपर छोटे वर्ग के एक बाहु की लम्बाई 'एक सेन्टीमीटर (से० मी०)' सूचित करती है; अब इसके अनुसार नीचे दिखाया हुआ चित्र खींचा गया है। तो OX व OY के पास-पास जो अंक लिखे गए हैं उनका अर्थ स्पष्ट है।

चूँकि 1 इंच = 2·5 सेन्टीमीटर है, इसलिए 8 इंच = 20 सेन्टीमीटर है। इसलिए नीचे दिये हुए चित्र में P एक ऐसा बिन्दु है, जिसका भुज जितनी इंच की लम्बाई सूचित करता है, उस बिन्दु का कोटि बतलाता है कि उस लम्बाई के अन्दर कितने सेन्टीमीटर हैं।



खींचकर O व P को मिलाओ, और उसको दोनों ओर बढ़ाओ। तो यह एक ऐसी सरल रेखा होगी जिसके ऊपर के किसी बिन्दु के भुजकोटि P के भुजकोटि की भांति परस्पर सम्बन्ध रखते हैं।

इस सरल रेखा पर एक दूसरा बिन्दु Q लेकर देखा जाता है कि उसका भुज 12 इंच और उसका कोटि 30 सेन्टीमीटर की लम्बाई सूचित करता है। किन्तु 12 इंच = 30 सेन्टीमीटर। इसलिए Q बिन्दु ऊपर दी हुई शर्त को पूरी करता है।

इस सरल रेखा पर एक और बिन्दु R लो। यह देखा जाता है कि इसका भुज 2 इंच और कोटि 5 से० मी० सूचित करता है। किन्तु चूँकि 2 इंच = 5 से० मी० है; इसलिए R बिन्दु भी ऊपर दी हुई शर्त को पूरी करता है।

इसी प्रकार दिखाया जा सकता है कि इस सरल रेखा पर कोई भी बिन्दु ऊपर दी हुई शर्त को सिद्ध करेगा। इसलिए OP ही पूछी हुई सरल रेखा है।

ऊपर दिये हुए रेखाचित्र (अर्थात् OP सरल रेखा) से कुछ दिये हुए इंच कितने सेन्टीमीटर के बराबर हैं वह आसानी से निकाला जा सकता है। जैसे रेखाचित्र से देखा जाता है कि जिस बिन्दु का भुज 10 इंच सूचित करता है उसका कोटि 25 सेन्टीमीटर सूचित करता है। और यह ठीक है कि 10 इंच की लम्बाई 25 से० मी० की लम्बाई के बराबर है।

और ऊपर दिये हुए रेखाचित्र से कुछ विशेष सेन्टीमीटर की लम्बाई कितने इंच की लम्बाई के बराबर है वह भी निकाला जा सकता है। जैसे इस सरल रेखा पर जिस बिन्दु का कोटि 15 से० मी० सूचित करता है, उसका भुज स्पष्टतः 6 इंच सूचित करता है। इसलिए जाना जाता है कि 15 से० मी० की लम्बाई 6 इंच की लम्बाई के बराबर है।

टीका। चूँकि OP सरल रेखा से कितने इंच कितने से० मी० के बराबर हैं, अथवा कितने से० मी० कितने इंच के बराबर हैं, यह जाना जाता है, इस कारण ऊपर दी हुई सरल रेखा को **'इंच-सेन्टीमीटर-परिवर्तक रेखाचित्र'** (**inch-centimetre conversion graph**) कहते हैं।

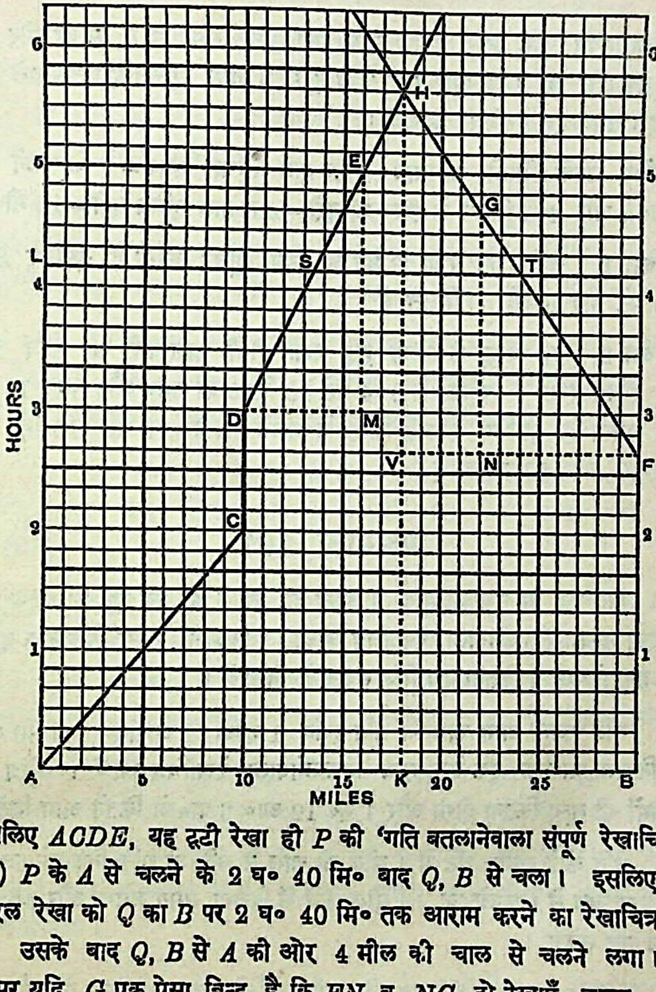
उदाहरण 4. A और B 30 मील की दूरी पर दो स्थान हैं। P, A से B की ओर घंटे में 5 मील की चाल से चलकर 2 घंटे के बाद रास्ते में 1 घंटा आराम करता है और बाक़ी रास्ता घंटे में 3 मील की चाल से चलता है। P के A से चलने के 2 घंटे 40 मिनट बाद Q, B से A की ओर घंटे में बराबर 4 मील की चाल से चलने लगा। P व Q कब और कहाँ एक दूसरे से मिलेंगे ?

फ़र्ज़ करो कि AB रेखा पर छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई 'एक मील' की दूरी, और BF रेखा पर छोटे वर्गों के एक बाहु की लम्बाई '10 मिनट' का समय सूचित करती है। तो अगले पेज में दिये हुए चित्र में AB व BF दो रेखाओं के पास-पास जो अंक लिखे गए हैं उनका अर्थ स्पष्ट है।

(i) P, A से चलकर घंटे में 5 मील की चाल से 2 घंटे में 10 मील गया। इसलिए यदि C एक ऐसा बिन्दु हो जिसके भुज व कोटि क्रमशः 10 मील व 2 घंटा सूचित करते हों तो AC सरल रेखा ही P की पहले 2 घंटे का गति बतलानेवाला रेखाचित्र होगा।

तीसरे घंटे में P का गति बतलानेवाला रेखाचित्र ऐसा होगा कि उसके ऊपर के किसी बिन्दु का भुज सर्वदा 10 मील सूचित करेगा ; क्योंकि इस घंटे में P एक ही स्थान पर रहा, इसलिए ऊपर दिये हुए चित्र में CD सरल रेखा ही P के तीसरे घंटे का (अर्थात् P के आराम करने का) रेखाचित्र होगा।

तीसरे घंटे के बाद P घंटे में 3 मील को चाल से चलने लगा। चूँकि रेखाचित्र में DM 6 मील का रास्ता और ME 2 घंटे का समय सूचित करता है, इसलिए DE सरल रेखा ही P के तीसरे घंटे के बाद की गति-बतलानेवाला रेखाचित्र होगा।



इसलिए $ACDE$, यह टूटी रेखा ही P की 'गति बतलानेवाला संपूर्ण रेखाचित्र होगा।

(ii) P के A से चलने के 2 घ॰ 40 मि॰ बाद Q, B से चला। इसलिए रेखाचित्र में BF सरल रेखा को Q का B पर 2 घ॰ 40 मि॰ तक आराम करने का रेखाचित्र माना जा सकता है। उसके बाद Q, B से A की ओर 4 मील की चाल से चलने लगा। इसलिए रेखाचित्र पर यदि G एक ऐसा बिन्दु है कि FN व NG दो रेखाएँ क्रमशः 8 मील का पथ व 2 घंटे का समय सूचित करती हैं, तो स्पष्ट है कि FG सरल रेखा ही Q कि गति बतलानेवाला रेखाचित्र होगा।

(iii) फ़र्ज़ करो कि ये दो रेखाचित्र (अर्थात् P की गति बतलानेवाला सम्पूर्ण रेखाचित्र और Q की गति-बतलानेवाला रेखाचित्र) H बिन्दु पर काटते हैं; H से AB के ऊपर HK लम्ब खींचो और FN को बढ़ाकर HK रेखा के साथ V बिन्दु पर मिलाओ।

इसलिए स्पष्ट जाना जाता है कि HK द्वारा सूचित समय में P, B की ओर AK द्वारा सूचित दूरी तक और Q, A को ओर BK (अर्थात् FV) द्वारा सूचित दूरी तक चले हैं; और इस कारण इस समय एक दूसरे से मिले हैं।

इसलिए उनके मिलने का समय $=HK$ द्वारा सूचित समय $=P$ के चलने के 5 घंटे 40 मि॰ बाद; और A से मिलने के स्थान की दूरी $=AK$ द्वारा सूचित दूरी $=18$ मील।

टीका 1. चूँकि HV रेखा 3 घंटे का समय सूचित करती है, इसलिए B से Q के चलने के 3 घंटे बाद P और Q मिलते हैं।

टीका 2. L बिन्दु से खींची हुई रेखा दोनों रेखाचित्रों को S व T बिन्दु पर काटती है (चित्र देखो)। चूँकि AL 4 घंटे 10 मिनट का समय और ST, $10\frac{1}{3}$ मील की दूरी सूचित करता है, इसलिए स्पष्ट है कि P के चलने का बाद 4 घंटे 10 मि॰ के समय P व Q में $10\frac{1}{3}$ मील का फ़ासला है।

प्रश्नमाला 101

1. यदि एक सेर दूध का मूल्य 4 आना हो, तो 5 सेर तक दूध का मूल्य निकाला जा सके एक ऐसा मूल्य निकालनेवाला रेखाचित्र खींचो। चित्र से 3 सेर 5 छटाँक दूध का मूल्य और 10 आना 9 पाई में कितना दूध मिल सकता है निकालो।

2. यदि फ़जली आम का मूल्य प्रति दर्जन 1 रुपया 2 आना हो, तो 30 आमों तक का मूल्य निकाला जा सके एक ऐसा मूल्य निकालनेवाला रेखाचित्र खींचो। चित्र से निकालो कि 17 आमों का मूल्य कितना होगा और 1 रु॰ 12 आ॰ 6 पा॰ में कितने आम मिलेंगे।

3. यदि कोई व्यक्ति घंटे में 4 मील की चाल से चले तो गति निकालनेवाला रेखाचित्र खींचो। रेखाचित्र से निकालो कि 13 मील जाने में कितना समय लगेगा और $4\frac{3}{4}$ घंटों में वह कितने मील चल सकेगा।

4. यदि एक हाथ 1·5 फ़ुट के समान हो तो एक 'हाथ-फ़ुट परिवर्तक' रेखाचित्र खींचो। रेखाचित्र से निकालो कि $5\frac{3}{4}$ हाथ कितने फ़ुट के समान हैं, और $6\frac{3}{4}$ फ़ुट कितने हाथों के समान हैं।

5. A किसी स्थान से किसी खास ओर को घंटे में 3 मील की चाल से चला, और A के चलने के 1 घंटे बाद B उसी स्थान से उसी ओर घंटे में 5 मील की चाल से चला। A और B का गति निकालनेवाला रेखाचित्र खींचो और उससे निकालो कि B, A से कहाँ और कब मिलेगा।

6. A व B 20 मील की दूरी पर दो स्थान हैं। P, A से B की ओर घंटे में 3 मील की चाल से और Q, B से A की ओर घंटे में 2 मील की चाल से एक ही समय चलते हैं। P व Q का गति निकालनेवाला रेखाचित्र खींचो। और उससे निकालो कि वह कहाँ और कब एक दूसरे से मिलेंगे।

7. एक ही प्रकार की 50 वस्तुओं का मूल्य यदि 3 रु० 2 आ० हो, तो 50 वस्तुओं तक का मूल्य निकाला जा सके एक ऐसा मूल्य निकालनेवाला रेखाचित्र खींचो। इससे निकालो कि 19 वस्तुओं का मूल्य कितना है, और 2 रु० 7 आ० में कितनी वस्तुएँ मिलेंगी।

8. यदि 1 किलोग्राम 2·2 पाउंड के बराबर हो तो एक ऐसा 'किलोग्राम-पाउंड परिवर्तक' रेखाचित्र खींचो जिसके द्वारा 15 पाउंड तक का वज़न किलोग्राम में निकाला जा सके। इस रेखाचित्र से निकालो कि 11 पाउंड कितने किलोग्राम के बराबर हैं।

9. एक व्यक्ति घंटे में 2 मील की चाल से 3 घंटा चलने के बाद, डेढ़ घंटा आराम करके फिर घंटे में $2\frac{1}{2}$ मील की चाल से चलने लगा। तो उसका गति बतलानेवाला रेखाचित्र खींचो।

10. एक व्यक्ति B से C की ओर घंटे में 4 मील की चाल से चलने लगा। 3 घंटे बाद वह अपनी राय बदलकर फिर B की ओर घंटे में 3 मील की चाल से लौटने लगा। इस प्रकार 2 घंटे चलने के बाद फिर उसने अपनी राय बदली, और वह C की ओर घंटे में 7 मील की चाल से दौड़ने लगा। उसका गति निकालनेवाला रेखाचित्र खींचो।

11. किसी रास्ते पर A, B व C एक के बाद एक तीन स्थान हैं, और A से B की दूरी 6 मील है। Q ठीक दोपहर के समय B से C की ओर घंटे में 3 मील की चाल से चलने लगा। और P डेढ़ बजे A से C की ओर घंटे में $6\frac{1}{2}$ मील की चाल से दौड़ने लगा। उनकी गति बतलानेवाले दो रेखाचित्र खींचो और निकालो कि P कब और किस समय Q से मिलेगा।

12. कोई व्यक्ति 40 दिन में 620 रु० खर्च करता है। एक ऐसा रेखाचित्र खींचो, जिसके द्वारा यह निकाला जा सके कि कितने दिन में वह कितने रुपये खर्च करता है। इस चित्र से निकालो कि 28 दिन में वह कितना खर्च करता है।

13. 3 व 4 बजे के बीच में किस समय घड़ी की दोनों सूइयाँ एक साथ होंगी; रेखाचित्र द्वारा निकालो।

14. आमदनी पर फ़ी रुपये में 5 पाई टैक्स (income-tax) लगता है। एक ऐसा रेखाचित्र खींचो जिस पर 3000 से 5000 रुपये तक की आमदनी का टैक्स निकाला जा सके। और इस रेखाचित्र से निकालो कि कितना आमदनी पर 85 रुपये टैक्स लगेगा, और 4350 रुपये पर कितना टैक्स पड़ेगा।

15. फ़तेहपुर से इलाहाबाद जानेवाली एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी (express train) और इलाहाबाद से फ़तेहपुर जानेवाली एक पसेञ्जर रेलगाड़ी के भिन्न-भिन्न स्टेशनों पर पहुँचने और छोड़ने का समय यहाँ दिया गया है। दोनों में से प्रत्येक रेलगाड़ी यदि अपनी अपनी चाल से बराबर चलती रहे और इलाहाबाद से फ़तेहपुर तक जाने में हर स्टेशन पर यदि पसेञ्जर गाड़ी 1 मिनट रुके, तो निकालो कि कहाँ व कब वे एक दूसरे से मिलेंगी।

इलाहाबाद से दूरी		छूटने का समय ↓	↑
	इलाहाबाद	18-3	20-20
6	मील बमरौली	18-16	
11	,, मनौरी	18-27	
14	,, सैयद सरावान	18-34	
19	,, मनोहरगंज	18-45	
24	,, भरवारी	18-56	
30	,, शुजातपुर	19-9	
36	,, सिराथू	19-22	
41	,, आठसराई	19-33	
47	,, कटोघन	19-46	
52	,, खागा	19-57	
61	,, रसूलाबाद	20-16	
66	,, फैजुल्लापुर	20-27	
73	,, फ़तेहपुर	20-41	18-18

उनतीसवाँ अध्याय

घातांक नियम (Laws of Indices)

188. परिभाषा : यदि m गुणनखंडों में से प्रत्येक गुणनखंड a हो तो उन गुणनखंडों के गुणनफल को a^m द्वारा सूचित किया जाता है। [नियम 15]

इसलिए यदि m एक धनात्मक अभिन्न राशि हो तो a^m का अर्थ आसानी से मालूम होता है।

189. घातांक नियम व उससे जो सिद्धान्त निकलते हैं : यदि m व n दो धनात्मक अभिन्न राशियाँ हों तो सिद्ध करो कि

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ होगा।}$$

चूँकि $\quad a^m = a.a.a.\ldots\ldots\ldots m$-गुणनखंड तक

और $\quad a^n = a.a.a.a \ldots\ldots\ldots n$-गुणनखंड तक

$\therefore \quad a^m \times a^n = (a.a.a.\ldots\ldots m$-गुणनखंड तक $)$

$\qquad\qquad \times (a.a.a.a.\ldots\ldots n$-गुणनखंड तक $)$

$\qquad\qquad = a.a.a.a.a.a.a.a.\ldots\ldots (m+n)$-गुणनखंड तक

$\qquad\qquad = a^{m+n}.$

इसी को **घातांक नियम (Index Law)** कहते हैं।

उपसिद्धान्त 1. $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$, यह सिद्ध करना है, जब कि m, n, p में से प्रत्येक धनात्मक राशि हो।

चूँकि $\quad a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\therefore \quad a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{(m+n)+p}$

$$= a^{m+n+p}.$$

इसलिए $\quad a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \cdots\cdots = a^{m+n+p+q+\cdots\cdots}.$

इसलिए जाना जाता है कि किसी संख्या के भिन्न-भिन्न घातों का गुणनफल, उस संख्या का एक ऐसा घात है, जिसका घातांक दिये हुए घातों के योगफल के बराबर है।

उपसिद्धान्त 2. यदि m व n दो धनात्मक अभिन्न संख्यायें हों, तो

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ होगा।}$$

चूँकि $\quad (a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n$-गुणनखंड तक

$\qquad = a^{m+m+m+\cdots\cdots n\text{-पदों तक}}$ [उपसिद्धान्त 1 से]

$\therefore \quad = a^{mn}.$

उपसिद्धान्त 3. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ यह सिद्ध करना है, जब कि m व n दो धनात्मक अभिन्न राशियाँ हों और $m > n$.

चूँकि $a^{m-n} \times a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$ [क्योंकि $m-n$ एक धनात्मक अभिन्न है]

$$\therefore \quad a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

190. यदि मान लिया जाय कि m व n के किसी प्रकार के मूल्य के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$ सिद्ध होगा, तो किसी संख्या के भिन्न या ऋणात्मक घातांकवाले घातों का अर्थ निकालना :

(i) यदि p व q कोई दो धनात्मक अभिन्न राशियाँ हों, तो $a^{\frac{p}{q}}$ का अर्थ निकालना :

चूँकि m व n के किसी भी मूल्य के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$ होगा,

इसलिए m और n प्रत्येक के लिए $\frac{p}{q}$ प्रयोग करने पर

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}};$$

इसी प्रकार $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{3p}{q}}$; आदि ;

इसलिए $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times \cdots\cdots$ q-गुणनखंडों तक $= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$.

इसलिए $a^{\frac{p}{q}}$, a^p का q-वाँ मूल (q^{th} root) सूचित करता है।

$$\text{इसलिए} \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

उपसिद्धान्त। इसलिए स्पष्ट है कि $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ आदि ;

साधारण रूप से लिखने पर, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

टीका। घातांक नियम से आसानी से जाना जाता है कि

$$a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \cdots\cdots p\text{-वें गुणनखंड तक} = a^{\frac{p}{q}}.$$

इसलिए $a^{\frac{p}{q}}$ को $a^{\frac{1}{q}}$ का p-वाँ घात अर्थात् $(\sqrt[q]{a})^p$ भी माना जा सकता है।

इसलिए, $a^{\frac{p}{q}}$ का 'a के p-वें घात का q-वाँ मूल' अथवा 'a के q-वें मूल का p-वाँ घात' इन दोनों में से किसी रूप में अर्थ किया जा सकता है।

(ii) a^0 का अर्थ निकालना :

चूँकि m व n के सब प्रकार के मूल्यों के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$ है, इसलिए m के लिए 0 रखने पर

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n ; \quad \therefore \quad a^0 = a^n \div a^n = 1.$$

इसलिए, किसी संख्या को 0 घात में लाने पर उसका मूल्य 1 (unity) होगा।

(iii) यदि n कोई धनात्मक अभिन्न राशि हो, तो a^{-n} का अर्थ प्रकट करना :

चूँकि m व n के सब प्रकार के मूल्यों के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$ है,

इसलिए m के बदले $-n$ लिखने पर

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 ;$$

$$\therefore \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{और} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

उपसिद्धान्त। इसलिए m व n के सब प्रकार के मूल्यों के लिए $a^m \div a^n = a^{m-n}$ होगा।

$$\text{क्योंकि,} \quad a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

उदाहरण 1. $8^{\frac{5}{3}}$ का मूल्य निकालो।

$$8^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32.$$

उदाहरण 2. $4^{-\frac{5}{2}}$ का मूल्य निकालो।

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(\sqrt{4})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

उदाहरण 3. गुणा करो :

$$\sqrt{a^5},\ a^{\frac{3}{4}},\ \sqrt[4]{a^{-5}} \quad \text{और} \quad \frac{1}{a^{-3}} \text{ को।}$$

$$\text{पूछा हुआ गुणनफल} = a^{\frac{5}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{5}{4}} \times a^3$$

$$= a^{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}+3}$$

$$= a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+3} = a^{2+3} = a^5.$$

प्रश्नमाला 102

भिन्न अथवा ऋणात्मक घातांक प्रयोग न करके निम्नलिखित व्यंजकों को प्रकट करो :

1. $a^{\frac{5}{7}}$. 2. $x^{-\frac{8}{3}}$. 3. $\frac{3}{x^{-\frac{4}{5}}}$. 4. $x^{-\frac{2}{5}} \times 3a^{-\frac{1}{3}}$.

5. $8m^{-2} \times m^{-\frac{3}{8}}$. 6. $x^{-\frac{4}{5}} + 3a^{-\frac{5}{4}}$. 7. $x^{-\frac{3}{5}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$.

8. $\sqrt[5]{x^{2}} + \sqrt[5]{x^{-a}}$. 9. $\sqrt[2m]{a^{-5}} \times \sqrt[m]{a^{3}}$. 10. $\sqrt[4a]{x^{6}} + \sqrt[3a]{x^{-5}}$.

करणीचिह्न अथवा ऋणात्मक घातांक विना प्रयोग किये निम्नलिखित राशियों को प्रकट करो :

11. $(\sqrt[3]{x})^{7}$. 12. $(\sqrt[4]{a})^{-6}$. 13. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$.

14. $\frac{1}{(\sqrt[5]{a})^{-2}}$. 15. $\sqrt[3]{x^{4}} + (\sqrt[6]{x})^{-1}$. 16. $\sqrt[4]{a^{-8}} + (\sqrt[6]{a})^{-12}$.

मूल्य निकालो :

17. $4^{-\frac{3}{2}}$. 18. $8^{\frac{2}{3}}$. 19. $9^{\frac{3}{2}}$. 20. $16^{\frac{5}{4}}$.

21. $81^{-\frac{3}{4}}$. 22. $\frac{1}{6^{-2}}$. 23. $(125)^{-\frac{2}{3}}$. 24. $(\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}}$.

25. $(\frac{1}{216})^{-\frac{2}{3}}$. 26. सरल करो : $\frac{x^{m+2n}x^{3m-8n}}{x^{5m-6n}}$. [क० ए०, 1874.]

191. सिद्ध करना होगा कि m व n के किसी मूल्य के लिए $(a^m)^n = a^{mn}$ होगा।

(i) फ़र्ज़ करो कि n एक धनात्मक अभिन्न राशि है। तो m कोई भी राशि हो हर हालत में

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n\text{-गुणनखंड तक}$$
$$= a^{m+m+m+\cdots\cdots} n\text{-पद तक}$$
$$= a^{mn}.$$

(ii) फ़र्ज़ करो कि n एक धनात्मक भिन्न है, जो कि $\frac{p}{q}$ के बराबर है, और p व q प्रत्येक एक धनात्मक अभिन्न राशि है, तो

$$\left(a^m\right)^n=\left(a^m\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(a^m\right)^p} \qquad \text{[नियम 190, (i) से]}$$
$$=\sqrt[q]{a^{mp}} \qquad \text{[(i) से]}$$
$$=a^{\frac{mp}{q}}=a^{mn}. \qquad \text{[नियम 190, (i) से]}$$

(iii) फ़र्ज़ करो कि n एक ऋणात्मक राशि है, जो कि $-p$ के बराबर है, और p एक धनात्मक राशि है, तो

$$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p} \qquad \text{[नियम 190, (iii) से]}$$
$$=\frac{1}{a^{mp}} \qquad \text{[(i) और (ii) से]}$$
$$=a^{-mp} \qquad \text{[नियम 190, (iii) से]}$$
$$=a^{m(-p)}=a^{mn}.$$

इसलिए यह नियम सिद्ध हुआ।

192. सिद्ध करना होगा कि $a^nb^n=(ab)^n$ जब कि n कोई राशि हो।

(i) फ़र्ज़ करो कि n एक धनात्मक अभिन्न राशि है। तो

$$a^nb^n=(a.a.a.\ldots\ldots\ldots n\text{-गुणनखंड तक})$$
$$\times(b.b.b.b.\ldots\ldots\ldots n\text{-गुणनखंड तक})$$
$$=(ab.ab.ab.\ldots\ldots\ldots n\text{-गुणनखंड तक})$$
$$=(ab)^n.$$

(ii) फ़र्ज़ करो कि n एक धनात्मक भिन्न है, जो कि $\frac{p}{q}$ के बराबर है, और p व q प्रत्येक धनात्मक अभिन्न राशि है। तो a^nb^n के बदले x रखने पर

$$x=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}};\ \therefore\ x^q=\left(a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}\right)^q$$
$$=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\times\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q \qquad \text{[(i) से]}$$
$$=a^p\times b^p \qquad \text{[नियम 189 से]}$$
$$=(ab)^p; \qquad \text{[(i) से]}$$
$$\therefore\ x=(ab)^{\frac{p}{q}};\ \text{ अर्थात् } a^nb^n=(ab)^n.$$

(iii) फ़र्ज़ करो कि n एक ऋणात्मक राशि है, जो कि $-p$ के बराबर है; और p एक धनात्मक राशि है। तो

$$a^nb^n = a^{-p}b^{-p}$$

$$= \frac{1}{a^pb^p} \qquad \text{[नियम 190, (iii) से]}$$

$$= \frac{1}{(ab)^p} \qquad \text{[(i) और (ii) से]}$$

$$= (ab)^{-p} \qquad \text{[नियम 190, (iii) से]}$$

$$= (ab)^n.$$

इसलिए यह नियम सिद्ध हुआ।

उपसिद्धान्त 1. $\frac{a^n}{b^n} = a^nb^{-n} = a^n\left(b^{-1}\right)^n = \left(ab^{-1}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

उपसिद्धान्त 2. $a^nb^nc^n = (ab)^nc^n = (abc)^n$;

साधारण रूप से $a^nb^nc^nd^n\cdots\cdots = (abcd\cdots\cdots)^n$.

193. ऊपर जो दो नियम दिये गये हैं उनका प्रयोग :

उदाहरण 1. सरल करो : $\left(a^8b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

$$\left(a^8b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(a^8\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= a^{8\times\left(-\frac{3}{4}\right)} \times b^{\frac{5}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)} = a^{-6}b^{-\frac{5}{4}}.$$

उदाहरण 2. सरल करो : $\sqrt{a^{-2}b} \times \sqrt[3]{ab^{-3}}$.

$$\sqrt{a^{-2}b} = (a^{-2}b)^{\frac{1}{2}} = (a^{-2})^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = a^{-1}b^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{और } \sqrt[3]{ab^{-3}} = (ab^{-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times (b^{-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}b^{-1}.$$

$$\text{इसलिए दिया हुआ व्यंजक} = a^{-1}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$$

$$= a^{-1+\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{2}-1} = a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}.$$

उदाहरण 3. सरल करो : $\sqrt{a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}} \div \sqrt[3]{a^4 b^{-1} c^{\frac{5}{4}}}$.

$$\sqrt{a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}} = \left(a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^3)^{\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}};$$

और $\sqrt[3]{a^4 b^{-1} c^{\frac{5}{4}}} = \left(a^4 b^{-1} c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= (a^4)^{\frac{1}{3}} (b^{-1})^{\frac{1}{3}} \left(c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{3}} c^{\frac{5}{12}}.$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक

$$= a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}} \div a^{\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{3}} c^{\frac{5}{12}} = a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}} \times a^{-\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{3}} c^{-\frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}-\frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{1}{6}} b^0 c^{-1} = a^{\frac{1}{6}} c^{-1}.$$

प्रश्नमाला 103

सरल करो :

1. $\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^8$. 2. $\left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$. 3. $\left(a^{-\frac{1}{2}} b^{-3}\right)^{-2}$. 4. $\left(a^6 b^{\frac{5}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

5. $\left(\sqrt[3]{a^4 b^3}\right)^6$. 6. $\left(\sqrt[6]{x^9 y^{-3}}\right)^{-3}$. 7. $\sqrt[3]{x^2 . \sqrt[4]{x^{-3}}}$.

8. $\sqrt{a^{-3} b^4} \times \sqrt[4]{a^2 b^{-8}}$. 9. $\sqrt[4]{x^{-2} \sqrt{y^5}} \times \sqrt{x . \sqrt[4]{y^3}}$.

10. $(8x^3 + 27a^{-3})^{\frac{2}{3}}$. 11. $(64x^3 + 27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$.

12. $\sqrt[3]{a^6 b^{-2} c^{-4}} \times \sqrt[4]{a^{-6} b^4 c^8}$. 13. $\sqrt{a^{-\frac{2}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{3}}} \div \sqrt[3]{a^2 b^4 c^{-1}}$.

14. $\sqrt{ab^{-2} c^3} \div \left(\sqrt[3]{a^3 b^2 c^{-3}}\right)^{-1}$. 15. $\left(\dfrac{a^{-1} b^2}{a^2 b^{-4}}\right)^7 \div \left(\dfrac{a^3 b^{-5}}{a^{-2} b^3}\right)^{-5}$.

194. विविध प्रश्नमाला :

उदाहरण 1. $a+b+c+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ द्वारा भाग करो।

भाज्य व भाजक प्रत्येक को a के घातों के अवरोहक्रम से लिखकर भाग किया जाता है।

$$a^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})\ \big)\ a+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c)\ \big(\ a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}})+(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}})$$

$$\underline{a+a^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})}$$

$$a^{\frac{2}{3}}(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}})+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c)$$

$$\underline{a^{\frac{2}{3}}(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}})+a^{\frac{1}{3}}(2b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{2}{3}})}$$

$$a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}})+(b+c)$$

$$\underline{a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}})+(b+c)}$$

पूछा हुआ भजनफल $=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}.$

टीका। गुणन अथवा भाग करने के समय व्यंजकों को उनमें दिये हुए किसी साधारण अक्षर के घातों के आरोह अथवा अवरोहक्रम से सजाने की पद्धति को कभी ध्यान से न हटाना चाहिए। इस प्रकार हर प्रश्न में पदों को सजाने की आवश्यक्ता न होने पर भी ऐसा करने से भाग अथवा गुणन क्रिया बहुत सुन्दरता और आसानी से की जा सक्ती है।

उदाहरण 2. $x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$ को $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}$ से भाग करो।

$x^{\frac{1}{3}}$ के लिए a, $y^{\frac{1}{6}}$ के लिए b, और $z^{\frac{1}{9}}$ के लिए c रख करके

$$x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}})\{(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{6}})^2+(z^{\frac{1}{9}})^2-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}c^{\frac{1}{3}}\}$$

$$=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}})(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}).$$

इसलिए पूछा हुआ भजनफल $= x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}$

$$= x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}\right) + \left(y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{3}}\right).$$

उदाहरण 3. भाग करो :

$$x^{2^n} + a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}} + a^{2^n} \text{ को } x^{2^{n-1}} - a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}} + a^{2^{n-1}} \text{ से।}$$

फ़र्ज़ करो कि $m = x^{2^{n-2}}$ और $n = a^{2^{n-2}}$.

इसलिए $m^2 = \left(x^{2^{n-2}}\right)^2 = x^{2\times 2^{n-2}} = x^{2^{n-1}}$,

और $m^4 = (m^2)^2 = \left(x^{2^{n-1}}\right)^2 = x^{2\times 2^{n-1}} = x^{2^n}$.

इसी प्रकार $n^2 = a^{2^{n-1}}$ और $n^4 = a^{2^n}$.

इसलिए
$$\frac{x^{2^n} + a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}} + a^{2^n}}{x^{2^{n-1}} - a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}} + a^{2^{n-1}}}$$

$$= \frac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^2 - mn + n^2} = \frac{(m^2+n^2)^2 - m^2n^2}{m^2 - mn + n^2}$$

$$= \frac{(m^2 + n^2 + mn)(m^2 + n^2 - mn)}{m^2 - mn + n^2}$$

$$= m^2 + mn + n^2$$

$$= x^{2^{n-1}} + x^{2^{n-2}}a^{2^{n-2}} + a^{2^{n-1}}.$$

उदाहरण 4. $a^2 + 2b^2 + (a + 2b)\sqrt{ab}$ और $a^2 - b^2 + (a - b)\sqrt{ab}$ का म० स० अ० निकालो।

पहला व्यंजक $= a^2 + a\sqrt{ab} + 2b\sqrt{ab} + 2b^2 = a^2 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + 2b^2$

$$= a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) + 2b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + 2b^{\frac{3}{2}}\right).$$

दूसरा व्यंजक $= a^2 + a\sqrt{ab} - b\sqrt{ab} - b^2 = a^2 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} - b^2$

$$= a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) - b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right).$$

अब चूँकि $a^{\frac{3}{2}} + 2b^{\frac{3}{2}}$ और $a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}$ का कोई सार्व गुणनखंड नहीं है,

इसलिए पूछा हुआ म० स० अ० $= a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

उदाहरण 5. सरल करो : $\dfrac{x+(xy^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2y)^{\frac{1}{3}}}{x+y}$.

दिया हुआ अंश $=x+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)$;

दिया हुआ हर $=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right)+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$$=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right).$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$.

उदाहरण 6. सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}}+\frac{1}{1+x^{n-m}+x^{n-p}}+\frac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}}=1.$$

भिन्न का पहला पद $=\dfrac{x^{-m}}{x^{-m}(1+x^{m-n}+x^{m-p})}=\dfrac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$;

दूसरा पद $=\dfrac{x^{-n}}{x^{-n}(1+x^{n-m}+x^{n-p})}=\dfrac{x^{-n}}{x^{-n}+x^{-m}+x^{-p}}$;

और तीसरा पद $=\dfrac{x^{-p}}{x^{-p}(1+x^{p-m}+x^{p-n})}=\dfrac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-m}+x^{-n}}$.

इसलिए दिया हुआ व्यंजक

$$=\frac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}+\frac{x^{-n}}{x^{-n}+x^{-m}+x^{-p}}+\frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-m}+x^{-n}}$$

$$=\frac{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}=1.$$

उदाहरण 7. यदि $a^b=b^a$ हो, तो सिद्ध करो कि $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$; और यदि $a=2b$ हो, तो सिद्ध करो कि $b=2$.

चूँकि $a^b=b^a$, $\therefore\ a=b^{\frac{a}{b}}$ [दोनों पक्षों का b-वाँ मूल निकालने पर]

इसलिए $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}}=\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{a}=a^{\frac{a}{b}-1}$.

अब यदि $a=2b$ हो, तो चूँकि $a^b=b^a$ है

इसलिए $(2b)^b=(b)^{2b}=(b^2)^b$; $\therefore\ 2b=b^2$; $\therefore\ b=2$.

उदाहरण 8. यदि $x=\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+3bx-2a=0$.

फ़र्ज़ करो कि $a+\sqrt{a^2+b^3}=m$ और $n=a-\sqrt{a^2+b^3}$ है।

इसलिए $x^3=\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3+3m^{\frac{1}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)$

$$=m+n+3(mn)^{\frac{1}{3}}.\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)=m+n+3(mn)^{\frac{1}{3}}.x.$$

किन्तु $m+n=2a$,

और $(mn)^{\frac{1}{3}}=\{a^2-(a^2+b^3)\}^{\frac{1}{3}}=(-b^3)^{\frac{1}{3}}=-b$;

$\therefore\quad x^3=2a-3bx.\qquad\therefore\quad x^3+3bx-2a=0.$

प्रश्नमाला 104

गुणा करो :

1. $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1$ को $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1$ से।
2. $a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}$ से।
3. $1+ab^{-1}+a^2b^{-2}$ को $1-ab^{-1}+a^2b^{-2}$ से।
4. $x+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$ को $x-2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$ से।
5. $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ को $x^{-1}-x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ से।
6. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$ को $a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$ से।
7. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ को $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ से।
8. $a^m+3b^n-2c^p$ को $a^m-3b^n+2c^p$ से।
9. $a^{\frac{5}{2}}+8ab+4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}+2a^2b^{\frac{1}{3}}+32b^{\frac{5}{3}}+16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}$ को $a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{3}}$ से।
10. $a^{\frac{5}{8}}+a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{8}}+x^{-\frac{5}{8}}+a^{\frac{3}{8}}x^{-\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{8}}$ को $a^{\frac{3}{8}}+a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{3}{8}}-a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{8}}$ से

भाग करो :

11. $x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+6x-x^3$ को $x^{\frac{3}{2}}+2-4x^{\frac{1}{2}}$ से।
12. $8+12x^{-1}+2x^{-2}+2x^{-4}$ को $x^{-2}-2x^{-1}+4$ से।

13. $xy^{-1} + 2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + 3 + 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{-1}y$ को $x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}$ से।

14. $a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}}b + ab^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b^2 + b^{\frac{5}{2}}$ को $a^{\frac{3}{2}} - ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b - b^{\frac{3}{2}}$ से।

15. $8x^{-n} - 8x^{n} + 5x^{3n} - 3x^{-3n}$ को $5x^{n} - 3x^{-n}$ से।

16. $8x^{\frac{3}{3}} + y^{-\frac{3}{2}} - z + 6x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}$ को $2x^{\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{3}}$ से।

17. सिद्ध करो कि $x^3 + a^3 + x^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{3}{8}}$ से विभाज्य है।

18. गुणा करो : $x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}$ को $x^{2^{n-1}} - a^{2^{n-1}}$ से।

19. भाग करो : $x^{2^{n}} - y^{2^{n}}$ को $x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}$ से। [क० ए०, 1879.]

20. सरल करो : $\left\{\left(a^{m}\right)^{m-\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{1}{m+1}}$.

21. भाग करो : $2x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{1}{4}} + x - 2x^{\frac{1}{2}}$ को $x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{4}}$ से।

22. वर्ग निकालो : $x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{3}}$.

23. भाग करो : $x^{\frac{3n}{2}} - a^{\frac{3n}{2}}$ को $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{2}}$ से।

24. वर्ग निकालो : $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{3}}$.

25. भाग करो : $ax^{-1} + a^{-1}x + 2$ को $a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} - 1$ से।

सरल करो :

26. $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)^{-1}$.

27. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} + 3y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 9y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 9y^{\frac{2}{3}}}$.

28. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} - ax^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x - x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} - a^{2}x^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{3}{2}}x - 3ax^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x^{2} - x^{\frac{5}{2}}}$.

29. $\dfrac{a^2 + b^2 - a^{-2} - b^{-2}}{a^2b^2 - a^{-2}b^{-2}} + \dfrac{(a - a^{-1})(b - b^{-1})}{ab + a^{-1}b^{-1}}$.

30. $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$.

31. $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) - a^{-1}b^{-1}c^{-1}(b+c)(c+a)(a+b)$.

32. $\dfrac{a^{-1}(ab^{-1}-1)^2}{b^{-2}(1+a^{-1}b)} \times \dfrac{b^2(a^{-2}+b^{-2})}{a(ab^{-1}-a^{-1}b)} + \dfrac{1-a^{-1}b}{ab^{-1}+1}$.

33. $\dfrac{x^{\frac{3}{3}}-a^{\frac{3}{3}}}{x-a}\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}+a^{\frac{1}{3}}\right)+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}{x+a}\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}-a^{\frac{1}{3}}\right).$

34. $\dfrac{x^{3n}}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}-\dfrac{1}{x^n-1}+\dfrac{1}{x^n+1}$, जब $x=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.

35. सिद्ध करो : $\dfrac{x^{2^n}-y^2}{x-y}=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right).$

36. असल भाग न देकर मूल्य निकालो :

$$\left(\frac{x^{-8}}{256}-\frac{y^{-12}}{625}\right)\div\left(\tfrac{1}{4}x^{-2}+\tfrac{1}{5}y^{-3}\right).$$

हल करो :

37. $\dfrac{\left(p+\dfrac{1}{q}\right)^m\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^m}{\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^m\left(q-\dfrac{1}{p}\right)^m}$ [ब० ए०, 1889.]

38. $\dfrac{\left(p^2-\dfrac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\dfrac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}$, [ब० ए०, 1891.]

39. $\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2}\times\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2}\times\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}$. [क०. ए० 1904.]

40. यदि $x=a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+3x=a-\dfrac{1}{a}$.

195. चल घातवाले समीकरण (Exponential Equations) :

परिभाषा : जिन समीकरण में एक या अनेक चल घात (indices or exponents) हों उसे चल घातवाले समीकरण (Exponential equation)) कहते हैं।

जैसे, $3^x=27$, $81^x=9^{x+4}$ आदि चल घातवाले समीकरण हैं। इसी प्रकार $3^{x+y}=9$ और $8^x.\ 16^y=128$, दोनों चल घातवाले युगपत समीकरण हैं।

चल घातवाले समीकरणों को हल करने की रीति नीचे दी हुई स्वयं-सिद्धि के अनुसार है :

चाहे a का कोई मूल्य हो यदि $a^x=a^m$ हो, तो $x=m$ होगा।

इसलिए चल घातवाले समीकरण को हल करने की दो बातें हैं :—

(i) समीकरण के दोनों तरफों को एक ही रूपमें लाना,

(ii) और, उनके चल घातों का समीकरण करना।

नीचे दिए उदाहरणों से यह रीति साफ हो जायगी।

उदाहरण 1. हल करो : $3.27^x = 9^{x+4}$.

बायीं तरफ $= 3.27^x = 3.(3^3)^x = 3.3^{3x} = 3^{3x+1}$;

और दायीं तरफ $= 9^{x+4} = (3^2)^{x+4} = 3^{2(x+4)} = 3^{2x+8}$.

$\therefore$ यह समीकरण बन जाता है $3^{3x+1} = 3^{2x+8}$.

$\therefore \quad 3x+1 = 2x+8$; $\qquad \therefore \quad x = 7$.

उदाहरण 2. हल करो : $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = \dfrac{a^2b^2+1}{a^2b^2}$.

समीकरण के दोनों पक्षों को सरल करने पर

$$a^{-x}(a^x + b^{-x}) = a^{-x}.a^x + a^{-x}.b^{-x} = 1 + (ab)^{-x} ;$$

अथवा $\qquad 1 + (ab)^{-x} = 1 + \dfrac{1}{a^2b^2} = a^{-2}b^{-2} = 1 + (ab)^{-2}$.

इसलिए $\qquad (ab)^{-x} = (ab)^{-2}$; $\qquad \therefore \quad x = 2$.

उदाहरण 3. युगपत समीकरणों को हल करो :

$$\left.\begin{array}{ll} a^x.a^{y+1} = a^7 & \cdots \quad (1) \\ a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20} & \cdots \quad (2) \end{array}\right\}$$ [क० ए०, 1879.]

पहले समीकरण से $\qquad a^{x+(y+1)} = a^7$.

$\therefore \quad x + y + 1 = 7. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$

दूसरे समीकरण से $\qquad a^{2y+(3x+5)} = a^{20}$.

$\therefore \quad 2y + 3x + 5 = 20. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$

अब (3) और (4) से $\qquad \left.\begin{array}{r} x + y - 6 = 0 \\ 3x + 2y - 15 = 0 \end{array}\right\}$

इसलिए वज्राभ्यास रीति द्वारा

$$\frac{x}{-15+12} = \frac{y}{-18+15} = \frac{1}{2-3},$$

अथवा $\quad \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-3} = -1$; इसलिए $x = 3$ और $y = 3$.

प्रश्नमाला 105

नीचे दिए हुए समीकरणों को हल करो :

1. $2^{x+7}=4^{x+2}$.
2. $(\sqrt{3})^{x+5}=(\sqrt[3]{3})^{2x+5}$.
3. $(\sqrt[5]{4})^{4x+7}=(\sqrt[11]{64})^{2x+7}$.
4. $(\sqrt[3]{25})^{2x+1}=(\sqrt[5]{125})^{x+1}$.
5. $2^{x-4}=4a^{x-6}$, $(a \neq 0)$.
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{cx-d}=\left(\frac{b}{a}\right)^{ax-b}$.
7. $2^{3x-5}.a^{x-2}=2^{x-2}.2a^{1-x}$.
8. $\frac{3^{3x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}}=b^{2x-5}$.
9. $a^{x-2}(a^{2x+2}+a^{1-x})=a^{-3}(a^{9}+a^{2})$.
10. $2^{x+1}-2^{x}-8=0$.
11. $3^{x+5}=3^{x+3}+\frac{8}{9}$.
12. $4^{x+3}=2^{2x+1}+14$.
13. $x^{y}=y^{x}$ और $x=2y$.
14. $2^{x+1}.3^{y+2}=\frac{1}{6}$ और $2^{3x+1}.3^{3y+5}=\frac{1}{864}$.
15. $a^{x+1}.a^{y+2}=a^{8}$ और $a^{x+1}.a^{2(y+1)}=a^{11}$.
16. $a^{x-3}.a^{y+2}=a^{3}.a^{x}$ और $a^{x}.a^{y}=a^{4}$.
17. $a^{2x+1}.a^{3y+1}=a^{3}=a^{x+1}.a^{y+1}$.
18. $2^{x+y}=2^{2x-y}=\sqrt{8}$.
19. $2^{x}.3^{y}=18$ और $2^{2x}.3^{y}=36$.
20. $x^{2x+1}=2y^{x}$ और $x^{y-4}=1$.
21. $x^{y+na}=y^{x+nb}$ और $x^{a}=y^{b}$.
22. यदि $a^{m^{n}}=(a^{m})^{n}$, m को n के पदों में निकालो। [पटना, 1918.]
23. यदि $a^{x}=b$, $b^{y}=c$ और $c^{z}=a$ हो, तो सिद्ध करो कि $xyz=1$.
24. यदि $a^{x}=m$, $a^{y}=n$ और $a^{2}=(m^{y}n^{x})^{z}$ हो, तो सिद्ध करो कि $xyz=1$. [पटना, 1919, 1921.]
25. यदि $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $3x^{3}-9x-10=0$.
26. यदि $a^{2}+2=3^{\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $3a^{3}+9a=8$.
27. यदि $xy^{p-1}=a$, $xy^{q-1}=b$, $xy^{r-1}=c$, तो दिखाओ कि $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$. [पटना, 1920.]

हल करो :

28. $\left.\begin{aligned} 2^{x+y+z} &= 8^{x+z-y} \\ 5^{3y+2} &= 25^{x+z} \\ 3^{2x+2z+y} &= 9^{3x+y} \end{aligned}\right\}.$

29. $\left.\begin{aligned} (\sqrt{a})^{x+y} &= (\sqrt[3]{a})^{y+z-1} \\ (\sqrt[3]{b})^{x+z-2} &= (\sqrt[5]{b})^{y+z} \\ (\sqrt[4]{c})^{y} &= (\sqrt[7]{c})^{x+y+1} \end{aligned}\right\}.$

30. $a^x = (x+y+z)^y,$
$a^y = (x+y+z)^z,$
और $a^z = (x+y+z)^x.$

तीसवाँ अध्याय

घातमूल क्रिया (Evolution):

वर्गमूल और घनमूल (Square and Cube Roots) निकालना

196. घातमूल क्रिया (Evolution): किसी संख्या के मूल निकालने की रीति को "घातमूल क्रिया" कहते हैं।

इसलिए यह "घातक्रिया" (Involution) (का अर्थात् जिस क्रिया द्वारा किसी संख्या को किसी विशेष घात में लाया जाता है) ठीक उल्टा है। [नियम 127]

197. बीजीय व्यंजकों के मूल निकालने का साधारण नियम: पहले वतलाये हुए सूत्रों से वहुत आसानी से नीचे दिये हुए सिद्धान्त प्राप्त होते हैं। जैसे,

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b\ ;$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c\ ;$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c + (2a+2b+2c+d)d\ ;$$

आदि, आदि।

इसलिए साफ मालूम होता है कि

$$(ax^2+bx+c)^2 = a^2x^4 + (2ax^2+bx)bx + (2ax^2+2bx+c)c$$
$$= a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2+2ac)x^2 + 2bcx + c^2.$$

[x के अवरोहक्रम घातों के अनुसार सजाकर]

अब इस अन्त की राशि का वर्गमूल निकालना हो तो किस प्रकार से पूछे हुए वर्गमूल के भिन्न भिन्न पद प्राप्त होंगे, उस पर विचार किया जायगा।

वर्गमूल का पहला पद, अर्थात् ax^2, स्पष्टतः दिये हुए व्यंजक के पहले पद a^2x^4 का वर्गमूल है।

दिये हुए व्यंजक से a^2x^4 घटाने पर $\{(2ax^2+bx)bx+(2ax^2+2bx+c)c\}$ बाक़ी बचेगा। इसमें x का सबसे अधिक घातवाला पद $=2ax^2 \times bx$ है; अर्थात् = (वर्गमूल के पहले पद का दूना) × (वर्गमूल का दूसरा पद)। इसलिए यह जाना जाता है, कि वर्गमूल का पहला पद निकालने के बाद उसका दूसरा पद भी निकाला जा सकता है।

अब ऊपर दिये हुए अन्तरफल से $(2ax^2+bx) \times bx$ घटाने पर अन्तरफल स्पष्टतः $(2ax^2+2bx+c)c$ है; इसमें x का सब से अधिक घातवाला पद $=2ax^2 \times c$; अर्थात् = (वर्गमूल के पहले पद का दूना) × (वगमूल का तीसरा पद)। इसलिए मालूम होता है कि वर्गमूल का पहला व दूसरा पद निकालने के बाद उसका तीसरा पद भी निकाला जा सकता है।

इसलिए मालूम होता है कि यदि ax^2+bx+c का वर्ग दिया हो, तो इस व्यंजक के भिन्न भिन्न पदों को उस वर्ग के पदों से निकालने की रीति मालूम हुई।

इस क्रिया को नीचे दिखलाई हुई रीति से प्रयोग कर सकते हैं :

$$
\begin{array}{l|l}
 & a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2 \;\big(\; ax^2+bx+c \\
 & a^2x^4 \\
\hline
2ax^2+bx & 2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2 \\
 & 2abx^3+b^2x^2 \\
\hline
2ax^2+2bx+c & 2acx^2+2bcx+c^2 \\
 & 2acx^2+2bcx+c^2 \\
\hline
\end{array}
$$

(1) दिये हुए व्यंजक का पहला पद अर्थात् a^2x^4 का वर्गमूल निकालकर उसको पूछे हुए वर्गमूल के पहले पद की जगह लिखो ;

(2) दिये हुए व्यंजक से a^2x^4 घटाकर अन्तरफल $2abx^3+(b^2+2ac)x^2$ $+2bcx+c^2$ को नीचे लिखो ;

(3) वर्गमूल के पहले पद का दूना, अर्थात् $2ax^2$ को इस अन्तरफल की बाईं ओर उसके भाजक के एक पद के स्थान पर लिखो।

(4) अब दिये हुए अन्तरफल का पहला पद अर्थात् $2abx^3$ को वगमूल के पहले पद अर्थात् ax^2 के दूने ($2ax^2$) द्वारा भाग करके प्राप्त भजनफल bx को पूछे हुए वगमूल के दूसरे पद के स्थान पर और ऊपर दिये हुए भाजक के दूसरे पद के स्थान पर लिखो।

(5) वर्गमूल के दूसरे पद (अर्थात् bx) द्वारा भाजक अर्थात् $2ax^2+bx$ को गुणा करके गुणनफल को पूर्व प्राप्त अन्तरफल (अर्थात् ऊपर दिये हुए अन्तरफल) से घटाओ।

(6) इस दूसरे अन्तरफल को नीचे लिखकर उसकी बाईं ओर वर्गमूल की जो पद निकल चुके हैं (अर्थात् ax^2+bx) इनके दूने को एक भाजक के अंश के रूप में लिखो।

(7) इस दूसरे अन्तरफल के पहले पद अर्थात् $2acx^2$ को ऊपर दिये हुए नये भाजक के पहले पद अर्थात् $2ax^2$ द्वारा भाग करके प्राप्त भजनफल c को इस वर्गमूल के तीसरे पद के स्थान पर और नये भाजक के तीसरे पद के स्थान पर लिखो।

(8) अब इस सम्पूर्ण नये भाजक को (अर्थात् $2ax^2+2bx+c$ को) वर्गमूल के तीसरे पद c द्वारा गुणा करके गुणनफल से घटाओ।

अब कुछ शेष न बचा, इसलिए ax^2+bx+c ही पूछा हुआ वगमूल है।

टीका। ऊपर दी हुई रीति में व्यंजक को x के अवरोह घातों के अनुसार लिखा गया है। इसी प्रकार यदि किसी व्यंजक का वर्गमूल निकालना हो, तो क्रिया आरम्भ करने के पहले उसके पदों को उसमें दिये हुए किसी अक्षर के घातों के आरोह अथवा अवरोह क्रमसे लिखना होता है।

उदाहरण 1. वर्गमूल निकालो :

$$x^6+8x^4-2x^3+16x^2-8x+1.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^6+8x^4-2x^3+16x^2-8x+1 \;\big(\; x^3+4x-1 \\
 & x^6 \\ \hline
2x^3+4x & 8x^4-2x^3+16x^2-8x+1 \\
 & 8x^4 \qquad\quad +16x^2 \\ \hline
2x^3+8x-1 & -2x^3 \qquad\qquad -8x+1 \\
 & -2x^3 \qquad\qquad -8x+1 \\ \hline
\end{array}$$

इसलिए पूछा हुआ वर्गमूल $=x^3+4x-1.$

उदाहरण 2. वर्गमूल निकालो : $x^4+2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2+2(y^3+y^2z+yz^2+z^3)x+y^4+2y^2z^2+z^4.$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1888.]

दिया हुआ व्यंजक $= x^4 + 2(y+z)x^3 + (3y^2 + 2yz + 3z^2)x^2$

$$+ 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2 \ ;$$

चूँकि व्यंजक x के घातों के अवरोह क्रमसे लिखा गया है इसलिए तुरन्त वर्गमूल क्रिया आरम्भ की जा सकती है ; जैसे,

$$\begin{array}{l|l}
 & x^4 + 2(y+z)x^3 + (3y^2+2yz+3z^2)x^2 + 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2 \;\big(\; x^2 + (y+z)x + (y^2+z^2) \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2 + (y+z)x & 2(y+z)x^3 + (3y^2+2yz+3z^2)x^2 \\
 & 2(y+z)x^3 + (\ y^2+2yz+\ z^2)x^2 \\ \hline
2x^2 + 2(y+z)x + (y^2+z^2) & 2(y^2+z^2)x^2 + 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2 \\
 & 2(y^2+z^2)x^2 + 2(y+z)(y^2+z^2)x + (y^2+z^2)^2 \\ \hline
\end{array}$$

इसलिए पूछा हुआ वर्गमूल $= x^2 + xy + xz + y^2 + z^2.$

उदाहरण 3. वर्गमूल निकालो :

$$\frac{x^4}{4} + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} + \frac{a^2}{9} - 2x^3 - \frac{4ax}{3}.$$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1889.]

दिये हुए व्यंजक को x के घातों के अवरोहक्रम से सजाकर वर्गमूल निकालना आरम्भ किया जा सकता है ; जैसे,

$$\begin{array}{l|l}
 & \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9} \;\Big(\; \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3} \\
 & \frac{x^4}{4} \\ \hline
x^2 - 2x & -2x^3 + 4x^2 \\
 & -2x^3 + 4x^2 \\ \hline
x^2 - 4x + \frac{a}{3} & \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9} \\
 & \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9} \\ \hline
\end{array}$$

इसलिए पूछा हुआ वर्गमूल $= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3}.$

उदाहरण 4. $\frac{x^4}{4y^4} + \frac{4y^4}{x^4} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{x^2} + 3$ का वर्गमूल निकालो ।

दिये हुए व्यंजक को x के घातों के अवरोहक्रम से सजाकर उसको नीचे दिये हुए रूप में लिखो :

$$\frac{x^4}{4y^4} + \frac{x^2}{y^2} + 3 + \frac{4y^2}{x^2} + \frac{4y^4}{x^4} \ ;$$

क्योंकि इसके भिन्न भिन्न पदों में दिये हुए x के घातों के घातांक क्रमशः 4, 2, 0, -2 व -4 हैं; और यह स्पष्ट है कि ये संख्यायें घटती जाती हैं; इसलिए वर्गमूल निकालना आरम्भ किया जा सकता है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \dfrac{x^4}{4y^4}+\dfrac{x^2}{y^2}+3+\dfrac{4y^2}{x^2}+\dfrac{4y^4}{x^4}\left(\dfrac{x^2}{2y^2}+1+\dfrac{2y^2}{x^2}\right. \\
 & \dfrac{x^4}{4y^4} \\
\hline
\dfrac{x^2}{y^2}+1 & \dfrac{x^2}{y^2}+3 \\
 & \dfrac{x^2}{y^2}+1 \\
\hline
\dfrac{x^2}{y^2}+2+\dfrac{2y^2}{x^2} & 2+\dfrac{4y^2}{x^2}+\dfrac{4y^4}{x^4} \\
 & 2+\dfrac{4y^2}{x^2}+\dfrac{4y^4}{x^4} \\
\hline
\end{array}
$$

इसलिए यह वर्गमूल $=\dfrac{x^2}{2y^2}+1+\dfrac{2y^2}{x^2}$.

उदाहरण 5. $x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$ का वर्गमूल निकालो। [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1889.]

व्यंजक को x के घातों के अवरोहक्रम में लिखकर वर्गमूल निकालना आरम्भ किया जा सकता है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+x^{\frac{8}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{\frac{8}{5}}\left(a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right. \\
 & a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}} \\
\hline
2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}} & -2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+x^{\frac{8}{5}} \\
 & -2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+x^{\frac{8}{5}} \\
\hline
2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-2x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}} & -2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{\frac{8}{5}} \\
 & -2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{\frac{8}{5}} \\
\hline
\end{array}
$$

इसलिए पूछा हुआ वर्गमूल $=a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}$.

प्रश्नमाला 106

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्गमूल निकालो :

1. $4x^2z^2+12xyz+9y^2$.
2. $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$.
3. $x^6-2x^4+2x^3+x^2-2x+1$.
4. $4x^4-12x^3+25x^2-24x+16$.
5. $4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16ab^2x+16b^4$. [कल० एन्ट्रेंस, 1870.]
6. $9x^4-2x^3y+\frac{163}{9}x^2y^2-2xy^3+9y^4$. [कल० एन्ट्रेंस, 1874.]
7. $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$.
8. $\frac{1051x^2}{25}-\frac{6x}{5}-\frac{14x^3}{5}+49x^4+9$.
9. $x^4+\frac{4}{x^2}-2+4x-x^3+\frac{x^2}{4}$.
10. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{x}-2-ax$.
11. $\frac{a^2}{4b^2}-\frac{a}{b}+\frac{4b^2}{a^2}-1+\frac{4b}{a}$.
12. $\frac{9a^2}{x^2}-\frac{6a}{5x}+\frac{101}{25}-\frac{4x}{15a}+\frac{4x^2}{9a^2}$.
13. $4x^4-8x^3y^2+4xy^6+y^8$.
14. $\frac{49x^2}{y^2}+\frac{y^2}{49x^2}-\frac{42x}{y}+\frac{6y}{7x}+7$.
15. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\frac{3}{4}$.
16. $25\frac{3}{7}-\frac{20x}{7y}+\frac{9y^2}{16x^2}-\frac{15y}{2x}+\frac{4x^2}{49y^2}$.
17. $x^2-2x^{\frac{3}{2}}+3x-2x^{\frac{1}{2}}+1$.
18. $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$.
19. $a^2x^{-2}+2ax^{-1}+a^{-2}x^2+3+2a^{-1}x$.
20. $x^{\frac{3}{2}}+xy^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}+y$.
21. $\frac{9x^3}{4}-5x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\frac{179x^2y}{45}-\frac{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{4xy^2}{25}$.
22. $a^{2m}-4a^{m+n}+4a^{2n}$.
23. $9a^{2m}+6a^{3m+1}+25c^{2m-4}-30a^mc^{m-2}+a^{4m+2}-10a^{2m+1}c^{m-2}$.

198. $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$, इन दो सूत्रों के प्रयोग द्वारा वर्गमूल निकालना :

उदाहरण 1. $4-4c+2b+c^2-bc+\frac{b^2}{4}$ का वर्गमूल निकालो।

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1876.]

b के घातों के अवरोहक्रम में सजाकर

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = \frac{b^2}{4} - b(c-2) + (c^2 - 4c + 4)$$

$$= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left\{\frac{b}{2}(c-2)\right\} + (c-2)^2$$

$$= \left\{\frac{b}{2} - (c-2)\right\}^2 = \left(\frac{b}{2} - c + 2\right)^2.$$

$$\text{इसलिए वर्गमूल} = \frac{b}{2} - c + 2.$$

उदाहरण 2. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12$ का वर्गमूल निकालो।

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 12$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4 = \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

$$\text{इसलिए वर्गमूल} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}.$$

उदाहरण 3. $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4-2a^2b^2} + 4\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a-b}$ का वर्गमूल निकालो।

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1886.]

$$\text{दिया हुआ व्यंजक} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2 + 4ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2};$$

$$\text{अब इसका अंश} = \{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2\} + 4ab(a^2-b^2)$$

$$= (a^2-b^2)^2 + 4ab(a^2-b^2) + 4a^2b^2$$

$$= \{(a^2-b^2) + 2ab\}^2;$$

$$\therefore \quad \text{दिया हुआ व्यंजक} = \frac{(a^2+2ab-b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}.$$

$$\text{इसलिए वर्गमूल} = \frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

उदाहरण 4. वर्गमूल निकालो : $(ab+ac+bc)^2 - 4abc(a+c)$

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1888.

$$\text{दिया हुया व्यंजक} = \{b(a+c) + ac\}^2 - 4abc(a+c)$$

$$= b^2(a+c)^2 + a^2c^2 - 2abc(a+c)$$

$$= \{b(a+c) - ac\}^2 = (ab - ac + bc)^2.$$

$$\text{इसलिए वर्गमूल} = ab - ac + bc.$$

उदाहरण 5. $a^4+b^4+c^4+d^4-2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+2a^2c^2+2b^2d^2$ का वर्गमूल निकालो।

दिये हुए व्यंजक को a के अवरोह घातों के अनुसार सजाकर,

$$\text{दिया हुआ व्यंजक}=a^4-2a^2(b^2+d^2-c^2)+\{b^4+c^4+d^4-2c^2(b^2+d^2)+2b^2d^2\};$$

धनुकोष्ठक के अन्दर के व्यंजक को b के अवरोह घातों के अनुसार सजाकर,

$$\text{यह}=b^4-2b^2(c^2-d^2)+(c^4+d^4-2c^2d^2)$$
$$=b^4-2b^2(c^2-d^2)+(c^2-d^2)^2=\{b^2-(c^2-d^2)\}^2.$$

$$\text{इसलिए दिया हुआ व्यंजक}=a^4-2a^2(b^2-c^2+d^2)+(b^2-c^2+d^2)^2$$
$$=\{a^2-(b^2-c^2+d^2)\}^2=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2.$$

$$\text{इसलिए वर्गमूल}=a^2-b^2+c^2-d^2.$$

उदाहरण 6. वर्गमूल निकालो :

$$4\{(a^2-b^2)cd+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2.$$

दिया हुआ व्यंजक

$$=4\{(a^2-b^2)^2c^2d^2+2abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+a^2b^2(c^2-d^2)^2\}$$
$$+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2-8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+16a^2b^2c^2d^2\}$$
$$=\{4(a^2-b^2)^2c^2d^2+4a^2b^2(c^2-d^2)^2\}+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2+16a^2b^2c^2d^2\}$$
$$=(a^2-b^2)^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}+4a^2b^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}$$
$$=\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}$$
$$=(a^4+2a^2b^2+b^4)(c^4+2c^2d^2+d^4)=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2.$$

$$\text{इसलिए वर्गमूल}=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

प्रश्नमाला 107

निम्नलिखित व्यंजकों का वर्गमूल निकालो :

1. $25x^2y^2-40xy+16.$
2. $49a^2x^4-42ab^2x^2+9b^4.$
3. $49a^6b^8+126a^7b^7+81a^8b^6.$
4. $\frac{1}{4}x^8y^4-\frac{1}{3}x^7y^7+\frac{1}{9}x^6y^{10}.$

5. $\frac{25a^2b^2}{4}+\frac{c^4}{9}-\frac{5abc^2}{3}$. 6. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

7. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

8. $4a^2+b^2+9c^2+6bc-12ac-4ab$.

9. $a^4+4b^4+9c^4+4a^2b^2-6a^2c^2-12b^2c^2$.

10. $4a^4+9b^4+25c^4-12a^2b^2+20a^2c^2-30b^2c^2$.

11. $x^2+\frac{a^2}{9}-bx+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{3}+\frac{2ax}{3}$. 12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

13. $x^4+\frac{1}{x^4}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3$. 14. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+3$.

15. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\sqrt{2}+2\frac{1}{2}$. 16. $\frac{9x^2}{a^2}+\frac{a^2}{9x^2}-6\frac{x}{a}-\frac{2a}{3x}+3$.

17. $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6$. 18. $-2+a^{2\sqrt{2}}+a^{-2\sqrt{2}}$.

19. $a^2+b^2+c^2+d^2-2a(b-c+d)-2b(c-d)-2cd$.

20. $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

21. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2(b^2+d^2)-2b^2(c^2-d^2)+2c^2(a^2-d^2)$.

22. $a^4+2a^3-a+\frac{1}{4}$.

23. $2a^2(b+c)^2+2b^2(c+a)^2+2c^2(a+b)^2+4abc(a+b+c)$.

199. बीजीय बहुपद व्यंजकों के घनमूल निकालने का साधारण नियम :

साफ है कि,

$$(ax^2+bx+c)^3=(ax^2+bx)^3+3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3$$
$$=a^3x^6+3(a^2x^4)(bx)+3(ax^2)(bx)^2+(bx)^3$$
$$+3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3.$$

इसलिए ऊपर दिये हुए व्यंजक से उसका घनमूल (अर्थात् ax^2+bx+c) निकालना हो तो निम्न प्रकार से उस घनमूल के पद प्राप्त होंगे। अब उस पर विचार किया जायगा।

स्पष्ट है, कि घनमूल का पहला पद, अर्थात् ax^2 दिये हुए व्यंजक के पहले पद (अर्थात् a^3x^6) का घनमूल है। दिये हुए व्यंजक से a^3x^6 घटाने पर अन्तरफल में x का सबसे अधिक घातवाला पद $3(a^2x^4)(bx)$: अर्थात् $=3\times$ (घनमूल के पहले पद का वर्ग) $\times$ (घनमूल का दूसरा पद) ; इसलिए घनमूल का दूसरा पद निकालने का नियम मालूम हुआ।

ऊपर दिये हुए अन्तरफल' से] $\{3(a^2x^4)+3(bx^3)(ax)+(bx)^2\}(bx)$ को घटाने पर $3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3$ व्यंजक प्राप्त होता है। यह दूसरा अन्तर-फल कहा जायगा। अब इस दूसरे अन्तरफल में x का सबसे अधिक घातवाला पद $3a^2x^4c$ अर्थात्=3 × (घनमूल के पहले पद का वर्ग) × (घनमूल का तीसरा पद)। इस प्रकार से घनमूल का तीसरा पद निकालने का नियम जाना जाता है।

दूसरे अन्तरफल से $\{3(ax^2+bx)^2+3(ax^2+bx)c+c^2\}c$ घटाने पर कुछ बाक़ी नहीं बचता।

इसलिए ax^2+bx+c घनमूल प्राप्त हुआ।

नीचे दिये हुए उदाहरण द्वारा घनमूल निकालने का नियम और अच्छी तरह मालूम होगा।

उदाहरण। $x^6-6x^5y+24x^4y^2-56x^3y^3+96x^2y^4-96xy^5+64y^6$ का घनमूल निकालो।

चूँकि दिये हुए व्यंजक के पद x के घातों के अवरोहक्रम से लिखे गये हैं, इसलिए उन पदों का क्रम बदलने की कोई आवश्यकता नहीं है।

घनमूल का पहला पद=दिये हुए व्यंजक के पहले पद का घनमूल=x^6 का घनमूल=x^2.

उसके बाद दिये हुए व्यंजक का दूसरा पद, $-6x^5y$ को $3x^4$ (अर्थात् घनमूल के पहले पद के वर्ग के तिगुने) से भाग करके घनमूल का दूसरा पद निकला (आगे दिखलाई हुई रीति देखो)।

आगे दिखलाई हुई रीति के अनुसार अब $3x^4-6x^3y+4x^2y^2$ भाजक बना। इस भाजक को $-2xy$ से गुणा करके, प्राप्त गुणनफल अर्थात् $-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3$ को इसके ऊपर के व्यंजक से घटाया गया है (क्रिया देखो); और अन्तरफल रेखा के नीचे लिखा गया है।

अब घनमूल का जो अंश निकल चुका है उसके वर्ग का तिगुना अर्थात् $3x^4-12x^3y+12x^2y^2$ को एक नये भाजक का अंश मानकर ऊपर दिये हुए अन्तर-फल के बायीं ओर लिखो।

इस अन्तरफल के पहले पद (अर्थात् $12x^4y^2$) को नये भाजक के पहले पद $3x^4$ द्वारा भाग करके प्राप्त भजनफल $4y^2$ को घनमूल के तीसरे पद के स्थान पर लिखो।

अब आगे के पेज में बतलाये हुए नियम के अनुसार सम्पूर्ण भाजक बन गया; और इस सम्पूर्ण भाजक को घनमूल के तीसरे पद $4y^2$ द्वारा गुणा करके प्राप्त गुणनफल को उसके ऊपर लिखे हुए व्यंजक से घटाने के बाद कुछ बाक़ी नहीं बचता।

इसलिए पूछा हुआ घनमूल $=x^2-2xy+4y^2$.

$$x^6 - 6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6 \,(\, x^2 - 2xy + 4y^2$$

$$x^6$$

$$-6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2)^2 = 3x^4$$

$$3 \times x^2 \times (-2xy) = -6x^3y$$

$$(-2xy)^2 = +4x^2y^2$$

$$3x^4 - 6x^3y + 4x^2y^2$$

$$-6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2 - 2xy)^2 = 3x^4 - 12x^3y + 12x^2y^2$$

$$3 \times (x^2 - 2xy) \times (4y^2) = +12x^2y^2 - 24xy^3$$

$$(4y^2)^2 = +16y^4$$

$$3x^4 - 12x^3y + 24x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

प्रश्नमाला 108

निम्नलिखित व्यंजकों का घनमूल निकालो :

1. $x^3+27x^2+243x+729.$

2. $27x^3-216x^2+576x-512.$

3. $64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3.$

4. $33x^4-36x+x^6-63x^3+8-9x^5+66x^2.$

5. $8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27.$

6. $1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}.$

7. $c^6-63c^3x^3+8x^6-9c^5x+66c^2x^4-36cx^5+33c^4x^2.$

इकतीसवाँ अध्याय

निष्पत्ति व अनुपात (Ratio and Proportion)

200. परिभाषा : दो सजातीय राशियों में से एक दूसरे का कितना गुणा, अथवा कौन सा हिस्सा है, यह जिस अभिन्न अथवा भिन्न संख्या द्वारा प्रकट किया जाता है, उस विशुद्ध संख्या (abstract number) को पहली व दूसरी राशि की निष्पत्ति (ratio) कहते हैं।

चूँकि 2 घंटा व 40 मिनट दोनों समय बतलानेवाली राशियाँ हैं : और पहली राशि दूसरी राशि द्वारा सूचित समय का तिगुना समय सूचित करती है, इसलिए 2 घंटा व 40 मिनट की निष्पत्ति $=3$ है।

और चूँकि 9 इंच की लम्बाई 3 फ़ुट की लम्बाई की चौथाई है, इसलिए 9 इंच व 3 फ़ुट की निष्पत्ति $=\frac{1}{4}$.

फिर चूँकि 18 शि॰ की रक़म के तिहाई हिस्से का चौगुना लेने से 1 पा॰ 4 शि॰ की रक़म प्राप्त होती है, इसलिए 1 पा॰ 4 शि॰ व 18 शि॰ की निष्पत्ति $=\frac{4}{3}$ है, आदि।

इसलिए स्पष्ट है कि दो सजातीय अन्वित राशियों (concrete quantity) की निष्पत्ति एक ऐसा भिन्न है, जिसका अंश व हर क्रमसे (एक ही इकाई मानकर) उन दो

राशियों की माप है, और दो विशुद्ध राशियों की निष्पत्ति एक ऐसा भिन्न है जिसके अंश और हर क्रमसे पहली व दूसरी राशियों द्वारा सूचित होते हैं।

दो संख्यायें a व b की निष्पत्ति $a : b$ इस प्रकार लिखकर प्रकट की जाती है, इसलिए $a : b$ और $\frac{a}{b}$ दोनों एक ही अर्थ में प्रयोग किये जाते हैं। a व b की निष्पति में अर्थात् $a : b$ में, a को (अर्थात् पहले पद का) **पूर्वपद** (antecedent), और b को (अर्थात् दूसरे पद को) **परपद** (consequent) कहते हैं।

यदि किसी निष्पत्ति का पूर्वपद परपद से बड़ा, बराबर अथवा छोटा हो तो उस निष्पत्ति को क्रमसे **गुरु निष्पत्ति** (ratio of greater inequality), **सम निष्पत्ति** (ratio of equality) अथवा **लघु निष्पत्ति** (ratio of less inequality) कहते हैं।

टीका। चूँकि कोई निष्पत्ति केवल एक भिन्न है, इसलिए भिन्नों के नियमानुसार स्पष्ट मालूम होता है, कि यदि निष्पत्ति के दोनों पदों को एक ही संख्या द्वारा गुणा अथवा भाग करें, तो निष्पत्ति के मूल्यों में कोई परिवर्तन नहीं होता है। जैसे, $3 : 4$; $6 : 8$; $15 : 20$; $3n : 4n$; आदि निष्पत्तियाँ बराबर हैं।

इसलिए दो निष्पत्तियों में से कौन सी बड़ी या कौन सी छोटी है यह निकालना कठिन नहीं है। जैसे, $2 : 3$; $4 : 5$; और $7 : 10$ ये तीन निष्पत्तियाँ चूँकि क्रमसे $20 : 30$; $24 : 30$; और $21 : 30$ इन तीन निष्पत्तियों के बराबर हैं, इसलिए स्पष्ट जाना जाता है, कि बीच की निष्पत्ति सबसे बड़ी और पहली निष्पत्ति सब से छोटी है।

201. किसी निष्पत्ति के दो पदों में से प्रत्येक के साथ यदि एक ही धनात्मक राशि जोड़ी जाय तो लघु निष्पत्ति बढ़ जाती है, और गुरु निष्पत्ति घट जाती है।

फर्ज़ करो कि दी हुई निष्पत्ति $\frac{a}{b}$ द्वारा सूचित होती है; और उसके दोनों पदों के साथ x जोड़ने पर $\frac{a+x}{b+x}$ यह एक नई निष्पत्ति बन जाती है।

$$\text{तो} \quad \frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{x(b-a)}{b(b+x)};$$

इसलिए मालूम होता है कि b से a छोटा हो तो अन्तरफल धनात्मक और यदि बड़ा हो तो अन्तरफल ऋणात्मक होगा।

इसलिए यदि $a < b$ हो, तो $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$ होगा।

और यदि $a > b$ हो, तो $\frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$ होगा।

इसलिए यह सिद्धान्त सिद्ध हुआ।

टीका। इसी प्रकार दिखलाया जा सकता है कि ऐसी एक धनात्मक राशि जो कि निष्पत्ति के प्रत्येक पद से छोटी है, इन दो पदों में से घटाई जाय तो लघु निष्पत्ति घट जायगी और गुरु निष्पत्ति बढ़ जायगी।

202. निष्पत्ति-संयोजन (Composition of Ratios): एक से अधिक निष्पत्तियों के पूर्वपदों के गुणनफल को नया पूर्वपद और परपदों के गुणनफल को नया परपद मानकर जो नई निष्पत्ति बनती है, उसको दी हुई निष्पत्तियों की संयुक्त निष्पत्ति (compound ratio) कहते हैं। जैसे,

$3 : 4$, $8 : 9$ और $2x : 3y$ तीन निष्पत्तियों की 'संयुक्त निष्पत्ति'

$3 \times 8 \times 2x : 4 \times 9 \times 3y$, अर्थात् $4x : 9y$ होगी।

$a : b$ निष्पत्ति को उसी के (अर्थात् $a : b$ ही के) साथ संयुक्त करने पर प्राप्त निष्पत्ति $a^2 : b^2$ को $a : b$ की वर्गित निष्पत्ति (duplicate ratio), कहते हैं। इसी प्रकार $a^3 : b^3$ को $a : b$ की त्रिक निष्पत्ति; (triplicate ratio), $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$ को $a : b$ की वर्गमूलित निष्पत्ति (sub-duplicate ratio), $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$ को $a : b$ की घनमूलित निष्पत्ति (sub-triplicate ratio) कहते हैं।

203. निष्पत्ति का सन्निकट मूल्य: (Approximate values of Ratios): यदि a की तुलना में x का मूल्य बहुत छोटा हो, तो सिद्ध करना होगा कि $(a+x)^2 : a^2$ का सन्निकट मूल्य (approximate value) $a+2x : a$ बराबर होगा।

$$\text{अब } \frac{(a+x)^2}{a^2} = \frac{a^2+2ax+x^2}{a^2} = 1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2};$$

इसलिए यह $= 1 + \frac{2x}{a}$ (सन्निकट मूल्य लेकर); क्योंकि $\frac{x^2}{a^2}$ $\left(\text{जो कि } = \frac{x}{a} \times \frac{x}{a} \text{ है}\right)$, $\frac{2x}{a}$ की तुलना में अत्यन्त छोटा है इसलिए 1 के साथ तुलना में और भी छोटा है, इसलिए उपेक्षणीय है।

इसलिए सन्निकट मूल्य लेने से $\frac{(a+x)^2}{a^2}=1+\frac{2x}{a}=\frac{a+2x}{a}$. ... (1)

उपसिद्धान्त। (1) से स्पष्ट जाना जाता है $\sqrt{\frac{a+2x}{a}}=\frac{a+x}{a}$.

इसलिए a की तुलना में यदि x बहुत छोटा हो, तो समझा जाता है कि

$$\sqrt{a+x} : \sqrt{a}=a+\tfrac{1}{2}x : a.$$

टीका। यदि a की तुलना में x अत्यन्त छोटा हो, तो ऊपर बतलाई हुई रीति से दिखलाया जा सकता है कि

$(a+x)^3 : a^3=a+3x : a$; $(a+x)^4 : a^4=a+4x : a$; $(a+x)^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$ $=a+\frac{1}{3}x : a$; आदि।

204. अनियमित राशि (Incommensurable Quantities): दो राशियों की निष्पत्ति यदि दो अभिन्न राशियों की निष्पत्ति के रूप में प्रकट न की जा सके तो उन दो राशियों की निष्पत्ति को अनियमित राशि (incommensurable quantities) कहते हैं। जैसे, $\sqrt{3}$ और 2 इन दो राशियों की निष्पत्ति एक अनियमित राशि है; क्योंकि ऐसी दो अभिन्न संख्यायें नहीं मिल सकती हैं जिनकी निष्पत्ति $\sqrt{3} : 2$ के बराबर हो।

यदि दो राशियों की निष्पत्ति अनियमित हो तो इसको किसी हालत में दो अभिन्न संख्याओं की निष्पत्ति के रूप में प्रकट न किये जा सकने पर भी, हर हालत में ऐसी दो अभिन्न संख्यायें निकाली जा सकती हैं जिनकी निष्पत्ति से दी हुई दो राशियों की अनियमित राशि द्वारा सूचित निष्पत्ति का अन्तरफल इच्छानुयायी कम से कम हो।

$$\text{जैसे } \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1{\cdot}73205......}{2}={\cdot}86602......;$$

$$\text{इसलिए } \frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{86602}{100000} \text{ और } <\frac{86603}{100000};$$

इसलिए मालूम होता है कि $\sqrt{3} : 2$ से $86602 : 100000$, अथवा $86603 : 100000$ का अन्तरफल $\frac{1}{100000}$ से भी छोटा है। यह स्पष्ट है कि $\sqrt{3} : 2$ के ऊपर दिये हुए मूल्यों से और भी सन्निकट मूल्य निकाले जा सकते हैं।

टीका। यदि किसी संख्या को दो अभिन्न संख्याओं की निष्पत्ति के रूप में प्रकट न किया जा सके तो इस संख्या को अक्सर अनियमित संख्या (incommensurable number) कहते हैं।

उदाहरणमाला

उदाहरण 1. दो संख्याओं की निष्पत्ति 2 : 3 के बराबर है; और उन दो संख्याओं में से प्रत्येक के साथ 9 जोड़ने पर निष्पत्ति 3 : 4 के बराबर है। तो दोनों संख्याओं को निकालो।

चूँकि दो संख्याओं की निष्पत्ति 2 : 3 के बराबर है, इसलिए उनको $2x$ और $3x$ द्वारा सूचित किया जा सकता है। इसलिए प्रश्न की दूसरी शर्त के अनुसार

$$\frac{2x+9}{3x+9}=\frac{3}{4}.$$

इसलिए $8x+36=9x+27$; $\therefore \quad x=9.$

इसलिए संख्याएँ क्रमसे 18 व 27 होंगी।

उदाहरण 2. यदि $10x+3y : 5x+2y=9:5$ हो, तो $x:y$ का मूल्य निकालो।

अब $$\frac{9}{5}=\frac{10x+3y}{5x+2y}=\frac{10\cdot\frac{x}{y}+3}{5\cdot\frac{x}{y}+2}.$$

इसलिए $$45\cdot\frac{x}{y}+18=50\cdot\frac{x}{y}+15;$$

$$\therefore \quad 5\cdot\frac{x}{y}=3; \qquad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{5}.$$

उदाहरण 3. यदि x व y दो धनात्मक राशियाँ हों तो निम्नलिखित निष्पत्तियों में कौन सी बड़ी है :

$$x^3+y^3 : x^2+y^2, \quad \text{अथवा} \quad x^2+y^2 : x+y\ ?$$

अब $$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{xy^3+x^3y-2x^2y^2}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{xy(x-y)^2}{(x^2+y^2)(x+y)};$$

अब x, y से बड़ा हो, या छोटा हो, $(x-y)^2$ हर हालत में धनात्मक होगा, इसलिए प्राप्त अन्तरफल धनात्मक होगा।

इसलिए $$x^3+y^3 : x^2+y^2 > x^2+y^2 : x+y.$$

उदाहरण 4. दो पलटनों में क्रमशः 11000 और 7000 सिपाही हैं; युद्ध के पहले प्रत्येक पलटन में और भी 1000 सिपाही आकर मिलते हैं; निष्पत्ति की दृष्टि से किस पलटन के सिपाहियों की संख्या अधिक बढ़ी है ? [कल० एन्ट्रेंस, 1879.]

पहले पलटन की बढ़ी हुई संख्या : पूर्व संख्या = 12000 : 11000 = 12 : 11;

दूसरे पलटन की बढ़ी हुई संख्या : पूर्व संख्या = 8000 : 7000 = 8 : 7.

अब चूंकि 12 : 11 = 84 : 77 और 8 : 7 = 88 : 77;

इसलिए 8 : 7 > 12 : 11.

इसलिए पूर्व संख्या के साथ तुलना करने से दूसरे पलटन के सिपाहियों की संख्या अधिक बढ़ी है।

प्रश्नमाला 109

निम्नलिखित निष्पत्तियों में से कौन सी बड़ी है :

1. 4 : 5 या 7 : 8?
2. 7 : 10 या 11 : 14?
3. 9 : 5 या 13 : 8?
4. 22 : 27 या 32 : 45?
5. 28 : 39 या 49 : 65?

निम्नलिखित निष्पत्तियों की संयोजित निष्पत्ति निकालो :

6. $a : b$, $b : c$ और $c : d$.
7. 3 : 5, 7 : 9 और 15 : 28.
8. $a+x : a-x$, $a^2+x^2 : (a+x)^2$ और $(a^2-x^2)^2 : a^4-x^4$.
9. 16 : 5, 5 : 4 की त्रिक निष्पत्ति और 9 : 4 की वर्गमूलित निष्पत्ति।
10. 25 : 18, 81 : 49 की वर्गमूलित निष्पत्ति; और 2 : 3 की त्रिक निष्पत्ति और 7 : 5 की वर्गीय निष्पत्ति।
11. यदि $2x+5y : 3x+5y = 9 : 10$ हो, तो $x : y$ का मूल्य निकालो।
12. यदि $x : y = 3 : 4$ हो, तो $5x+9y : 16x+5y$ का मूल्य निकालो।
13. दो संख्याओं की निष्पत्ति 7 : 8 है और उनका योगफल 135 है; तो दोनों संख्याओं को निकालो।
14. दो संख्याओं की निष्पत्ति 5 : 3 और अन्तरफल 34 है, तो संख्याओं को निकालो।
15. दो संख्याओं की निष्पत्ति 4 : 5 है, और उनमें से प्रत्येक के साथ 7 जोड़ने पर दोनों योगफलों की निष्पत्ति 5 : 6 होती हो, तो संख्याओं को निकालो।
16. दो संख्याओं की निष्पत्ति 7 : 9 है और उनमें से प्रत्येक में से 10 घटाने पर अन्तरफलों की निष्पत्ति 8 : 11 है; तो संख्याओं को निकालो।
17. $23+x : 19+x$, 2 के बराबर है, तो x का मूल्य निकालो।

18. 25 : 37 निष्पत्ति के दोनों पदों के साथ कौन सी संख्या जोड़ने पर वह 5 : 6 बन जायगी ?

19. 29 : 38 निष्पत्ति के दोनों पदों के साथ कौन सी संख्या जोड़ने पर वह 4 : 7 बन जायगी ?

20. $a : b$ निष्पत्ति के दोनों पदों के साथ कौन सी संख्या जोड़ने पर वह $c : d$ बन जायगी ?

21. यदि $a > x$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^2 - x^2 : a^2 + x^2 > a - x : a + x$.

22. सिद्ध करो कि $a^3 + b^3 : a + b < a^2 - b^2 : a - b$.

निम्नलिखित निष्पत्तियों का सन्निकट मूल्य निकालो :

23. $(226)^3 : (225)^3$. 24. $\sqrt{(3546)} : \sqrt{(3542)}$.

25. तीन विद्यार्थी A, B व C माहवारी क्रमशः 15 रु०, 20 रु० और 25 रु० वज़ीफ़ा पाते हैं ; और उनमें से क्रमशः $8\frac{3}{4}$ रु०, $11\frac{1}{2}$ रु० और $15\frac{5}{8}$ रु० खर्च करते हैं। उनमें कौन सबसे कम खर्च करता है ?

अनुपात (Proportion)

205. यदि चार राशियाँ परस्पर ऐसा सम्बन्ध रखती हों कि पहले व दूसरे की निष्पत्ति तीसरे व चौथे की निष्पत्ति के बराबर हो, तो उन चार राशियों को **अनुपाती** (proportionals) कहते हैं। जैसे यदि $a : b = c : d$ हो, तो a, b, c, d चार राशियों को अनुपाती कहा जायगा। इस सम्बन्ध को अकसर '$a : b :: c : d$' इस प्रकार लिखते हैं ; और a व b की निष्पत्ति जो है c व की d निष्पत्ति भी वही है ; इस प्रकार पढ़ा जाता है।

ऊपर दिये हुए अनुपात में a व d को (अर्थात् पहले व चौथे पद को) दो **बाह्य पद** (extremes) और b व c को (अर्थात् दूसरे व तीसरे पद को) **माध्यमिक पद** (means) कहते हैं। चौथे पद (अर्थात् d) को a, b, c का **चतुर्थानुपाती** (fourth proportional) भी कहा जाता है।

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ परस्पर इस प्रकार सम्बन्ध रखती हों कि पहले व दूसरे की निष्पत्ति, दूसरे व तीसरे की निष्पत्ति, तीसरे व चौथे की निष्पत्ति, आदि निष्पत्तियाँ परस्पर बराबर हों तो उन राशियों को **उत्तरोत्तर अनुपाती** (in continued proportion)

कहते हैं। जैसे, यदि a, b, c, d ये चार राशियाँ ऐसी हों कि $a : b = b : c = c : d$ तो वह उत्तरोत्तरानुपाती होंगे।

यदि तीन राशियाँ a, b, c उत्तरोत्तरानुपाती हों (अर्थात् यदि $a : b :: b : c$ हो) तो b को a व c का **मध्यानुपाती** (mean proportional) और c को a व b का **तृतीय अनुपाती** (third proportional) कहते हैं।

206. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो $ad = bc$ होगा।

चूँकि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ है, इसलिए दोनों पक्षों को bd द्वारा गुणन करने पर $ad = bc$ होता है।

इसलिए यदि चार पद अनुपाती हों ता उनके बाह्य पदों का गुणनफल उनके माध्यमिक पदों के गुणनफल के बराबर है।

[इसके विपरीत : यदि $ad = bc$ हो, तो $a : b :: c : d$ होगा ; क्योंकि, दी हुई समता के दोनों पक्षों को bd द्वारा भाग करने पर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ प्राप्त होता है।]

उपसिद्धान्त। यदि $a : b :: b : c$ हो, तो $ac = b^2$ होगा ; अर्थात् यदि तीन राशियाँ उत्तरोत्तरानुपाती हों तो बाह्य पदों का गुणनफल मध्यानुपाती के वर्ग के समान होगा।

टीका। ऊपर दिखलाये हुए सिद्धान्तों से मालूम होता है कि चार अनुपाती राशियों में यदि कोई तीन राशियाँ दी हों तो चौथी राशि, और तीन उत्तरोत्तरानुपाती राशियों में से यदि कोई दो राशियाँ दी हों तो तीसरी राशि आसानी से निकाली जा सकती है।

प्रश्नमाला 110

तृतीय अनुपाती निकालो :

1. 9, 6.　　2. 8, 12.　　3. 6, 15.　　4. 16, 24.

चतुर्थ अनुपाती निकालो :

5. 6, 8, 15.　　6. 14, 24, 35.　　7. ·0014, 1·4, ·02.

मध्य अनुपाती निकालो :

8. 4, 9.　　9. 7, 28.　　10. 6, 54.

207. यदि $a : b :: b : c$ हो, तो $a : c :: a^2 : b^2$ होगा।

चूँकि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$;

$\therefore \quad \dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b}$; अथवा $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2}{b^2}$.

अर्थात् तीन उत्तरोत्तरानुपाती राशियों में पहले व तीसरे पद की निष्पत्ति पहले व दूसरे पद की वर्गित निष्पत्ति के समान है।

टीका। इसी प्रकार यदि $a : b = b : c = c : d$ हो, तो आसानी से सिद्ध किया जा सकता है कि $a : d = a^3 : b^3$. [विद्यार्थियों को स्वयं यह सिद्ध कर लेना चाहिए।]

208. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो $b : a :: d : c$ होगा।

चूँकि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$;

$\therefore \quad 1 \div \dfrac{a}{b} = 1 \div \dfrac{c}{d}$; इसलिए $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$.

अर्थात् यदि चार राशियाँ अनुपाती हों तो उनको उल्टे क्रम में (taken inversely) लेने पर भी वह अनुपाती रहेंगी। इसको उत्क्रम निष्पत्ति (Invertendo) कहते हैं।

209. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो $a : c :: b : d$ होगा।

चूँकि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$; $\therefore \quad \dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} \times \dfrac{b}{c}$; अथवा $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

अर्थात् यदि चार राशियाँ अनुपाती हों, तो उनको एकान्तर क्रम (alternately) में लेने पर भी वह अनुपाती रहेंगी। इसका एकान्तर निष्पत्ति (Alternando) कहते हैं।

210. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो $a+b : b :: c+d : d$ होगा।

चूँकि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$; $\therefore \quad \dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{c}{d} + 1$; अथवा $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$.

अर्थात् चार राशियाँ यदि अनुपाती हों तो पहली व दूसरी के योगफल की दूसरी राशि से निष्पत्ति, तीसरी व चौथी राशि के योगफल की चौथी राशि से निष्पत्ति के बराबर है। इसको योग निष्पत्ति (Componendo) कहते हैं।

211. यदि $a:b::c:d$ हो, तो $a-b:b::c-d:d$ होगा।

चूँकि $\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d};$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1; \quad \text{अथवा} \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

अर्थात् यदि चार राशियाँ अनुपाती हों तो पहली और दूसरी के अन्तरफल से दूसरी की निष्पत्ति तीसरी व चौथी के अन्तरफल के साथ चौथी की निष्पत्ति के बराबर है। इसको भक्त निष्पत्ति (Dividendo) कहते हैं।

उपसिद्धान्त। यदि $a:b::c:d$ हो, तो $a:a-b::c:c-d$ होगा।

चूँकि $\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}; \quad \therefore$ उल्टे क्रम से $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}.$

$$\text{इसलिए} \quad \frac{b}{a-b}\times\frac{a}{b}=\frac{d}{c-d}\times\frac{c}{d}; \quad \text{अथवा} \quad \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}.$$

अर्थात् यदि चार राशियाँ अनुपाती हों तो पहली से पहली व दूसरी के अन्तरफल की निष्पत्ति तीसरी से तीसरी व चौथी के अन्तरफल की निष्पत्ति के बराबर है। इसको परिवर्तन निष्पत्ति (Convertendo) कहते हैं।

212. यदि $a:b::c:d$ हो, तो $a+b:a-b::c+d:c-d$ होगा।

नियम 210 से $\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

नियम 211 से $\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

इसलिए (1) को (2) द्वारा भाग करने पर

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

अर्थात् यदि चार राशियाँ अनुपाती हों तो पहली व दूसरी के योगफल व उनके अन्तरफल की निष्पत्ति, तीसरी व चौथी के योगफल व उनके अन्तरफल की निष्पत्ति के बराबर है। इसको भक्तयोग निष्पत्ति (Componendo and Dividendo) कहते हैं।

टीका। इस नियम में दिखलाया हुआ सिद्धान्त कई विशेष प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए बहुत उपयोगी है। नीचे इसके दृष्टान्त दिखलाये जाते हैं।

उदाहरण 1. हल करो : $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b.$

भक्तयोग निष्पत्ति द्वारा $\qquad \dfrac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\dfrac{b+1}{b-1}.$

इसलिए $\qquad \dfrac{a+x}{a-x}=\left(\dfrac{b+1}{b-1}\right)^2=\dfrac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}.$

फिर भक्तयोग निष्पत्ति द्वारा,

$$\frac{2a}{2x}=\frac{2(b^2+1)}{4b}; \qquad \text{अथवा} \qquad \frac{a}{x}=\frac{b^2+1}{2b}.$$

$$\therefore\ x(b^2+1)=2ab; \qquad \therefore\ x=\frac{2ab}{b^2+1}.$$

उदाहरण 2. हल करो : $\dfrac{1-ax}{1+ax}\cdot\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=1.$

अब $\quad \sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=\dfrac{1+ax}{1-ax}; \quad \therefore\ \dfrac{1+bx}{1-bx}=\dfrac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}.$

इसलिए भक्तयोग निष्पत्ति द्वारा $\quad \dfrac{1}{bx}=\dfrac{1+a^2x^2}{2ax};$

$$\therefore\ b(1+a^2x^2)=2a, \qquad \text{अथवा}\ a^2x^2=\frac{2a}{b}-1;$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{2a}{b}-1}.$$

उदाहरण 3. यदि $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ हो, तो $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$ का मूल्य निकालो।

[इलाहाबाद ए०, 1892.]

दी हुई शर्त के अनुसार $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{2b}{a+b}$, और $\dfrac{x}{2b}=\dfrac{2a}{a+b}.$

इसलिए भक्तयोग निष्पत्ति द्वारा

$$\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{a+3b}{b-a}, \qquad \text{और} \qquad \frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3a+b}{a-b}.$$

इसलिए दिया हुआ व्यंजक $=\dfrac{-(a+3b)}{a-b}+\dfrac{3a+b}{a-b}$

$$=\frac{2(a-b)}{a-b}=2.$$

टीका। इस प्रश्न को अन्य प्रकार से हल करने के लिए 171 नियम का दूसरा उदाहरण देखो।

उदाहरण 4. यदि $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)\times(a+b-c-d)$ हो, तो सिद्ध करो कि $a:b::c:d$ होगा।

दी हुई शर्त से $\dfrac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\dfrac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$.

इसलिए भक्तयोग निष्पत्ति द्वारा

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d};$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}; \quad \text{[एकान्तर निष्पत्ति द्वारा]}$$

फिर भक्तयोग निष्पत्ति द्वारा

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

उदाहरण 5. यदि $x=\dfrac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3-3mx^2+3x-m=0$ होगा।

दिये हुए सम्बन्ध में भक्तयोग निष्पत्ति प्रयोग करने पर

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}};$$

$$\therefore \quad \frac{m+1}{m-1}=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

इसलिए फिर भक्तयोग निष्पत्ति द्वारा

$$\frac{m}{1}=\frac{x^3+3x}{3x^2+1};$$

$$\therefore \quad m(3x^2+1)=x^3+3x,$$

इसलिए $\quad x^3-3mx^2+3x-m=0.$

प्रश्नमाला 111

हल करो :

1. $\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{x-y} &= 5 \\ 2x+3y &= 36 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} \frac{3x-5y}{3x+5y} &= \frac{1}{4} \\ 4x-9y &= 19 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} \frac{5x-7y}{5x+7y} &= \frac{1}{7} \\ 3x-5y &= 18 \end{aligned}\right\}$

4. $16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3 = \frac{a+x}{a-x}.$ [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1886.]

5. $\frac{2x+\sqrt{4x^2-1}}{2x-\sqrt{4x^2-1}} = 4.$

6. $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}.$

7. $\frac{\sqrt{36x+1}+\sqrt{36x}}{\sqrt{36x+1}-\sqrt{36x}} = 9.$

8. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = \frac{62}{63}.\frac{1+x}{1-x}.$

9. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}} = 5.$

10. $\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}.$

11. $\frac{a^{\frac{1}{3}}-\{a-(a^2-ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+\{a-(a^2-ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}} = b.$

सिद्ध करो कि $a : b :: c : d$ है,

12. यदि $(a+3b+2c+6d)(a-3b-2c+6d)$
$= (a-3b+2c-6d)(a+3b-2c-6d)$ हो।

13. यदि $(2a+b+4c+2d)(2a-b-4c+2d)$
$= (2a-b+4c-2d)(2a+b-4c-2d)$ हो।

14. यदि $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$3bx^2-4ax+3b=0.$$

15. यदि $x = \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ हो, तो $\frac{x+\sqrt{8}}{x-\sqrt{8}}+\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}$ का मूल्य निकालो।

213. एक विशेष आवश्यकीय नियम : जब कि p, q, r, n कोई राशियाँ हों, तो यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ हो, तो सिद्ध करना होगा कि उनमें से प्रत्येक

$$= \left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

फ़र्ज़ करो कि प्रत्येक निष्पत्ति $= k$ है, तो $a = bk$; $c = dk$; $e = fk$ होगा।

$$\left.\begin{aligned} \text{इसलिए } pa^n &= p(bk)^n = pb^n.k^n, \\ qc^n &= q(dk)^n = qd^n.k^n, \\ \text{और } re^n &= r(fk)^n = rf^n.k^n, \end{aligned}\right\} ; \quad \therefore\ pa^n + qc^n + re^n = (pb^n + qd^n + rf^n).k^n ;$$

$$\text{इसलिए} \quad k^n = \frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + qd^n + rf^n}.$$

$$\therefore \quad k = \left(\frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + qd^n + rf^n}\right)^{\frac{1}{n}} ;$$

इसलिए साध्य सिद्ध हुआ।

उपसिद्धान्त। यदि p, q, r, n में से प्रत्येक का मूल्य 1 हो, तो मालूम होता है कि

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}.$$

ऐसे ही, p, q, r, n के विशेष मूल्यों के लिए इसी प्रकार के फल निकाले जा सकते हैं।

टीका। ऊपर दी हुई तीन समान निष्पत्तियों के लिए जो नियम दिखलाया गया है, वह चाहे कितनी ही निष्पत्तियाँ हों उनके लिए भी उसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है। विद्यार्थियों को उचित है कि इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के समय ऊपर दिये हुए फल को प्रयोग न करके, हर हालत में ऊपर दिखलाई हुई रीति के अनुसार फल को निकालें। इसलिए नीचे इस प्रकार के कई प्रश्न दिये गये हैं।

प्रश्नमाला 112

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ हो, तो सिद्ध करो कि उनमें से प्रत्येक निष्पत्ति निम्नलिखित व्यंजकों के समान है :

1. $\frac{a-c+e}{b-d+f}$. 2. $\frac{a+3c-5e}{b+3d-5f}$. 3. $\frac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$.

4. $\frac{ka+lc+me}{kb+ld+mf}$. 5. $\left(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. 6. $\left(\frac{a^3-2c^3+3e^3}{b^3-2d^3+3f^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.
[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1875.]

7. $\frac{\sqrt[3]{a^3+c^3+e^3}}{\sqrt[3]{b^3+d^3+f^3}}$. [कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1882].

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ हो, तो सिद्ध करो कि इनमें से प्रत्येक निष्पत्ति निम्नलिखित व्यंजकों के समान है :

8. $\left(\frac{a^{-1}+c^{-1}+e^{-1}+g^{-1}}{b^{-1}+d^{-1}+f^{-1}+h^{-1}}\right)^{-1}$. 9. $\sqrt[4]{\frac{a^4-2c^4+3e^4-4g^4}{b^4-2d^4+3f^4-4h^4}}$.

10. $\sqrt{\left(\frac{3a^{-2}-7c^{-2}-8e^{-2}+15g^{-2}}{3b^{-2}-7d^{-2}-8f^{-2}+15h^{-2}}\right)^{-1}}$.

214. विविध उदाहरणमाला :

उदाहरण 1. यदि $x : y :: m^2 : n^2$ हो,

और $m : n :: \sqrt{p^2+x^2} : \sqrt{p^2-y^2}$ हो, तो $p^2 : xy :: x+y : x-y$ होगा।

अब $$\frac{x}{y}=\frac{m^2}{n^2}=\frac{p^2+x^2}{p^2-y^2};$$

$$\therefore \quad x(p^2-y^2)=y(p^2+x^2), \qquad [\text{नियम } 206]$$

इसलिए $$p^2(x-y)=xy(x+y);$$

$$\therefore \quad \frac{p^2}{xy}=\frac{x+y}{x-y};$$

अर्थात् $p^2 : xy :: x+y : x-y$.

उदाहरण 2. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$ma+nc : mb+nd :: (a^2+c^2)^{\frac{1}{2}} : (b^2+d^2)^{\frac{1}{2}}.$$ [क० ए०, 1880.]

चूँकि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore \frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}$,

इसलिए प्रत्येक निष्पत्ति $=\frac{ma+nc}{mb+nd}$. [नियम 213]

अब चूँकि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

$$\therefore \quad \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2},$$

इसलिए प्रत्येक निष्पत्ति $=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$. [नियम 213]

इसलिए $\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$, ... (1)

और $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{a^2}{b^2}$. ... ... (2)

इसलिए (1) और (2) से

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

उदाहरण 3. यदि $\frac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\frac{y}{(c-a)(c+a-2b)}$

$=\frac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$ हो, तो $x+y+z$ का मूल्य निकालो।

[कलकत्ता एन्ट्रेंस, 1889.]

फ़र्ज़ करो कि दी हुई प्रत्येक निष्पत्ति $=k$.

इसलिए
$$x=k(b-c)(b+c-2a)=k\{(b^2-c^2)-2a(b-c)\},$$
$$y=k(c-a)(c+a-2b)=k\{(c^2-a^2)-2b(c-a)\},$$
$$z=k(a-b)(a+b-2c)=k\{(a^2-b^2)-2c(a-b)\}.$$

इसलिए $x+y+z=k[\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}$
$-2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}]$
$=0.$

उदाहरण 4. यदि $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

फ़र्ज़ करो कि दी हुई प्रत्येक निष्पत्ति $=k$.

इसलिए $(ay-bx)c=kc^2$,
$(cx-az)b=kb^2$,
$(bz-cy)a=ka^2$.

इसलिए जोड़ने पर $k(a^2+b^2+c^2)=0$; $\therefore$ $k=0$.

इसलिए $ay-bx=0$; $\therefore$ $ay=bx$; $\therefore$ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ ... (1)

और $cx-az=0$; $\therefore$ $cx=az$; $\therefore$ $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$. ... (2)

इसलिए (1) और (2) से $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

उदाहरण 5. यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध करो :

$$(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2.$$

दी हुई शर्तों के अनुसार

(i) $b^2=ac$; (ii) $c^2=bd$; (iii) $bc=ad$. [नियम 206]

अब $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$

$$=(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ac)+(d^2+b^2-2bd)$$
$$=2(b^2-ac)+2(c^2-bd)+a^2+d^2-2bc$$
$$=a^2+d^2-2bc \quad \text{[(i) और (ii) से]}$$
$$=a^2+d^2-2ad \quad \text{[(iii) से]}$$
$$=(a-d)^2.$$

उदाहरण 6. यदि $a:b::c:d$ हो, तो सिद्ध करो :

$$4(a+b)(c+d)=bd\left\{\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right\}^2. \quad \text{[क॰ ए॰ 1874.]}$$

चूँकि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore$ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. [योग निष्पत्ति द्वारा]

इसलिए स्पष्ट है कि $\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}=\frac{2(a+b)}{b}=\frac{2(c+d)}{d}$.

इसलिए $$\left\{\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right\}^2=\frac{2(a+b)}{b}\times\frac{2(c+d)}{d}$$
$$=\frac{4(a+b)(c+d)}{bd}.$$

$$\therefore \quad bd\left\{\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right\}^2=4(a+b)(c+d).$$

उदाहरण 7. यदि $a:b::p:q$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a^2+b^2:\frac{a^3}{a+b}::p^2+q^2:\frac{p^3}{p+q}.$$

दी हुई शर्त से

$\frac{b}{a}=\frac{q}{p}$; और $\therefore$ $\frac{b^2}{a^2}=\frac{q^2}{p^2}$.

इसलिए (i) $\frac{a+b}{a}=\frac{p+q}{p}$, और (ii) $\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{p^2+q^2}{p^2}$.

(i) और (ii) द्वारा सूचित दो निष्पत्तियों को संयोजित करने पर

$$\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{a^3}=\frac{(p^2+q^2)(p+q)}{p^3},$$

अथवा $$\frac{a^2+b^2}{\left(\frac{a^3}{a+b}\right)}=\frac{p^2+q^2}{\left(\frac{p^3}{p+q}\right)};$$

अर्थात् $a^2+b^2 : \frac{a^3}{a+b} :: p^2+q^2 : \frac{p^3}{p+q}$.

उदाहरण 8. यदि $m : n :: p : q$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\frac{(m-n)(m-p)}{m}=(m+q)-(n+p).$$ [क० ए०, 1859.]

अब $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$; $\therefore$ $\frac{m-n}{n}=\frac{p-q}{q}$;

और $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}$; $\therefore$ $\frac{m-p}{p}=\frac{n-q}{q}$.

इसलिए $$\frac{(m-n)(m-p)}{np}=\frac{(p-q)(n-q)}{q^2},$$

अथवा, $$\frac{(m-n)(m-p)}{mq}=\frac{(p-q)(n-q)}{q^2}.$$ [$\because np=mq$]

$$\therefore \frac{(m-n)(m-p)}{m}=\frac{pn-q(n+p)+q^2}{q}$$

$$=\frac{mq+q^2-q(n+p)}{q}$$ [$\because pn=mq$]

$$=(m+q)-(n+p).$$

उदाहरण 9. यदि $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध करो :

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

[क० ए०, 1887.]

फ़र्ज़ करो कि दी हुई प्रत्येक निष्पत्ति $=k$.

इसलिए, $$\left.\begin{aligned}k^2b^2&=a^2\\k^2c^2&=b^2\\k^2d^2&=c^2\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore k^2(b^2+c^2+d^2)=a^2+b^2+c^2;$$

$$\therefore k^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2+d^2}; \quad \ldots \quad (1)$$

और $\left.\begin{aligned} kb=a\,;\ \therefore\ kb^2 &= ab \\ kc=b\,;\ \therefore\ kc^2 &= bc \\ kd=c\,;\ \therefore\ kd^2 &= cd \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} \therefore\quad & k(b^2+c^2+d^2)=ab+bc+cd\,; \\ \therefore\quad & k=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}. \qquad \cdots \qquad (2) \end{aligned}$

इसलिए (1) और (2) से k^2 का मूल्य प्रयोग करने पर

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2+d^2}=\frac{(ab+bc+cd)^2}{(b^2+c^2+d^2)^2}.$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

उदाहरण 10. यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}=(ab)^{\frac{1}{2}}+(cd)^{\frac{1}{2}}+(ef)^{\frac{1}{2}}.$$

फ़र्ज़ करो कि दी हुई प्रत्येक निष्पत्ति $=k$.

इसलिए $\left.\begin{aligned} a&=bk \\ c&=dk \\ e&=fk \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} \therefore\quad & a+c+e=k(b+d+f), \\ \therefore\quad & (a+c+e)(b+d+f)=k(b+d+f)^2\,; \end{aligned}$

$$\therefore\quad \sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}=(b+d+f)\sqrt{k}. \qquad \cdots \qquad (1)$$

और $\begin{aligned} ab&=b^2k\,; & \therefore\quad (ab)^{\frac{1}{2}}&=b\sqrt{k} \\ cd&=d^2k\,; & \therefore\quad (cd)^{\frac{1}{2}}&=d\sqrt{k} \\ ef&=f^2k\,; & \therefore\quad (ef)^{\frac{1}{2}}&=f\sqrt{k} \end{aligned}$

$$\therefore\quad (ab)^{\frac{1}{2}}+(cd)^{\frac{1}{2}}+(ef)^{\frac{1}{2}}=(b+d+f)\sqrt{k}. \qquad \cdots \qquad (2)$$

इसलिए (1) और (2) से

$$\sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}=(ab)^{\frac{1}{2}}+(cd)^{\frac{1}{2}}+(ef)^{\frac{1}{2}}.$$

प्रश्नमाला 113

यदि a, b, c, d में से a सबसे बड़ा हो और यदि $a:b::c:d$ हो, तो सिद्ध करो :

1. b और c में से प्रत्येक $> d$.
2. $a-b > c-d$.
3. $a+d > b+c$.

यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करो :

4. $ma+nb : b :: mc+nd : d.$

5. $ma+nb : mc+nd :: pa-qb : pc-qd.$

6. $a : b :: a+c : b+d.$ 7. $a^2 : b^2 :: a^2+c^2 : b^2+d^2.$

8. $a^2+c^2 : b^2+d^2 :: ac : bd.$ [क० ए०, 1877.]

9. $(a-c)^2 : (b-d)^2 = a^2 : b^2.$

10. $(a+c)^3 : (b+d)^3 = a(a-c)^2 : b(b-d)^2.$ [क० ए०, 1888.]

11. $a^2+b^2 : a^2-b^2 = ac+bd : ac-bd.$

12. $a(a+c) : c^2 :: b(b+d) : d^2.$

13. $c : d = \sqrt{a^2+c^2} : \sqrt{b^2+d^2}.$

14. $a+b : c+d = \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}.$

15. $a+b : c+d :: \sqrt{3a^2+5b^2} : \sqrt{3c^2+5d^2}.$

16. $a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 :: c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2.$

17. $a^2+ac+c^2 : a^2-ac+c^2 :: b^2+bd+d^2 : b^2-bd+d^2.$

यदि $a : b = c : d = e : f$ हो, तो सिद्ध करो :

18. $\frac{ma+nb}{mc+nd} = \frac{b^2c}{d^2a}.$ [क० ए०, 1876.]

19. $ac : bd :: 2a^2+3c^2+5e^2 : 2b^2+3d^2+5f^2.$

20. $a^2+c^2+e^2 : b^2+d^2+f^2 :: ce : df.$ [क० ए०, 1876.]

21. $pa+qc+re : pb+qd+rf :: \sqrt[3]{ace} : \sqrt[3]{bdf}.$

22. $a^2 : b^2 :: ac+ce+ae : bd+df+bf.$

23. $a^3+c^3+e^3 : b^3+d^3+f^3 :: ace : bdf.$

24. $\sqrt{a^3c^3+c^3e^3+a^3e^3} : \sqrt{b^3d^3+d^3f^3+b^3f^3} :: ace : bdf.$

25. यदि a, b, c, d, e राशियाँ उत्तरोत्तरानुपाती हों, तो सिद्ध करो :

$$a : e :: a^4 : b^4.$$

26. यदि $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ हो, तो $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$ का मूल्य निकालो। [क० ए०, 1878.]

27. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a^2+c^2 : b^2+d^2 :: \sqrt{a^4+c^4} : \sqrt{b^4+d^4}.$$

28. यदि $a : b = c : d = e : f$ हो, तो सिद्ध करो :

$$27(a+b)(c+d)(e+f) = bdf\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}+\frac{e+f}{f}\right)^3.$$

29. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करो : $ad+bc : 2bd :: a^2+c^2 : ab+cd.$

30. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a^2+b^2 : ab+ad-bc :: c^2+d^2 : cd-ad+bc.$$

यदि $a : b :: b : c$ हो, तो सिद्ध करो :

31. $a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2 = a : c.$

32. $a-2b+c = \dfrac{(a-b)^2}{a} = \dfrac{(b-c)^2}{c}.$

33. $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3.$

यदि $a : b = b : c = c : d$ हो, तो सिद्ध करो :

34. $(b+c)(b+d) = (c+a)(c+d).$

35. $(a+d)(b+c)-(a+c)(b+d) = (b-c)^2.$

36. $\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{a-c}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{d-b}{c}+\dfrac{d-c}{b}\right)^2 = (a-d)^2\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right).$

37. $a : b = \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d} : \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}.$

38. $a : d :: a^3+b^3+c^3 : b^3+c^3+d^3.$

39. यदि $a : b :: c : d$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a^2+ab : c^2+cd :: b^2-2ab : d^2-2cd.$$

40. यदि $a : b = c : d = e : f$ हो, तो सिद्ध करो :

$$(a^2+b^2)(ce+df)^2 = (c^2+d^2)(ae+bf)^2 = (e^2+f^2)(ac+bd)^2$$

विविध प्रश्नमाला VI

I

1. यदि $x=-1, y=-3, z=1$ हो, तो
$\sqrt{(x^2+y^3+z)(x-y-3z)}+\sqrt[3]{xy^3z^2}$ का मूल्य निकालो।

2. सरल करो : $3a-2(b-c)-\{2(a-b)-3(c+a)\}-\{9c-4(c-a)\}$.

3. गुणनखंड निकालो : $3(a+b)^2-2(a^2-b^2)-a(a+b)$.

4. भाग करो : $2x^4-10x^3y+25x^2y^2-31xy^3+20y^4$ को
$x^2-3xy+4y^2$ से।

5. सरल करो : $\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{ab}{(a+b)^2}-\dfrac{ab^2}{(a+b)^3}$.

6. हल करो : $\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-b}{x+b}=\dfrac{2(a+b)}{x}$.

7. यदि $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3+\dfrac{1}{x^3}=0$.

II

1. यदि $a=1, b=2, c=-3$ हो, तो $(2a+b)(a-b)+(2b+c)(b-c)$
$+(2c+a)(c-a)$ का मूल्य निकालो।

2. भाग करो : $1+3x-24x^2+8x^4$ को $2x^2+3x-1$ से।

3. यदि x^2+7x+c सम्पूर्ण रूप से $x+4$ द्वारा विभाज्य हो, तो c का मूल्य कितना होगा ?

4. म० स० अ० निकालो :
$x^4-3x^3-2x^2+12x-8$ और x^3-7x+6. का।

5. सरल करो : $\left(1+\dfrac{35}{x-7}-\dfrac{15}{x-3}\right)\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{x+7}+\dfrac{3}{x+3}\right)$.

6. समीकरण हल करो : $\dfrac{x+1}{6}+\dfrac{3x-1}{8}-\dfrac{5x-7}{12}+1=\dfrac{7x-5}{24}$.

7. यदि $x-\dfrac{1}{x}=1$ हो, तो सिद्ध करो कि $x^3-\dfrac{1}{x^3}=4$.

III

1. यदि $a=3, b=-2, c=4$ हो, तो $\{a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)\}\div(bc+ca+ab)$ का मूल्य निकालो।

2. सरल करो : $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

3. गुणनखंड निकालो : $a^2-b^2+6bc-9c^2$.

4. म० स० अ० निकालो :
$x^3+5ax^2-5a^2x-a^3$ और $5x^3-3ax^2-5a^2x+3a^3$ का।

5. ल० स० अ० निकालो : x^2-5x+6, x^2-4x+3 और x^2-3x+2 का।

6. लघुत्तम पदों में रक्खो : $\frac{x^5+5x^4+8x^3+4x^2}{x^5+x^4+8x^2+8x}$.

7. हल करो : $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-7}$.

8. यदि $a:b::x:y$ हो, तो सिद्ध करो कि $ab:xy::a^2+b^2:x^2+y^2$.

IV

1. सरल करो : $\frac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+y}\div\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.

2. दो व्यंजकों का गुणनफल $x^8+x^4y^4+y^8$ है, और उनमें से एक व्यंजक x^2-xy+y^2 हो, तो दूसरा निकालो।

3. गुणनखंड निकालो :
(i) x^3+x^2-x-1 ; (ii) $a^2b^2-a^2-b^2+1$.

4. सिद्ध करो कि $(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

5. ल० स० अ० निकालो :
$8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ और $6x^2-5x-6$ का।

6. हल करो : $\frac{3x-4}{x}+\frac{2}{4x+3}=3$.

7. यदि $\frac{bx+ay}{2ab}=\frac{by-ax}{b^2-a^2}=ab$ हो, तो x व y का मूल्य निकालो।

B—30

8. यदि $\dfrac{x}{a+b-c}=\dfrac{y}{a-b+c}=\dfrac{z}{b+c-a}$ हो, तो सिद्ध करो कि

प्रत्येक भिन्न $=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$.

V

1. सरल करो : $\dfrac{x^2-25y^2}{x^2+3xy-10y^2}\times\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-3xy-10y^2}$.

2. भाग करो : $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ को $a+b+c$ से ; और प्राप्त भजनफल के गुणनखड निकालो।

3. मूल्य निकालो : $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ का, यदि $x=a+3$, $y=a-3$ हो।

4. वर्गमूल निकालो : $24+\dfrac{x^2}{y}+8\left(\dfrac{2y}{x^2}-xy^{-\frac{1}{2}}\right)-\dfrac{32\sqrt{y}}{x}$ का।

5. सिद्ध करो : $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$.

6. हल करो : $\left.\begin{array}{l}2^x\times4^y=32\\3^x\div9^y=3\end{array}\right\}$.

7. यदि $a:b::c:d$ हो, तो सिद्ध करो कि $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$.

VI

1. लघुत्तम पदों में रक्खो :
$$\frac{2a(1-x^2)^2}{yz}\div\frac{(1+x)^2(1-x)}{y^3}\div\frac{2ay^2(1-x)}{z}.$$

2. गुणा करो : $a+b+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ को $a-b+\dfrac{b^2}{a}-\dfrac{a^2}{b}$ से।

3. भाग करो : $x^4-2bx^3-(a^2-b^2)x^2+2a^2bx-a^2b^2$ को
$x^2-(a+b)x+ab$ से।

4. यदि $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ हो, तो सिद्ध करो कि
$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

5. $\dfrac{5x^3-14x^2+16}{3x^3-2x^2+16x-48}$ को लघुत्तम पदों में रक्खो।

6. हल करो : $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=29, \quad \frac{5}{x}-\frac{6}{y}=2.$

7. हल करो : $2x+3y-8z+35=0, \quad 7x-4y+z-8=0,$
$12x-5y-3z+10=0.$

8. यदि $a:b=c:d=e:f$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$a:b::\sqrt{m^2a^2+n^2c^2-p^2e^2}:\sqrt{m^2b^2+n^2d^2-p^2f^2}.$$

VII

1. भाग करो : $-2x^5y^{-8}+17x^6y^{-4}-5x^7-24x^8y^4$ को
$-x^2y^{-5}-7x^3y^{-1}+8x^4y^3$ से।

2. म० स० अ० निकालो :
$e^{2x}a^3+e^{2x}-a^3-1$ और $e^{2x}a^2+2e^xa^2-e^{2x}-2e^x+a^2-1$ का।

3. सिद्ध करो : $1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}=\frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{2(ab+cd)}.$

4. सरल करो : $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}.$

5. हल करो : $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}.$

6. x^2+px+q और $x^2+p'x+q'$ दो व्यंजकों में से प्रत्येक यदि $x+a$ द्वारा विभाज्य हो, तो सिद्ध करो : $a=\frac{q-q'}{p-p'}.$

7. 100 पा० का एक बिल गिन्नियों व अर्द्धक्राउनों में चुकाया गया। इसमें यदि गिन्नियों की संख्या अर्द्धक्राउनों की संख्या से 48 कम हो, तो निकालो कि किस प्रकार के सिक्के कितने दिये गये हैं।

8. यदि $a:b::c:d$ हो, तो सिद्ध करो :
$$4a^6+5b^6:4c^6+5d^6::a^3b^3:c^3d^3.$$

VIII

1. सिद्ध करो कि $(ax+by+cz)^3+(cx-by+az)^3$ यह व्यंजक $(a+c)(x+z)$ से विभाज्य है।

2. गुणनखंड निकालो :
(i) $(b+c)^2-6a(b+c)+5a^2$; (ii) $x^2+2xy-a^2-2ay$.

3. सरल करो : $\dfrac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$.

4. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$.

5. हल करो : $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$.

6. वर्गमूल निकालो : $25x^{-2}-12x+16x^{-8}+4x^4-24x^{-5}$.

7. यदि $yz=4$, $zx=9$, $xy=25$ हो, तो x, y, z का मूल्य निकालो ।

8. यदि $a:b::c:d$ हो, तो सिद्ध करो कि $a(a+b+c+d)=(a+b)(a+c)$.

IX

1. यदि $a=1$, $b=2$ और $c=-3$ हो, तो
$\{a^2-(b-c)^2\}-\{b^2-(c-a)^2\}-\{c^2-(a-b)^2\}$ का मूल्य निकालो ।

2. सरल करो : $\dfrac{x}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^2}$.

3. गुणनखंड निकालो : $a^3-b^3+3ab+1$.

4. हल करो : $\dfrac{4x+3}{9}+\dfrac{7x-29}{5x-12}=\dfrac{8x+19}{18}$.

5. सिद्ध करो : $\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}=\left(\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{z-x}+\dfrac{1}{x-y}\right)^2$.

6. हल करो : $x+y:x-y=5:3$, $x+5y=36$.

7. 8 और 9 बजे के बीच किस समय घड़ी की सूइयाँ परस्पर लम्ब होंगी ?

8. यदि $a:b::b:c$ हो, तो सिद्ध करो :
$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2.$$

X

1. भाग करो : $27a^3-8b^3-27c^3-54abc$ को $3a-2b-3c$ से ।

2. म॰ स॰ अ॰ निकालो : x^5+11x^3-54 और $x^5+11x+12$ का ।

3. गुणनखंड निकालो : $(a^2-b^2)(x^2+y^2)+2(a^2+b^2)xy.$

4. सरल करो : $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}-2}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+2} \div \dfrac{\dfrac{a}{b}\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)}{\dfrac{(a+b)^2}{ab}-2}.$

5. सिद्ध करो कि $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$
$=(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab).$

6. तीन आदमी और एक लड़के 6 दिन में जिस काम को कर सकते हैं एक आदमी और दो लड़के उसको 12 दिन में कर सकते हैं। इस काम को एक आदमी कितने दिन में कर सकेगा ?

7. यदि $a : b :: b : c$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a^4+a^2c^2+c^4=b^2\left(\frac{b^2}{c^2}-1+\frac{b^2}{a^2}\right)(a^2+b^2+c^2).$$

XI

1. सिद्ध करो कि $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)=(x^2-xy+y^2)^2.$

2. गुणनखंड निकालो : (i) $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$;
(ii) $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z.$

3. वर्गमूल निकालो : $\dfrac{9x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{9x^2}-\dfrac{6x}{a}-\dfrac{2a}{3x}+3.$

4. हल करो : $x+2y+3z=6,\ 2x+4y+z=7,\ 3x+2y+9z=14.$

5. म० स० अ० निकालो : $x^4y-x^3y^2-15x^2y^3+38xy^4-14y^5$ और $x^5-7x^4y+21x^3y^2-34x^2y^3+28xy^4$ का।

6. एक मनुष्य 570 सन्तरों में से कुछ फ़ी शि० 16 के भाव और कुछ फ़ी शिलिङ्ग 18 के भाव से खरीद कर सब सन्तरों को फ़ी शि० 15 के भाव से बेच देता है ; यदि उसे 3 शि० मुनाफ़ा हो, तो उसने प्रत्येक प्रकार के कितने सन्तरे खरीदे थे ?

7. सरल करो :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{b}{c}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}.$$

8. यदि $a : b = c : d = e : f$ हो, तो सिद्ध करो :

$$(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2.$$

XII

1. यदि $x=a+d,\ y=b+d,\ z=c+d$ हो, तो सिद्ध करो :

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

2. सरल करो :

$$\frac{y+z}{(y^2-xz)(z^2-xy)}+\frac{z+x}{(z^2-xy)(x^2-yz)}+\frac{x+y}{(x^2-yz)(y^2-xz)}.$$

3. गुणनखंड निकालो :

(i) $x^2-2ax-b^2+2ab$; (ii) $x^2+(a+b+c)x+ab+ac.$

4. म० स० अ० निकालो :

$6x^4-2x^3+9x^2+9x-4$ और $9x^4+80x^2-9$ का।

5. हल करो : $\dfrac{6x+13}{15}-\dfrac{3x+5}{5x-25}-\dfrac{2x}{5}=0.$

6. किसी काम को A व B एक साथ 12 दिन में, A व C एक साथ 15 दिन में, और B व C एक साथ 20 दिन में कर सकते हैं ; A, B व C एक साथ कितने दिन में उस काम को कर सकेंगे ?

7. यदि $x : y :: a : b$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}.$$

XIII

1. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a(b-c)(s-a)^2+b(c-a)(s-b)^2+c(a-b)(s-c)^2=0.$$

2. सिद्ध करो कि $x^6+x^3a^3+a^6$ यह व्यंजक $x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{3}{8}}+a^{\frac{3}{4}}$ से विभाज्य है।

3. सरल करो : $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}.$

4. हल करो : $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}+\dfrac{x^2-b^2}{x-b}+\dfrac{x^2-c^2}{x-c}=a+b+c-3x.$

5. फ़ी गैलन 15 शि॰ के भाव की 80 गैलन शराब के साथ कितना पानी मिलाने पर, फ़ी गैलन 12 शिलिंग के भाव से बेचने से, कुल पूँजी का दसवाँ हिस्सा फ़ायदा होगा ?

6. सरल करो : $\dfrac{(x^{a+b})^2.(x^{b+c})^2.(x^{c+a})^2}{(x^a.x^b.x^c)^4}$.

7. यदि $a : b :: b : c$ हो, तो सिद्ध करो :

$$a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2 :: a : c.$$

XIV

1. यदि $a+b+c=2s$ हो और $a^2+b^2+ab+s^2=2s(a+b)$ हो, तो सिद्ध करो कि $(a-s)^2+(b-s)^2+(c-s)^2=s^2$.

2. यदि x^2+px+q और x^2+lx+m का एक साधारण गुणनखंड $x+a$ हो, तो सिद्ध करो कि $a=\dfrac{m-q}{l-p}$ होगा।

3. हल करो : $\dfrac{a-b}{x-a}+\dfrac{a-b}{x-b}=\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}$.

4. हल करो : $\dfrac{y+z-x}{b+c}=\dfrac{z+x-y}{c+a}=\dfrac{x+y-z}{a+b}=1$.

5. A जिस काम को 20 दिन में कर सकता है, B उसको 12 दिन में करता है ; A के कुछ दिन तक काम करने के बाद, B उसकी जगह पर रक्खा जाता है, और बाक़ी हिस्सा समाप्त करता है ; यदि A और B को कुल 14 दिन लगे हों, तो निकालो A ने कितने दिन काम किया था।

6. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)$ को वर्गान्तर के रूप में प्रकट करो।

7. यदि $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

XV

1. यदि $x^4+2ax^3+(a^2+8)x^2+(4a+ab)x+4b$ व्यंजक एक पूर्ण वर्ग हो, तो b का मूल्य निकालो।

2. सिद्ध करो कि $(b-c)(1+ab)(1+ac)+(c-a)(1+bc)(1+ba)$
$+(a-b)(1+ca)(1+cb)=(b-c)(c-a)(a-b)$.

3. सरल करो : $\frac{2x^3+2}{x^4+x^2+1}+\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{1}{x^2-x+1}$.

4. म० स० अ० निकालो : $2x^3+(2a-3b)x^2-(2b+3ab)x+3b^2$ और $2x^2-(3b-2c)x-3bc$ का।

5. मूल्य निकालो : $\frac{a^n}{2na^n-2nx}+\frac{b^n}{2nb^n-2nx}$ का, जब कि $x=\frac{a^n+b^n}{2}$ है।

6. हल करो : $\frac{20x+36}{25}+\frac{5x+20}{9x-16}=\frac{4x}{5}+\frac{86}{25}$.

7. शराब व पानी की मिलावट से भरे हुए एक बर्तन में मिलावट का प्रति सैकड़ा 70 हिस्सा शराब है; उसमें से 9 गैलन निकालकर, बर्तन का खाली हिस्सा पानी से भर देने पर देखा गया कि अब बर्तन की मिलावट में प्रति सैकड़ा $58\frac{1}{3}$ हिस्सा शराब रह गई है। बर्तन में कितने गैलन मिलावट थी ?

8. यदि $x-z : y-z :: x^2 : y^2$ हो, तो सिद्ध करो :

$$x+z : y+z :: \frac{x}{y}+2 : \frac{y}{x}+2.$$

XVI

1. म० स० अ० निकालो : $x^5+2x^4-5x^2-7x+3$ और
$3x^6-3x^4-18x^3+x^2+2x+3$ का।

2. यदि $(a+b+c)x=(-a+b+c)y=(a-b+c)z=(a+b-c)w$ हो, तो

सिद्ध करो कि $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$.

3. गुणनखंड निकालो : $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$.

4. यदि $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{a^2+ab}{ab-b^2}=\frac{c^2+cd}{cd-d^2}$.

5. दो बर्तनों में से प्रत्येक में शराब व पानी की मिलावट है; प्रत्येक पात्र से बराबर मिलावट निकाल के मिलाने पर देखा जाता है कि उसमें शराब व पानी के हिस्से बराबर हैं। परन्तु दूसरे बर्तन से जितनी मिलावट निकाली गई है, पहले से यदि उसकी

चौगुनी निकालकर मिला दी जाय तो उसमें शराब व पानी की निष्पत्ति 2 : 3 होती। तो निकालो कि प्रत्येक बर्तन में शराब व पानी की निष्पत्ति कितनी है।

XVII

1. म० स० अ० निकालो : x^5+x^2+2x+2 और x^4+x^2+1 का।

2. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ का मूल्य निकालो, जब कि $x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ है।

3. सिद्ध करो : $\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca.$

4. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो :

$$4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

इससे सिद्ध करो : $(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2+(x-y)^2(y-z)^2$
$=(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2.$

5. दो अंकवाली किसी संख्या का एक अंक दूसरे से 5 अधिक है; संख्या के दो अंकों को उल्टे क्रम से लिखने पर जो संख्या प्राप्त होती है, वह पूर्व संख्या का $\frac{3}{8}$ हिस्सा है; तो संख्या निकालो।

6. सरल करो : $\frac{3x^3+x^2-5x+21}{6x^3+29x^2+26x-21}.$

7. यदि $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ हो, तो सिद्ध करो कि $a=b=c$ है।

XVIII

1. सिद्ध करो : $\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}^2$
$=2\{(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\}.$

2. गुणनखंड निकालो :

(i) $14x^2-37x+5$; (ii) $(1+a)^2(1+c^2)-(1+c)^2(1+a^2)$;

(iii) $m^4-n^4+2n(m^3+n^3)-(m+n)^2(m-n)^2.$

3. एक नानबाई 3 पाउंड 12 आउन्स वज़न की एक-एक डबलरोटी 4 पाउंड वज़न की बताकर प्रत्येक को $9\frac{1}{2}$ पें० के भाव में बेचने लगा; और इस प्रकार कई रोटियां बेचने के बाद पकड़ा गया और उसे 5 पा० जुरमाना हुआ। कम वज़न की डबलरोटी बचने से उसे जो मुनाफ़ा हुआ था उससे उसे 5 शि० और अधिक घाटा हुआ। तो निकालो कि उसने कितनी रोटियाँ बेची थी।

4. सरल करो : $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

5. यदि $\frac{a-b}{ay+bx}=\frac{b-c}{bz+cy}=\frac{c-a}{cx+az}=\frac{a+b+c}{ax+by+cz}$ हो, तो सिद्ध करो कि

प्रत्येक निष्पत्ति $=\frac{1}{x+y+z}$, यदि $a+b+c=0$ न हो।

6. हल करो : $x(x+y+z)=24,\ y(x+y+z)=48,\ z(x+y+z)=72.$

XIX

1. सिद्ध करो : $\frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$

2 सरल करो : $\frac{(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3}{c^2-bc-ca+ab}$.

3. यदि m सोने के सिक्कों व n चाँदी के सिक्कों का वज़न बराबर हो, और p सोनें के सिक्कों और q चाँदी के सिक्कों का मूल्य बराबर हो; तो बराबर वज़न के सोने व चाँदी के मूल्यों की तुलना करो।

4. यदि $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$ हो, तो सिद्ध करो :

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=2(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

5. यदि $\frac{1}{b^3(a-c)}+\frac{1}{a^3(b-c)}=\frac{1}{ab(a-c)(b-c)}$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \text{ अथवा } a^2+b^2=ab.$$

XX

1. सिद्ध करो कि $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

2. यदि $x+a$ एक गुणनखंड हो $a^2x^3-b^3x^2+ac^3x+3a^3bc$ का और a का मूल्य 0 (zero) न हो, तो सिद्ध करो कि $a^3+b^3+c^3=3abc$.

3. सरल करो :

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ac}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{ab}{c(c^2-b^2)(c^2-a^2)}.$$

4. भाग करो : $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ को $(a-b)(b-c)(c-a)$ से।

5. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^5+b^5+c^5=5abc(c^2-ab)$.

6. हल करो : $$\frac{a}{x+a-c}+\frac{b}{x+b-c}=2.$$

7. हल करो : $$ax+by+cz=a+b+c,\ \frac{ax}{b+c}+\frac{by}{a+c}=1,$$
$$\frac{2x}{b+c}+\frac{2y}{a+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

8. कोई व्यक्ति रास्ते में बिना रुके कटक से जोवरे तक जाकर फिर कटक को लौटने के लिए चला। ठीक उसी समय एक और व्यक्ति ठीक उसी प्रकार जोवरे से कटक तक जाकर फिर जोवरे को लौटने के लिए चला। वे पहली मर्तबा जोवरे से डेढ़ मील की दूरी पर, और एक घंटे के बाद फिर कटक से एक मील की दूरी पर मिलते हैं। उनकी चाल व कटक से जोवरे की दूरी निकालो।

XXI

1. सिद्ध करो :
$$\{(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2\}\times\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
$$=2\{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)\}.$$

2. सिद्ध करो : $$\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=3.$$

3. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो :
$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$$

4. यदि $s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो :
$$(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2=3\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

5. गुणनखंड निकालो : $a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc$.

6. म॰ स॰ अ॰ निकालो : $x^4-2x^3+5x^2-4x+3$ और $2x^4-x^3+6x^2+2x+3$ का।

7. यदि $a:b=b:c=c:d$ हो, तो सिद्ध करो :
$$a:d=\sqrt{a^5+b^2c^2+a^3c^2}:\sqrt{b^4c+d^4+b^2cd^2}.$$

XXII

1. सिद्ध करो : $a(b-c)(1+ab)(1+ac)+b(c-a)(1+bc)(1+ba)$
$+c(a-b)(1+ca)(1+cb)=abc(a-b)(a-c)(b-c).$

2. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^7+b^7+c^7=7abc(c^2-ab)^2$.

3. यदि ax^2+bx+c और $a'x^2+b'x+c'$ दो व्यंजकों में $x+f$ के रूप का एक गुणनखंड साधारण हो, तो सिद्ध करो कि $(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$.

4. A व B में दौड़ हुई, और B को 50 गज़ आगे बढ़ने दिया गया ; परन्तु B जिस समय में 19 गज़ जाता है, A उतने समय में 20 गज़ जा सकता है ; दौड़ में A, B को एक गज़ से हरा देता है ; तो A कितनी दूर दौड़ा था ?

5. सिद्ध करो : $\dfrac{p+q+r}{p-q}-\dfrac{q(4p+3r)+r(p+r)}{p^2-q^2}=\dfrac{(p-q+r)^2}{p^2-q^2}$.

6. सिद्ध करो :
$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}=(a+b)(b+c)(c+a).$$

7. हल करो : $x+y+z=2a+2b+2c$,
$ax+by+cz=2bc+2ca+2ab,\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$

XXIII

1. सिद्ध करो : $(b-c)(1+a^2b)(1+a^2c)+(c-a)(1+b^2c)(1+b^2a)$
$+(a-b)(1+c^2a)(1+c^2b)=abc(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c).$

2. ल० स० अ० निकालो :
$21x^2-13x+2,\ 28x^2-15x+2$ और $12x^2-7x+1$ का।

3. सिद्ध करो कि $(x+y)^7-x^7-y^7$ व्यंजक विभाज्य है $(x^2+xy+y^2)^2$ से।

4. यदि $2s=a+b+c$ और $2t^2=a^2+b^2+c^2$ हो, तो सिद्ध करो कि
$$(t^2-a^2)(t^2-b^2)+(t^2-b^2)(t^2-c^2)+(t^2-c^2)(t^2-a^2)$$
$$=4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

5. यदि $(1+xx'+yy')^2=(1+x^2+y^2)(1+x'^2+y'^2)$ हो, तो सिद्ध करो कि $x=x'$ और $y=y'$.

6. सरल करो :

$$\frac{ab(a-b)(a^2+b^2)+bc(b-c)(b^2+c^2)+ca(c-a)(c^2+a^2)}{a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)}.$$

7. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

XXIV

1. हल करो : $x+y+z=a+b+c,$

$$bx+cy+az=cx+ay+bz=ab+bc+ca.$$

2. 243 के ऐसे तीन हिस्से बनाओ कि पहले हिस्से का आधा, दूसरे हिस्से की तिहाई और तीसरे हिस्से की चौथाई परस्पर बराबर हों।

3. यदि $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$a=b=c=d.$$

4. यदि $2s=a+b+c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$a(b-c)(s-a)^2+b(c-a)(s-b)^2+c(a-b)(s-c)^2=0.$$

5. यदि $bz+cy=a$, $az+cx=b$ और $ay+bx=c$ हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{b^2}{1-y^2}=\frac{c^2}{1-z^2}.$$

6. ax^2-bx+c और dx^2-bx+c व्यंजकों का यदि सार्व गुणनखंड हो, तो सिद्ध करो कि $a^2-abd+cd^2=0$.

7. यदि $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$ हो, तो सिद्ध करो कि $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$, जब कि n एक धनात्मक अभिन्न है।

XXV

1. यदि $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}=(a+b+c)(x+y+z).$$

2. यदि $2s = a+b+c+d$ हो, तो सिद्ध करो :

$$4(bc+ad)^2 - (b^2+c^2-a^2-d^2)^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

3. सिद्ध करो : $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$

$$-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

4. यदि $a+b+c=0$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

5. यदि $x : a = y : b = z : c$ हो, तो सिद्ध करो :

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

6. यदि $ax+by+cz=0$ और $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ हो, तो सिद्ध करो :

$$ax^3+by^3+cz^3+(a+b+c)(y+z)(z+x)(x+y)=0.$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1. [पृ० २-४]

1. 100. 2. 10. 3. 12 मील। 4. 8 मील।
5. 9. 6. 12. 7. 45 मिनट। 8. 15 मिनट।
9. 32. 10. $\frac{1}{12}$; $20\frac{1}{2}$. 11. 5 वर्गगज़। 12. 7 शि० 6 पे०।
13. 20. 14. 9. 15. 28. 16. 4.
17. 4480. 18. 900. 19. 1952. 20. 720.

प्रश्नमाला 2. [पृ० ६]

1. 34. 2. 0. 3. 4. 4. 1. 5. $5\frac{1}{3}$.
6. $1\frac{1}{3}$. 7. 6. 8. 4. 9. 12. 10. 8.
11. 2. 12. $\frac{1}{3}$. 13. 5. 14. 80. 15. 29.
16. 325. 17. 0. 18. 14. 19. 114. 20. 4.
21. 69. 22. 19. 23. 0. 24. 325. 25. 9.

प्रश्नमाला 3. [पृ० १२]

1. 24. 2. $37\frac{1}{3}$. 3. 4. 4. 720. 5. $3\frac{1}{3}$.
6. $\frac{2}{3}$. 7. 1. 8. 40. 9. $\frac{2}{3}$. 10. $\frac{8}{9}$.
11. 0. 12. 50. 13. 1. 14. 75. 15. 100.
16. 200. 17. 1520. 18. 41·625. 19. 22680. 20. 845000.

प्रश्नमाला 4. [पृ० १५-१६]

1. 4. 2. 2. 3. 6. 4. 18. 5. 8.
6. 16. 7. 32. 8. 256. 9. 11. 10. 21.
11. 11. 12. 9. 13. 3. 14. 162. 15. 18.
16. 9. 17. 0. 18. 21. 19. 23. 20. 1.
21. 98. 22. 50. 23. 9. 24. 42. 25. 51.
26. 2805. 27. 7. 28. 171. 29. 2401. 30. 192.
31. 1029. 32. 1218. 33. 48. 34. 143. 35. 18750.
36. 16. 37. 160. 38. 78. 39. 7. 40. 2.

प्रश्नमाला 5. [पृ० १९-२०]

1. A का घाटा = £100. 2. -70. 3. -25.
4. -100. 5. -30. 6. $4, -3, 5$.
7. $15, -10, -20, 30$. 8. $-15, 10, 20, -30$.

प्रश्नमाला 6. [पृ० २२]

1. -22. 2. -18. 3. $-31, -41$. 4. -19.
5. -1180. 6. -222. 7. -2034. 8. 658.
9. -7128. 10. -220416417.

प्रश्नमाला 7. [पृ० २४]

1. 3. 2. -5. 3. -4. 4. -47. 5. -14.
6. -51. 7. 16. 8. -8. 9. -32. 10. 1.

प्रश्नमाला 8. [पृ० २८-२९]

1. $-x+y$. 2. $m^2+n^2+p^2$. 3. $c^2+a^2b-a^3$.
4. $2abc-3mnp^2$. 5. $2a^3b-9b^2c^2-2df$.
6. $-6x^4y-11xyz-10x^2y^2$. 7. $4(a^2bc-b^2ca+c^2ab)$.
8. $-25x^3mn+16m^3nx$. 9. -14. 10. -234.
11. 92. 12. 5. 13. 177. 14. -4653.
15. -12015. 16. $-6a+b-3c$. 17. $2x-z$.
18. $2x^3+9x^2+7$. 19. $-a+2b-8d$. 20. $2x^2-3y^2$.
21. 153. 22. -125. 23. 200. 24. 120. 25. 400.

प्रश्नमाला 9. [पृ० ३१]

1. -10. 2. 10. 3. -6. 4. -22. 5. 0.
6. -291. 7. -77. 8. 83. 9. 17. 10. 177.

प्रश्नमाला 10. [पृ० ३३]

1. $2a+3b-2c$. 2. $-3a+3b+4c$. 3. $3x+2y-3z$.
4. $2m^2-2m-4$. 5. $2x^2+y^2-z^2$. 6. $-2y^2-7xy+3x^2$.
7. $4a^2-7ab-b^2$. 8. $7bc-7c^2+10xy$. 9. $-x^3+x^2-x+2$.
10. $-(x+2y)$. 11. $3x-4y+5z$. 12. $-2m^3-5m+6$.
13. $-(3a^2b+3ab^2)$. 14. $2a^2b^2$. 15. $-3a^2b+3ab^2$.

प्रश्नमाला 11. [पृ० ३६-३७]

1. $-4a+8b$. 2. $7x-4y$. 3. $-2x$. 4. $-4a+2b$.
5. $5a+2b$. 6. $2b$. 7. 6. 8. 8. 9. $-2a+7b$.
10. 0. 11. $-2x+5y+7z$. 12. $-2c$. 13. $15x-15y$.
14. $8a-8b$. 15. $11m-7n$. 16. $6a-6b-18c$.
17. $6x-6y-20z$. 18. $x-y-13z$. 19. $-3x-y-z$.
20. $a-11b+17c$. 21. $2x-12y+20z$. 22. $5a-b+11c$.
23. $x-3y+2z$. 24. $11a-2b-16c$.
25. $a-(b+c-d)+(-m+n-x)+y-z$.
26. $a-\{b+c-d+m+(-n+x-y+z)\}$.
27. $\{a-b-(c-d+m)\}-\{-n-(-x+y-z)\}$.
28. $-\{-a-(-b-c)\}-\{-d-(-m+n)\}-\{x-(y-z)\}$.

प्रश्नमाला 12. [पृ० ३८-३९]

1. 15. 2. 18. 3. 36. 4. -32.
5. -45. 6. -78. 7. -24. 8. -35.
9. -45. 10. 36. 11. 60. 12. 64.

प्रश्नमाला 13. [पृ० ४०]

1. 54. 2. 47. 3. -8. 4. -393. 5. -111.
6. 30. 7. 0. 8. 1136. 9. -280.

प्रश्नमाला 15. [पृ० ४६]

14. $-6x^7y^5$. 15. $21a^8b^4c^8$. 16. $40x^{17}y^{10}$.
17. $-156x^{10}y^9z^6$. 18. $140x^6y^7z^{20}$. 19. $-4x^{11}y^7$.
20. $-70a^{15}b^{12}$. 21. $48x^{16}y^{10}z^7$. 22. $24x^7y^8z^7$.

प्रश्नमाला 16. [पृ० ४७]

1. $-10x^7$. 2. $-20a^4b^6$. 3. $21m^7n^8$. 4. $-18x^4y^7$.
5. $3a^7b^{10}$. 6. $-40m^8n^7$. 7. $50x^2y^8z^8$. 8. $-24x^4y^4z^4$.
9. $48x^5y^5z^5$. 10. $25a^5b^9c^{13}$. 11. $-24x^8y^8z^5$.
12. $32a^3b^2x^2y^3$. 13. $35a^8b^8z^4$. 14. $-60a^6x^7y^5$.
15. $70x^5y^5z$. 16. $-18a^8b^6c^6$. 17. $63a^9x^8y^2$.
18. $160x^{14}y^7z^7$. 19. $65a^{10}b^{14}c^{20}$. 20. $112a^{13}x^{10}y^9z^7$.

B—31

प्रश्नमाला 17. [पृ० ४६-५०]

1. $-2x^2+xy$. 2. $-5a^2+10ab-15ac$. 3. $8x^2y-12xy^2$.
4. $2a^3bc-3ab^3c-abc^3$. 5. $-3x^3y^2+6x^2y^3+3xy^4$.
6. $21a^2b^4-7ab^4-35a^3b^2+7a^2b^3$. 7. $-6a^4x+8a^3x^2-10a^3x$.
8. $-8m^4n+12m^3n^2-20m^2n^3$. 9. $-a^3b^2c^2+a^2b^3c^2-a^2b^2c^3$.
10. $x^3yz+xy^3z+xyz^3-xy^2z^2-yz^2x^2-zx^2y^2$.
11. $12c^4d^5-18c^3d^7+30c^3d^6+24c^4d^6$.
12. $-16a^7b^3+12a^6b^4-10a^5b^5+8a^4b^6$. 13. $7x^4-2x^2$.
14. 0. 15. $9x^6-25y^4$. 16. x^6+4x^2.
17. $a^{12}b^6+4a^4b^2$. 18. $4a^{18}b^{12}+81a^6b^4$. 19. $3a^2y$.
20. (i) $x^3+y^3+z^3-3xyz$; (ii) 0.

प्रश्नमाला 18. [पृ० ५३-५४]

1. $-4x^3$. 2. $-3x^4$. 3. $4a^4x^3$. 4. $3x^5y^5$.
5. $2a^2b^2$. 6. $-2p^2q^2$. 7. $5x^6y^4z$. 8. $-8a^3c^2$.
9. $-3m^5n^6p$. 10. $3a^2c^2$. 11. $-5x^4y^2$. 12. $3a^6x^5y^4z^2$.
13. a^{44}. 14. $-7x^{48}$. 15. $-7m^{18}$. 16. $-7a^{41}b^{120}$.

प्रश्नमाला 19. [पृ० ५४-५५]

1. $3a-2b$. 2. $-2a^2+3b^2$. 3. $2a^2-3b^2$.
4. $-4xy+3x^2$. 5. $-2x^2+3y^2$. 6. $n^2-3mn+4m^2$.
7. $ax-2x^2+3a^2$. 8. $-3x^2+2a^2-5ax$.
9. $2m^2n^2-3m^4-4n^4$. 10. $-p^2+\frac{5}{8}pq+\frac{3}{8}q^2$.
11. $-2xy^2+3x^3-4y^3$. 12. $\frac{3}{4}x^3-\frac{8}{9}a^3-\frac{9}{4}a^2x$.
13. $3xa+\frac{15}{4}a^2-4x^2$. 14. $5m^4n^2-7m^2n^4-8p^6$.
15. $b^2c^2x^2y^2-2a^2c^2y^2z^2+3a^2b^2x^2z^2$.

विविध प्रश्नमाला I [पृ० ५५-६०]

I

1. (i) 10; (ii) $\frac{1}{3}$. 2. 8. 3. 15; $2a$; $7ab^2$; $16m^2pq$.
4. 6. 5. $-\frac{1}{3}$. 8. 9, 7, 5, 2, -1, -3, -4, -8, -12.

II

1. 0, 25, 46, 45. 2. 16. 3. $(\sqrt[3]{a})\times(\sqrt[3]{a})\times(\sqrt[3]{a})=a$, &c.; 35.
5. $-7x^2y$; -560. 6. $16x^4-8xy^3+24x^2y^2+y^4-32x^3y$; 81.
7. $30b+13c-23a$. 8. $x-2y+z$.

III

1. (i) $(a+b)c=x+yz$; (ii) $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$; (iii) $\sqrt[3]{(m-n)}+(m^3n^3) < \sqrt{x}+\sqrt{y}$; (iv) $\because a > b, \therefore 3a > 3b$.
2. $5, -4, -\frac{13}{2}, \frac{13}{2}, -10$.
3. -1000.
5. 66.
7. $-6a^2+bc-9x^2+16$.
8. a.

IV

1. -11; 1.
3. $4\frac{13}{15}$.
5. 9.
6. $3x+2a+b$.
7. $a^2+b^2+c^2$.
8. $7x^2-2xy-y^2$.

V

3. $2, a, b, a+b$.
4. $7\frac{1}{2}$.
5. 505.
7. y.
8. 32.

VI

2. 536.
6. 60.
8. 3808.

VII

2. 2; 0.
4. $1+x$; $3a+b-5c$.
5. (i) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; (ii) $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$.
6. 0.
7. $a+b+c$.
8. $2a-\frac{3}{4}b+\frac{7}{8}c-\frac{3}{10}d$.

VIII

2. $2m$; $2n$.
3. $ma+mb+na+nb$; $a^2+2ab+b^2$.
4. 0; 0.
6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$:
7. $36a^8b^{15}c^{22}x^{10}y^{10}z^{10}+90a^{13}b^{20}c^{12}x^8y^8z^8+10a^{18}b^{10}c^{17}x^6y^6z^6$.
8. $2b^5c^{10}x^4y^2+5a^5b^{10}x^2z^4+3a^{10}c^5y^4z^2$.

प्रश्नमाला 20. [पृ० ६२-६३]

1. $x^2+8x+16$.
2. $9a^2+12a+4$.
3. $x^2+4xy+4y^2$.
4. $4x^2+28xy+49y^2$.
5. $9a^2+24ab+16b^2$.
6. $25a^2+70ab+49b^2$.
7. $a^2y^2+6abxy+9b^2x^2$.
8. $a^4+4a^2bc+4b^2c^2$.
9. $9x^4+12x^2y^2+4y^4$.
10. $16x^4+8x^2y^3+y^6$.
11. $a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc$.
12. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2$.
13. $4p^2+9q^2+16r^2+12pq+24qr+16rp$.

14. $x^4+y^4+z^4+2y^2z^2+2x^2y^2+2x^2z^2$. 15. $4x^2+9y^2+16z^2+24yz+16zx+12xy$. 16. $x^4+y^6+z^8+2y^3z^4+2x^2y^3+2x^2z^4$.
17. $x^2+y^2+4a^2+9b^2+2xy+12ab+4ax+6bx+4ay+6by$.
18. $9a^2+16b^2+c^2+4d^2+24ab+6ac+12ad+8bc+16bd+4cd$.
19. $4a^2+x^2+16y^2+9z^2+4ax+16ay+12az+8xy+6xz+24yz$.
20. $16m^2+9n^2+9p^2+4q^2+24mn+24pm+16mq+18np+12nq+12pq$.
21. $4x^2$. 22. $4z^2$. 23. $16a^2$. 24. $a^2+4ab+4b^2$.
25. $x^2+2xy+y^2$. 26. 1. 27. 0. 28. 4.
29. 9. 30. 1. 31. 16. 32. 25.

प्रश्नमाला 21. [पृ० ६४-६५]

1. x^2-6x+9. 2. $4x^2-20x+25$. 3. $9x^2-30xy+25y^2$.
4. $a^2x^2-2abxy+b^2y^2$. 5. $64m^2-48mn+9n^2$.
6. $p^2m^2-2pqmn+q^2n^2$. 7. $p^4-2p^2mn+m^2n^2$.
8. $x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4$. 9. $x^6-4x^4z+4x^2z^2$.
10. $9a^6-30a^3b^3+25b^6$. 11. $x^2y^2z^2+2abcxyz+a^2b^2c^2$.
12. $x^4y^2z^2-2x^3y^3z^2+y^4z^2x^2$. 13. $a^4x^8-2a^2b^2x^4y^4+b^4y^8$.
14. $a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac+8bc$. 15. $4x^2+9y^2+16z^2-12xy-16xz+24yz$. 16. $9m^2+16n^2+25q^2-24mn+40nq-30mq$.
17. $a^4+9b^4+25c^4-6a^2b^2+30b^2c^2-10c^2a^2$. 18. $x^2+y^2+a^2+b^2-2xy-2ax-2bx+2ay+2by+2ab$. 19. $a^2+4x^2+9b^2+16y^2-4ax-6ab-8ay+12bx+16xy+24by$. 20. 7921.
21. 13689. 22. 248004. 23. 986049. 24. $36b^2$. 25. $64b^2$.
26. $49a^2$. 27. $121z^4$. 28. $25b^2c^2+c^2a^2+10abc^2$. 29. 4.
30. 81. 31. 16. 32. 25. 33. 144.

प्रश्नमाला 22. [पृ० ६७-६८]

1. x^2-9. 2. $25x^2-169$. 3. x^2-4a^2.
4. $a^2x^2-b^2y^2$. 5. $a^2m^2-n^4$. 6. $x^2y^2-y^2z^2$.
7. $x^4-4y^2z^2$. 8. $x^2y^4-x^4y^2$. 9. x^4-1.
10. a^8-b^8. 11. $a^2+b^2+2ab-c^2$.
12. $a^2-b^2-c^2-2bc$. 13. $m^4+m^2n^2+n^4$. 14. x^4+4y^4.
15. $a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2+2bcyz$. 16. $b^2y^2+c^2z^2-a^2x^2+2bcyz$.
17. $b^4m^2-c^4n^2-a^4p^2+2c^2a^2np$. 18. $a^6-64b^6-729c^6+432b^3c^3$.

19. a^4x^4+4. 20. $a^8x^8+a^4x^4+1$. 21. m^4+n^4. 22. x^8-1.
23. $4a(b-c)$. 24. $4a(3c-2b)$. 25. $4xy(x^2+y^2)$. 26. $4x(y-a+b)$.
27. $8a(3b-5c+7d)$. 28. 9376. 29. 1069840. 30. 4985645.
31. $(5x+6)(5x-6)$. 32. $(3a+4c)(3a-4c)$. 33. $(4m+7n)(4m-7n)$.
34. $(2p+9q)(2p-9q)$. 35. $(ax+8b)(ax-8b)$.
36. $(6x^2+11y^2)(6x^2-11y^2)$. 37. $(7+8d)(7-8d)$.
38. $(12c+5d)(12c-5d)$. 39. $(a+b+c)(a+b-c)$.
40. $(a+2b+5c)(a+2b-5c)$. 41. $(2x+3a-4b)(2x-3a+4b)$.
42. $(a+2b-3c)(a-2b+3c)$. 43. $(a^2+9b^2)(a+3b)(a-3b)$.
44. $(x-y+a-b)(x-y-a+b)$. 45. $(9x^2+25y^2)(3x+5y)(3x-5y)$.
46. $(7a-b)(a+15b)$. 47. $(5x-2y)(x+12y)$. 48. $(2a+3b-4c)(b-2c)$.
49. $(2m+5n-2p)(2m+n-8p)$. 50. $(5x-7y+12z)(x-y+2z)$.

प्रश्नमाला 23. [पृ० ६९-७०]

1. $x^3+9x^2+27x+27$. 2. $8x^3+12x^2+6x+1$.
3. $27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3$. 4. $64x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3$.
5. $x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3$. 6. $x^3y^3+3x^2y^3z+3xy^3z^2+y^3z^3$.
7. $a^6b^3+3a^4b^2c^2d+3a^2bc^4d^2+c^6d^3$.
8. $a^3+b^3+8c^3+3a^2b+6a^2c+3ab^2+12ac^2+6b^2c+12bc^2+12abc$.
9. $8x^3+27y^3+z^3+36x^2y+12x^2z+54xy^2+6xz^2+27y^2z+9yz^2+36xyz$.
10. $x^9+3x^6y^3+3x^3y^6+y^9$. 11. $125m^3$.
12. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. 13. $27b^3$. 14. x^3+3x^2+3x+1.
15. $x^3+6x^2+12x+8$. 16. $8a^3$. 17. 90. 18. 175.
20. 52. 21. 0. 22. -1. 23. 0. 24. 10.

प्रश्नमाला 24. [पृ० ७१-७२]

1. $x^3-6x^2+12x-8$. 2. $8x^3-12x^2+6x-1$.
3. $8-36a+54a^2-27a^3$. 4. $27-108a+144a^2-64a^3$.
5. $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$. 6. $125m^3-300m^2n+240mn^2-64n^3$.
7. $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$. 8. $8a^3-b^3-c^3-12a^2b-12a^2c+6ab^2+6ac^2-3b^2c-3bc^2+12abc$. 9. $8x^3-27y^3-z^3-36x^2y-12x^2z+54xy^2+6xz^2-27y^2z-9yz^2+36xyz$. 10. $p^6-q^6-r^6-3p^4q^2-3p^4r^2+3p^2q^4+3p^2r^4-3q^4r^2-3q^2r^4+6p^2q^2r^2$.
11. $64b^3$. 12. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$. 13. $8x^3$. 14. 0.
15. 343. 16. -505. 17. 27. 18. 36. 19. 140.

प्रश्नमाला 25. [पृ० ७३]

1. x^3+1. 2. $1+8x^3$. 3. $125p^3+1$. 4. $343a^3+64b^3$.
5. $512x^3+27y^3$. 6. $a^3b^3+64c^3$. 7. $a^3x^3+125b^3$.
8. $125a^3+729b^3$. 9. $(a+1)(a^2-a+1)$. 10. $(x+2)(x^2-2x+4)$.
11. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$. 12. $(3a+2)(9a^2-6a+4)$.
13. $(2m+4)(4m^2-8m+16)$. 14. $(4p+5)(16p^2-20p+25)$.
15. $(2x+6y)(4x^2-12xy+36y^2)$. 16. $(3a+7y)(9a^2-21ay+49y^2)$.
17. $(6ax+y)(36a^2x^2-6axy+y^2)$.
18. $(3ab+4xy)(9a^2b^2-12abxy+16x^2y^2)$.
19. $(9abc+10xyz)(81a^2b^2c^2-90axbcyz+100x^2y^2z^2)$.
20. $(11ab^2x^3+9cy^2z^3)(121a^2b^4x^6-99acb^2y^2x^3z^3+81c^2y^4z^6)$.

प्रश्नमाला 26. [पृ० ७४]

1. $1-8x^3$. 2. x^3-27. 3. $64a^3-1$. 4. $x^6-8y^3z^3$.
5. $27m^3-8n^3q^3$. 6. $(5a-1)(25a^2+5a+1)$.
7. $(7x-2y^2)(49x^2+14xy^2+4y^4)$. 8. $(6k-5l)(36k^2+30kl+25l^2)$.
9. $(1-8k)(1+8k+64k^2)$. 10. $(9m-4an^2)(81m^2+36amn^2+16a^2n^4)$.

प्रश्नमाला 27. [पृ० ७५-७६]

1. x^2+3x+2. 2. $x^2+11x+18$. 3. x^2+x-30.
4. $x^2-14x+33$. 5. $a^2+5a-176$. 6. $m^2+12m-133$.
7. $p^2+2p-143$. 8. $p^2-5p-204$. 9. $x^2+5x-36$.
10. $x^2-15x+50$. 11. $x^2-7x-60$. 12. $k^2-11k-26$.
13. $a^2+19a+70$. 14. $m^2-8m-84$. 15. $x^2-18x+65$.
16. $x^2+19x+84$. 17. $a^2-14a+33$. 18. $x^2-9x-52$.
19. $m^2-11m-80$. 20. $x^2-18x+80$. 21. $a^2-6a-72$.
22. $m^2+6m-91$. 23. $x^2-26x+160$. 24. $x^2-13x-90$.
25. $x^2-6x-160$.

प्रश्नमाला 28. [पृ० ८०]

1. 4. 2. -5. 3. -4. 4. -5. 5. -5. 6. -60.
7. 13. 8. 5. 9. -2. 10. -2. 11. 1. 12. 2.
13. 3. 14. -4. 15. 0. 16. 7. 17. -2. 18. -1.
19. 7. 20. 3. 21. 5. 22. 7. 23. -6. 24. 0.
25. -8. 26. 9. 27. -2. 28. $\frac{1}{3}$. 29. 1. 30. -1.
31. 12. 32. 30. 33. 12.

प्रश्नमाला 29. [पृ० ८२-८३]

1. $15-x$. 2. $x-20$. 3. $x+25$. 4. $25-y$.
5. $y-2x$. 6. $\frac{21}{x}$. 7. $100-3x$. 8. $4x-3y$.
9. xy 10. $\frac{x}{y}$ घन्टा। 11. $(x+20)$ साल; $(x-3)$ साल।
12. $\frac{60}{x}$ मील। 13. $\frac{44}{x}$ 14. $\frac{7x}{4}$ रुपया।
15. $x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2$. 16. $3x$. 17. $2m+3$.
18. $2x-2$. 19. $\frac{10x}{y}$ दिन। 20. $3ab$. 21. $\frac{3ab}{16}$.
22. $\frac{x}{3y}$ 23. $\frac{16a}{x}$ घन्टा। 24. $(x+15)$ साल; $(x+45)$ साल।
25. $10y+x$. 26. $100x+10y+z$. 27. $100z+10y+x$.

प्रश्नमाला 30. [पृ० ८५-८६]

1. 6 व 3 फ़ुट। 2. 20. 3. 40 व 10. 4. 80. 5. 12.
6. 60. 7. 40. 8. 96. 9. 42, 43, 44. 10. 33.
11. 25, 65. 12. 15 व 24. 13. 36. 14. 72.
15. 10, 11. 16. 600 पा., 250 पा.। 17. 120 पा., 300 पा.।
18. 3 पा. 10 शि.। 19. 25, 35. 20. 30, 10.

प्रश्नमाला 31. [पृ० ८६-९०]

2. BE को AD के बराबर लो; मान लो कि F, DE का मध्यविन्दु है, तो F, AB का लगभग मध्यविन्दु है, और इसमें यदि कुछ भूल है, तो वह असिमित छोटा है।

7. 2·56, 1·68, 3·79, 2·39, 1·40.

प्रश्नमाला 32. [पृ० ९४]

1. $6\frac{2}{3}$ इकाई की लम्बाई। 2. $7\frac{4}{5}$ फ़ुट। 3. $7\frac{1}{7}$ गज़। 4. 3·5 इंच।
5. 3·6 फ़ुट। 6. $\frac{7}{10}$ फ़ुट। 7. 5 गज़। 8. 65 फ़ुट।
9. 17 फ़ुट। 10. 28·3 फ़ुट।

प्रश्नमाला 34. [पृ० १०२-१०४]

1. (i) (11, 8) ; (−9, 11) ; (−5, −6) ; (9, −10).
(ii) (2·2, 1·6) ; (−1·8, 2·2) ; (−1, −1·2) ; (1·8, −2).
2. $(3\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3})$; $(-3, 3\frac{2}{3})$; $(-1\frac{2}{3}, -2)$; $(3, -3\frac{1}{3})$. 5. 20.
6. 13. 7. 50. 8. 11 ; −13. 9. 17·5 ; 36.
10. 12 ; 8. 11. 12·5 क्षेत्रफल की इकाई। 12. 16 क्षेत्रफल की इकाई।
13. 1 क्षेत्रफल की इकाई। 14. 40 क्षेत्रफल की इकाई; 7, 4·5. 15. (i) 83 ;
(ii) 78 ; (iii) 420 ; (iv) 72. 16. 30 वर्ग से. मि. ; 5 से. मि. ; 90°.
17. 2·5 से. मि.। 18. 6, 7. 19. 5. 20. 32 क्षेत्रफल की इकाई ; 7, 5.

विविध प्रश्नमाला II [पृ० १०४-१०६]

I

1. $x^2+y^2+z^2+2yz-2zx-2xy$. 7. $m^2+n^2+9p^2+2mn+3pm+3pn$.
8. $3(9x^2-31xy-22y^2)$. 9. 217.

II

1. −4. 2. −1. 3. 3. 4. $\frac{b^2}{a}$. 5. $\frac{p^2+m^2+n^2}{mnp}$.
6. 7. 7. 11. 8. 5. 9. $\frac{2}{3}$. 10. $1\frac{1}{14}$.

III

1. 7. 2. 126. 3. 1500 रु०।
4. 2250 पा. ; 900 पा. ; 750 पा. ; 300 पा.। 5. 40 ; 20 ; 36.
6. 52 पा. ; 2 पा. 12 शि.।

प्रश्नमाला 35. [पृ० ११२-११४]

1. $-5x^2-2xy-y^2-2x-y-2$. 2. $4a^2b$. 3. $-m^3n^2-mnp-m^2n^2$. 4. $a^2b^2x^2$. 5. $a^4b^4c^4$. 6. $a^3b^3-b^3c^3+c^3a^3-a^2b^2c^2$.
7. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 8. $2x+2y+2z$. 9. $2x+2y+2z$. 10. $x^2y+y^2z+z^2x$. 11. $a^2b+b^2c+ca^2+ab^2+bc^2+c^2a$. 12. $abc^2+bca^2+b^2d+cab^2+a^2d+c^2d$. 13. $-\frac{3}{4}(x+y+z)$. 14. $-\frac{5}{12}(x+y+z)$.
15. 0. 16. 0. 17. 0. 18. 1280. 19. 1280. 20. 0.
21. $(a^2+b^2)(m+n+p+q+l)+(a^2-b^2)(m+n+p+q+k)+c^2(l+m+n)$.
22. $4(ax^2+by^2+cz^2)$. 23. 0. 24. $3(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.
25. $(a+b+c)(x^2+y^2+z^2)$.

प्रश्नमाला 36 [पृ० ११६-११८]

1. $10x^5-11x^4y+10x^3y^2+6x^2y^3-3y^4$. 2. $2m^3nx-7n^3xm+12x^3mn+7m^2n^2x+8n^2x^2m$. 3. $11x^6-3x^5y-50x^4y^2+15x^3y^3+26x^2y^4-19xy^5+40y^6$. 4. $5ax^4-8a^2x^3+8yzbc^2+2y^2zbc+4yz^2bc$.
5. $-2-x^3y^5z+2xy^3z^5+2x^3z^5y+6x^2y^2z^2-3xyz^4$. 6. $4x^4y^3z^2-80x^3y^4z^2+28x^2y^3z^4-22x^3y^2z^4-102x^4y^2z^3+155x^2y^4z^3$.
7. $-12x^3y^4z^5-100x^3y^5z^4+58x^4y^5z^3+92x^4y^3z^5+39x^5y^3z^4-38x^5y^4z^3$. 8. $-4x^2+5xy-7y^2-8yz$. 9. $6x^3-12x^2y^2+2a^2bx-7bxy^2-9xyab$. 10. $-2x^4+6x^3y-2x^2y^2+8xy^3+7y^4$.
11. $-2x^5+3x^4y-10x^3y^2-4x^2y^3-13xy^4+50y^5$. 12. $a^2+5ab-8b^2$. 13. $4x^2-8xy+y^2-12x-15y+9$. 14. $2a^3-4a^2b+7ab^2+15b^3$. 15. $-12x^3y+7x^2y^2-8x^2+17y-29$. 16. $5a^2-4ab-5bc+11b^2$. 17. $-2x^3-3y^2-5xy-3x-2$. 18. $-3a^3-11b^2c-6ac^2-5b^3$. 19. $-4x^3-22xy^2-45y^3-11x^2-24xy-15$. 20. $\frac{11}{24}x+\frac{19}{160}y+\frac{496}{57}z$. 21. $\frac{3}{10}ax+\frac{11}{56}y+\frac{32}{45}mz$. 22. $30{\cdot}08c^2by+1{\cdot}2a^2cx+{\cdot}45c^3z$. 23. $-\frac{120}{19}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{3}}x-\frac{15}{44}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y-b^{\frac{3}{8}}c^{\frac{5}{12}}z+lx-6my-5nz$.
24. (i) $1{\cdot}2x+2{\cdot}3y-{\cdot}6z$; (ii) $35x-24{\cdot}7y-\frac{1}{21}z$;
(iii) $3{\cdot}\dot{4}a+19{\cdot}04l^2+20m^2+30p$. 25. $2(bc^2+ca^2+ab^2)$. 26. 0.
27. 0. 28. $ax+by+cz$. 29. $2ax+12by-cz$. 30. $14x+44y+7z$.

प्रश्नमाला 37. [पृ० १२०]

1. $2a^2+5ab+3b^2$. 2. $2m^2-5mn+3n^2$. 3. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. 4. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$. 5. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$. 6. $2a^2+2b^2+3c^2-5ab-7ac+5bc$. 7. $2x^2+3y^2+4z^2-5xy-6xz+7yz$. 8. $5x^2-2a^2-3b^2+3ax-2bx+5ab$. 9. $x^3-y^3-z^3-x^2y-x^2z+xy^2-y^2z+xz^2-z^2y$. 10. $x^2y^2-y^2z^2-x^2z^2-2xyz^2$.

प्रश्नमाला 38. [पृ० १२४-१२७]

1. $27a^3+45a^2b-75ab^2-125b^3$. 2. $4a^2-9b^2-16c^2+24bc$.
3. x^4+3x^2+4. 4. $a^4-2a^2b^2+b^4$. 5. x^8+x^4+1.
6. $x^6-x^4y^4+2x^3y^3+y^6$. 7. m^6+n^6. 8. p^6-q^6.
9. $a^5-26a^3b^2+25ab^4$. 10. $x^5-5x^3+5x^2-1$. 11. $x^6-2a^3x^3+a^6$.
12. $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$. 13. $x^6+10x-33$. 14. x^6-2x^3+1.
15. $a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8$. 16. $x^3-3xyz+y^3+z^3$.
17. $a^3-3abc+b^3+c^3$. 18. $2a^6-a^5b-14a^4b^2+13a^3b^3-43a^2b^4$

$+23ab^5-20b^6$. **19.** $apx^3+(bp-aq)x^2-(cp+bq)x+cq$. **20.** $mnx^3-(n^2+mr)x^2+r^2$. **21.** $ax^4-(1+a)bx^3+(c+b^2-ac)x^2-c^2$. **22.** $abx^5-(b^2+ac)x^4+(2bc+ad)x^3-(2bd+c^2)x^2+2cdx-d^2$. **23.** $mpx^4-(mq-mr+np)x^3+(ms+nq-nr-ps)x^2+(q-r-n)sx-s^2$. **24.** $alx^3+(2lh+am)x^2y+(lb+2hm)xy^2+bmy^3+anx^2+2hnxy+bny^2$. **25.** $l^2px^4+m^2px^3y+(2g^2p+l^2q)x^3+n^2px^2y^2+(2f^2p+m^2q)x^2y+(c^2p+2g^2q+l^2r)x^2+n^2qxy^2+(2f^2q+m^2r)xy+(c^2q+2g^2r)x+n^2ry^2+2f^2ry+c^2r$. **26.** $x^5+1\frac{766}{945}x^4y+3\frac{339}{945}x^3y^2+2\frac{356}{735}x^2y^3+2\frac{4}{35}xy^4+y^5$. **27.** $x^6+\frac{5}{3}x^5y+3\frac{3}{11}x^4y^2+\frac{26}{33}x^3y^3+4\frac{16}{33}x^2y^4+\frac{1}{11}xy^5+y^6$. **28.** $\cdot621x^{12}+3\cdot197x^{10}+20\cdot7x^9+\cdot405x^8+\cdot3321x^7+2\cdot085x^6+16\cdot0872x^5+11\cdot07x^4+5\cdot8675x^3+29\cdot25x^2+6\cdot95x+45$. **29.** $\cdot399a^5+7\cdot289a^4b+16\cdot71a^3b^2+32\cdot867a^2b^3+23\cdot789ab^4+25\cdot2b^5$. **30.** $2\cdot3lx^5+(3\cdot15l+2\cdot3m)x^4y+(1\cdot17l+3\cdot15m+2\cdot3n)x^3y^2+(2\cdot07l+1\cdot17m+3\cdot15n)x^2y^3+(2\cdot07m+1\cdot17n)xy^4+2\cdot07ny^5$. **31.** $a^2x^5-\frac{29}{310}abx^4y+(\frac{181}{90}ac-b^2)x^3y^2+(\frac{55}{756}bc+\frac{4}{5}ad)x^2y^3+(c^2-\frac{6}{7}bd)xy^4+\frac{3}{5}cdy^5$. **32.** $2\cdot25a^2m^6+(3\cdot9ac-1\cdot44b^2)m^4n^2+(1\cdot69c^2-3\cdot84bd)m^2n^4-2\cdot56d^2n^6$.

33. $16a^4-81b^4$. **34.** $625a^4x^4-1296b^4y^4$. **35.** $x^{12}-y^{12}$.
36. $x^8+49x^4y^4+625y^8$. **37.** $a^{18}x^{18}-b^{18}y^{18}$. **51.** $-6x^2$.
52. $-2y^4$. **53.** $6x^2y$. **54.** $15x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{5}{4}}$. **55.** $-3ab^{-2}$. **56.** $-ay^{-1}$.
57. $12a^2b^2c^2$. **58.** $15xyz$. **59.** $-30a^2bc^{-1}$. **60.** $76a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{7}{8}}y^{-2}$.
61. $a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$. **62.** $a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$. **63.** $9x^{\frac{4}{3}}-16y^{\frac{2}{3}}$.
64. $a+b$. **65.** $x-y$. **66.** $a^3+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+b^3$.
67. $4x^{\frac{8}{3}}-37x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}+9y^{\frac{8}{3}}$. **68.** a^3-b^2. **69.** x^2-y^2.
70. $a-b^2$. **71.** $x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$. **72.** $a^{3n}+x^{3n}$.
73. $a^{-5}-6a^{-4}b+13a^{-3}b^2-13a^{-2}b^3+6a^{-1}b^4-b^5$.
74. $x^{-6}-5x^{-3}y^3+4y^6$. **75.** $4a^{-10}+12a^{-\frac{15}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+9a^{-5}b^{-3}-25b^{-6}$.
76. $6x^3+19x^2+42x+45$. **77.** $2x^3-7x^2-24x+45$.
78. $3x^5+9x^4+11x^3+21x^2+28x+12$. **79.** $px^4+qx^3+p^2x^2+p(q+r)x+qr$. **80.** $\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{3}x^5+7\frac{5}{12}x^4+4\frac{1}{2}x^3+16\frac{1}{2}x^2+5x+10$.

प्रश्नमाला 39. [पृ० २३१-२३४]

1. $x-2$. **2.** $x-5$. **3.** $3x+4$. **4.** $5x-7$.
5. $2a-3b$. **6.** x^2-xy+y^2. **7.** $2x-3a$. **8.** x^2-ax+a^2.

9. $a^2+2ab-b^2$. 10. $x+3$. 11. $2x-1$. 12. $2ay-b$.
13. $am+3n$. 14. $2x^2+3xy-4y^2$. 15. $3y^3-x^2y+2x^3$.
16. $4m^2-6mn+8n^2$. 17. $a^3-3a^2y-y^3$. 18. $27(z+a)$. 19. $z-x$.
20. $x^4+2ax^3+3a^2x^2+2a^3x+a^4$. 21. $x^4-2x^3y+3x^2y^2-2xy^3+y^4$.
22. $x^2+(a+b)x+ab$. 23. $x-c$. 24. $a+b+c$. 25. $ab+ac+bc$.
26. $ab+ac-bc$. 27. $x^2-(a-b)x-ab$.
28. $a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$. 29. $x^2-xy+x+y^2+y+1$.
30. $x^2+2xy+3xz+4y^2-6yz+9z^2$. 31. $x^2+xy-xz+y^2+yz+z^2$.
32. $2x-3y-z$. 33. $ab-ac-bc+c^2$. 34. $x+c$.
35. $x+a$. 36. $a^2+ab-bc-c^2$. 37. $ab-ac+bc-b^2$.
38. $y^2x+2y^2z+yx^2-2yz^2-x^2z-xz^2$. 39. x^2-ax+a^2.
40. $c+a-b$. 41. $2(a+b)x$. 42. $x+y+z+xyz$.
43. $16x^4-8x^2(2y^2+a^2)+(4y^2-a^2)^2$. 48. a^3b. 49. $ab^{-1}c^{\frac{1}{3}}$.
50. $-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{-\frac{1}{3}}$. 51. $3x^{\frac{2}{3}}-4y^{\frac{1}{3}}$. 52. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$.
53. $a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}}$. 54. $2x^{\frac{4}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-3y^{\frac{4}{3}}$.
55. $a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b+b^{\frac{3}{2}}$. 56. $2a^{-5}+3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+5b^{-3}$.
57. $3x^{-\frac{5}{4}}-5x^{-\frac{5}{8}}y^{-\frac{3}{8}}+7y^{-\frac{3}{4}}$. 58. $a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}+ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{3}}$.
59. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}$.

प्रश्नमाला 40. [पृ० १३५-१३६]

1. $m^2-3mn+2n^2$. 2. $a^2-3ab+b^2$. 3. $2x^2-3xy-2y^2$.
4. $a^2-4ax-2x^2$. 5. $3+2x-2x^2+x^3$. 6. x^2-2x+3.
7. $2a^2+3ab-4b^2$. 8. $a^2-2ax+4x^2$. 9. $a^2-2ab+2b^2$.
10. $2x^2-3x-8$. 11. $x^3+3x^2+9x+27$.
12. $a^4+2a^3+4a^2+8a+16$. 13. $3-x^2+2x^3$.
14. $3x^2-4x+5$. 15. $32+16x+8x^2+4x^3+2x^4+x^5$.
16. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$. 17. $2a^2-3ab+4b^2$.
18. $a^2+3ab-5b^2$. 19. $x^3+2x^2a+2xa^2+a^3$.
20. $a^3-3a^2b-b^3$. 21. $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.
22. $x+6+\frac{5}{x+5}$. 23. $x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2+\frac{\frac{2}{27}y^3}{x-\frac{1}{3}y}$. 24. r.
25. भजनफल—$\frac{1}{3}+\frac{7}{9}x+\frac{48}{27}x^2+\frac{48}{81}x^3$ और भागशेष—$\frac{48}{81}x^4$.

प्रश्नमाला 41. [पृ० १३८]

13. x^3+x^2+x+1. 14. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$.
15. $x^4+x^3+x^2+x+1$. 16. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.
17. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. 18. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$.
19. $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.
20. $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$.

प्रश्नमाला 42 [पृ० १४१-१४३]

1. $25x^2+90xy+81y^2$. 2. $256a^2-416ab+169b^2$.
3. $x^2+200x+10000$. 4. $y^2+1000y+250000$.
5. $a^2+1998a+998001$. 6. $y^2+20002y+100020001$.
7. 976144. 8. 1024144. 9. 10100·25. 10. 9920·16.
11. $8x^3+60x^2+150x+125$. 12. 1157625. 13. 985074·875.
14. 513152864·216. 15. (i) 50000032 ; (ii) 2000288.
16. (i) $(3x+3y)^2-(x-y)^2$; (ii) $(5x+8y)^2-(x+2y)^2$;
(iii) $(x+100)^2-(2)^2$; (iv) $(500)^2-(5)^2$; (v) $(2x+100)^2-(\cdot4)^2$.
17. a^4-x^4. 18. $16a^4-81$. 19. $a^8+b^8+a^4b^4$. 20. 99999984.
21. 99999744. 22. $8a^3+12a^2x+6ax^2+x^3$. 23. $a^6-12a^4+48a^2-64$.
24. x^3+64. 25. $8y^3-27$. 26. x^6-64. 27. $4x^2+240x+1575$.
28. $36x^2+108x-1075$. 29. $36x^2-408x+1075$. 30. $100a^2$.
31. $x^2+2xy+y^2$. 32. $8000a^3$. 33. $125a^3$. 34. $1331a^3$.
35. $5x^3$. 36. $(x+2)(x+3)$. 37. $5(y+8)(y+5)$.
38. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$. 39. $(x+y+3)(x+y+12)$.
40. $(9a+8b+8)(a+8b-4)$. 41. $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$.
42. $(8a+13x-4)\{(8a+13x)^2+4(8a+13x)+16\}$.
43. $(15a+3b+2)(15a+3b-2)$. 44. $5x(x+2y)(x-3y)$. 45. 225.
46. 512. 47. 10000. 48. 8099·999996. 49. 92355. 50. 1.
51. $(2+5x+3x^2)(2+5x-x^2)$. 52. $a^2b^2(x^2+1)^2-(a^2+b^2)^2x^2$.
53. $(11x^2+28x+10)^2-(x^2+x+5)^2$. 54. $(49x^2+98ax+39a^2)^2+(5a^2)^2$.

प्रश्नमाला 43. [पृ० १५०-१५१]

1. (i) 121 ; (ii) 49 ; (iii) 4. 3. 144 वर्ग फ़ुट। 4. 15 वर्गफ़ुट।
5. 55 वर्गगज़। 6. 84 वर्गगज़। 7. 500 वर्गगज़ 8. 50.
9. 76. 10. 171 वर्गगज़।

प्रश्नमाला 44. [पृ० १५२]

1. $a(b+c)$.
2. $a^2b^2(b+a)$.
3. $x^3y^3(y-2x)$.
4. $2xyz(x+2y-3z)$.
5. $2a^3b(2a^2-3ab-4b^2)$.
6. $ax^2(y-5axy^2+3x)$.
7. $3x^2y^2z^2(x^2y-4y^2z+7xz^2)$.
8. $14a^5b^5(2a^3-3b^3)$.
9. $36x^8y^8(2x^3+3y^2)$.
10. $13a^5b^5c^5(3b^2c^2-5c^2a^2-7a^2b^2)$.

प्रश्नमाला 45. [१५२-१५३]

1. $(3a+4b)(3a-4b)$.
2. $a(2a+5x)(2a-5x)$.
3. $(6x^2+1)(6x^2-1)$.
4. $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$.
5. $x(4x^2+3)(4x^2-3)$.
6. $x(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$.
7. $(1+4a^2)(1+2a)(1-2a)$.
8. $x^2(1+9x^2)(1+3x)(1-3x)$.
9. $(6+x^2a)(6-x^2a)$.
10. $(8a^2+7x^3)(8a^2-7x^3)$.
11. $(11+m^3)(11-m^3)$.
12. $(7x^3a^5+9)(7x^3a^5-9)$.
13. $(ab+5cd)(ab-5cd)$.
14. $(9x^6+8a^5)(9x^6-8a^5)$.
15. $p^2(q^2+10)(q^2-10)$.
16. $x^3(12x^2+5a^2)(12x^2-5a^2)$.
17. $3a^5(8a^2+9x^2)(8a^2-9x^2)$.
18. $2ax(7ax^2+8)(7ax^2-8)$.
19. $4x^5a^3(9x^6a^3+11)(9x^6a^3-11)$.
20. $5m^{15}n^7(7m^4n^3+11)(7m^4n^3-11)$.
21. $(a+3b+5c)(a+3b-5c)$.
22. $(a+3b-5c)(a-3b+5c)$.
23. $4xy$.
24. $(5a+3x)(a+x)$.
25. $(2a-2b+3c-3d)(2a-2b-3c+3d)$.
26. $(7x+5y-3z)(7x-5y+3z)$.
27. $12(5x-1)(x+2)$.
28. $4a(b-c)$.
29. $(3a+b-c)(a-7b+9c)$.
30. $(14a+21x-23y)(2a+27x-41y)$.
31. $-9(x+a)(x-a)(x^2+a^2)$.
32. $28a(5a-3)$.

प्रश्नमाला 46. [पृ० १५४]

1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
2. $(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
3. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)$.
4. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)(a^4-a^2x^2+x^4)$.
5. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.
6. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$.
7. $9(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.
8. $(a^2+2a+3)(a^2-2a+3)$.
9. $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$.
10. $(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)$.
11. $(2x^2+2x-3)(2x^2-2x-3)$.
12. $(2x^2+3x+3)(2x^2-3x+3)$.
13. $(2a^2+5a-3)(2a^2-5a-3)$.
14. $(2a^2+10a+25)(2a^2-10a+25)$.
15. $(3x^2+x+4)(3x^2-x+4)$.
16. $(3a^2+a-4)(3a^2-a-4)$.
17. $(3x^2+3x-4)(3x^2-3x-4)$.
18. $(3a^2+5a+4)(3a^2-5a+4)$.

19. $(4x^2+6ax+5a^2)(4x^2-6ax+5a^2)$.
20. $(3a^2+7ax+5x^2)(3a^2-7ax+5x^2)$. 21. $(x^2+4x+12)(x^2-4x+12)$.
22. $(a^2+5ab-5b^2)(a^2-5ab-5b^2)$. 23. $(6a^2+2ab-b^2)(6a^2-2ab-b^2)$.
24. $(7m^2+2mn-4n^2)(7m^2-2mn-4n^2)$.
25. $(8a^2+12ax+9x^2)(8a^2-12ax+9x^2)$.
26. $(2x^2+14ax+49a^2)(2x^2-14ax+49a^2)$. 27. $(x+y-z)(x-y+z)$.
28. $(2a+b-3c)(2a-b+3c)$. 29. $(3x+2y-3z)(3x-2y+3z)$.
30. $(a+2b-5c)(a-2b+5c)$. 31. $(4y+3x-5z)(4y-3x+5z)$.
32. $(a-2b+3c-2d)(a-2b-3c+2d)$. 33. $(x-2y+z)(x-z)$.
34. $(2x+3a+5b+1)(2x+3a-5b-1)$.
35. $(3x+2y-7z-5)(3x-2y+7z-5)$.
36. $(4a-3b+4c-3)(4a+3b-4c-3)$.
37. $(x-7y+5z-2)(x-7y-5z+2)$.
38. $(4x+5a+3y-7b)(4x+5a-3y+7b)$.
39. $(7x-4y+8z-1)(7x-4y-8z+1)$. 40. $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$.

प्रश्नमाला 47. [पृ० १५६]

1. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$. 2. $a(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)$.
3. $(2x+1)(4x^2-2x+1)(64x^6-8x^3+1)$. 4. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ $(a^6+8a^3b^3+64b^6)$. 5. $(3a^2+5x^2)(9a^4-15a^2x^2+25x^4)$.
6. $(m+n)(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$. 7. $(7x+8y)$ $(49x^2-56xy+64y^2)$. 8. $(2x^2+1)(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)(4x^4-2x^2+1)$.
9. $(a+2x^2)(a^2-2ax^2+4x^4)(a-2x^2)(a^2+2ax^2+4x^4)$. 10. $(5x^3-6a^3)$ $(25x^6+30x^3a^3+36a^6)$. 11. $ab(4a^4+7b^4)(16a^8-28a^4b^4+49b^8)$.
12. $x^2y^2(3x^3+2y^3)(3x^3-2y^3)(9x^6+6x^3y^3+4y^6)(9x^6-6x^3y^3+4y^6)$.
13. $(a+b)^2(a^4-2a^3b+6a^2b^2-2ab^3+b^4)$. 14. $2(x+y)(x-y)$ $(4x^4-14x^2y^2+13y^4)$. 15. $2(a-b)(a^2+ab+b^2)(4a^6-2a^3b^3+b^6)$.

प्रश्नमाला 48. [पृ० १६०-१६१]

1. $(x+1)(x+2)$. 2. $(x+2)(x+3)$. 3. $(a+1)(a+3)$.
4. $(x-1)(x-4)$. 5. $(x+2)(x+5)$. 6. $(x-3)(x-4)$.
7. $(x+3)(x+5)$. 8. $(x+3)(x-5)$. 9. $(x-4)(x-9)$.
10. $(x+4)(x-9)$. 11. $(x-12)(x-2)$. 12. $(x-20)(x-2)$.
13. $(x+10)(x-3)$. 14. $(x+8)(x-6)$. 15. $(x+18)(x-2)$.
16. $(x+12)(x-3)$. 17. $(x+14)(x-3)$. 18. $(x+18)(x-4)$.

19. $(x+5)(x-8)$. 20. $(x-16)(x+5)$. 21. $(x-32)(x+3)$.
22. $(x-14)(x+4)$. 23. $(x-7)(x+6)$. 24. $(x-9)(x+8)$.
25. $(x+12)(x+10)$. 26. $(x-4)(x+20)$. 27. $(x-24)(x+3)$.
28. $(x+12)(x-7)$. 29. $(x-12)(x-8)$. 30. $(x+26)(x-3)$.
31. $(x-12)(x+6)$. 32. $(x-21)(x-4)$. 33. $(x-22)(x-4)$.
34. $(x+15)(x-8)$. 35. $(x-10)(x+8)$. 36. $(x+14)(x-6)$.
37. $(a-8)(a+7)$. 38. $(m-15)(m+6)$. 39. $(a+20)(a-3)$.
40. $(a-6)(a-9)$. 41. $(p-24)(p+2)$. 42. $(m+9)(m-8)$.
43. $(m+30)(m-3)$. 44. $(a-24)(a-5)$. 45. $(x+13)(x-6)$.
46. $(a-51)(a+2)$. 47. $(a-15)(a-4)$. 48. $(x+16)(x-4)$.
49. $(a-30)(a+4)$. 50. $(x+15)(x-7)$. 51. $(x-7y)(x+6y)$.
52. $(a-8b)(a-4b)$. 53. $(m+6n)(m-5n)$. 54. $(a+4b)(a-3b)$.
55. $(a+3b)(a-5b)$. 56. $(x-8y)(x+y)$. 57. $(x+8y)(x-5y)$.
58. $(p-8q)(p-6q)$. 59. $(p+10q)(p-8q)$. 60 $(x+24y)(x-4y)$.
61. $(a^2+5)(a+1)(a-1)$. 62. $(x^2+5)(x^2-3)$.
63. $(x^2+7)(x+2)(x-2)$. 64. $(x^3+3)(x-1)(x^2+x+1)$.
65. $(a-2)(a^2+2a+4)(a^3-2)$. 66. $(x+3)(x^2-3x+9)(x-1)(x^2+x+1)$.
67. $(a+2)(a^2-2a+4)(a-1)(a^2+a+1)$.
68. $(x^2+4)(x+2)(x-2)(x^2+2)(x^2-2)$. 69. $(a^2+4)(a+2)(a-2)(a^4+5)$.
70. $(x^2+1)(x^2-2)(x^4-x^2+1)(x^4+2x^2+4)$. 71. $(a^2+2a-2)(a+1)^2$.
72. $(x^2+3x+1)(x+1)(x+2)$. 73. $(x-3)(x+1)(x-1)^2$.
74. $(a+1)(a-4)(a^2-3a+1)$. 75. $(x+1)(x-5)(x^2-4x+1)$.
76. $(x-3)(x+2)(x+1)(x-2)$. 77. $(x-2)(x-3)(x-1)(x-4)$.
78. $(a-2)(a+9)(a+2)(a+5)$. 79. $(a-4)(a+10)(a+2)(a+4)$.
80. $(x-9)(x+1)(x-10)(x+2)$. 81. $(x+3)(2x-5)$.
82. $(2a+3)(3a-5)$. 83. $(2m-3)(4m+3)$. 84. $(3x+8y)(2x-3y)$.
85. $(5a-3b)(2a-7b)$. 86. $(3m-4n)(4m+5n)$. 87. $(2x+5y)(6x-y)$.
88. $(4a+5b)(5a-6b)$. 89. $(6x-7y)(3x-5y)$. 90. $(3x+8y)(4x-3y)$.

प्रश्नमाला 49. [पृ० १६३-१६४]

1. $(x+3)(x+1)$. 2. $(x+5)(x+1)$. 3. $(x+5)(x+3)$.
4. $(x-3)(x-7)$. 5. $(x+6)(x-8)$. 6. $(x+5)(x-9)$.
7. $(x-4)(x-8)$. 8. $(x+5)(x-11)$. 9. $(a+2b-c)(a+c)$.
10. $(x+y)(x-y+2)$. 11. $(x+y+1)(x-y+5)$. 12. $(a+5b-c)(a-b+c$

13. $(x-y-z)(x-5y+z)$.
14. $(x-2y-2z)(x-8y+2z)$.
15. $(a+b-3c)(a-13b+3c)$.
16. $(x+12y-3z)(x+3z)$.
17. $(x+y-5z)(x-15y+5z)$.
18. $(2x+1)(x-3)$.
19. $(3x+1)(x-2)$.
20. $(3x+2)(x+4)$.
21. $(4x-1)(x+2)$.
22. $(2x-1)(3x+2)$.
23. $(3x-4)(2x+1)$.
24. $(3x-1)(2x+3)$.
25. $(4x-5)(2x+3)$.
26. $(2x-5)(2x+7)$.
27. $(2x-3)(3x+4)$.
28. $(3x+2)(x-6)$.
29. $(2x+5)(x-7)$.
30. $(2x-7)(x+6)$.
31. $(3x-5)(x+6)$.
32. $(3x-2)(4x+3)$.
33. $(2a-3b)(a+5b)$.
34. $(3x-2y)(2x-3y)$.
35. $(3m+2n)(2m-5n)$.
36. $(3p-4q)(p+3q)$.
37. $(4a+3b)(2a-5b)$.
38. $(5m-2n)(2m+3n)$.
39. $(4x-y)(3x+4y)$.
40. $(5a+3b)(3a-4b)$.
41. $(2a-b)(a-2b)$.
42. $(3a+b)(a-3b)$.
43. $(3x-y)(x+3y)$.
44. $(4a-1)(a+4)$.
45. $(4a-b)(a-4b)$.
46. $(5x+1)(x-5)$.
47. $(5x-y)(x-5y)$.
48. $(6x+1)(x+6)$.
49. $(6a-b)(a+6b)$.
50. $(6a+b)(a-6b)$.
51. $(7a-b)(a-7b)$.
52. $(7a-b)(a+7b)$.
53. $(7a+b)(a-7b)$.
54. $(8x-y)(x+8y)$.
55. $(9x-y)(x-9y)$.
56. $(10x-y)(x+10y)$.
57. $(2a+2b-1)(a+b+2)$.
58. $(2x^2+2y^2+xy)(x-y)^2$.
59. $(2a^2+2b^2+ab)(a+b)^2$.
60. $(x^2+y^2)(4x-y)(x-4y)$.
61. $(2x^2+3)(x+2)(x-2)$.
62. $(2a^2+b^2)(2a+3b)(2a-3b)$.
63. $(a^2+2b^2)(3a+4b)(3a-4b)$.
64. $(2x-1)(4x^2+2x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.
65. $(2a^2+b^2)(2a^2-b^2)(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$.

विविध प्रश्नमाला III [पृ० १७१-१७६]

I

1. (i) $y^3(x-2z)-y^2xz+y(xz^2-x^3-2z^3)+(x^3z-xz^3)$;
   (ii) $(xy^3-x^3y)+z(x^3-xy^2-2y^3)+z^2xy-z^3(x+2y)$.
2. 94.
4. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.
5. $8ab$; 128.
6. $2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.
7. $(a+c)^2-(b-d)^2$.
8. $(2x+3y)(2x+3y-4)$.

II

1. $\frac{3}{2}\{3ax^3+ax^2y+3axy^2+7dy^3\}$.
2. $m(am+b)(m^2+2)$.
3. $x-2x^{\frac{1}{2}}+1$.
5. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$.

6. $x^4-(p-1)x^3+(q-p+1)x^2-(p-1)x+1.$ 7. $a^4+a^2b^2+b^4.$

8. (i) $(a-b)(b-c)$; (ii) $(b+2a+3c)(b-2a-3c).$

III

1. $px^3+qx^2+rx+s.$ 2. $-3b^3.$ 3. 392. 4. 16.

5. $x^2+yz-xy-zx.$ 6. $(4a-1)(16a^2+8a+3).$

IV

1. $-l^4r^2+r(6l^3mn-4l^2m^3)-2l^3n^3-3l^2m^2n^2+6lm^4n-2m^6.$

2. $3a^3x^4+6a^2bx^3+3ab^2x^2+4b^3x+12.$ 3. $a^3-64b^3.$

4. (i) $a^3-3abc+(b^3+c^3)$; (ii) $a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+(b^2c-bc^2).$
(iii) $a^4(b-c)-a(b^4-c^4)+(b^4c-bc^4).$

5. $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$; -11 ; $-68.$

8. $a+2b+3c.$

V

1. 121. 2. $\frac{1}{2}(ax^5+bx^4y-cx^3y^2-dx^2y^3+exy^4-fy^5).$

4. $8a^3+12a^2c+6ac^2+c^3.$ 5. $8x^6+4x^5+12x^4-8x^2+24x-32.$

7. $a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{4}}.$ 8. (i) $a^2x(6ax+1)(a-x)$; (ii) $(yz+x)(xz+y).$

VI

1. 87659405. 2. $-125.$ 4. $x^2+1.$ 5. $(x^2-7x+9)^2+(5)^2.$

6. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d).$

7. (i) $(a-b)(a-b+2)$; (ii) $(2a-b)(3a+b+3)$;
(iii) $(5x+2y)(3x-2y+2).$ 8. $(2x-y)a^2+(x+y)ax-x^3.$

VII

1. 7. 3. $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}.$ 4. $x+a.$

6. $2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-x^4-y^4-z^4.$ 7. (i) $(3x+5)(2x-3).$
(ii) $(7x-7y-4)(5x-5y-3)$; (iii) $(x-3y^2)(11x-21y^2).$

VIII

1. $1+(a+b)x+\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}x^2.$ 2. 55. 4. $2x(a+b).$

5. a^2-2 ; a^3-3a ; $a^4-4a^2+2.$ 8. $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2).$

IX

1. $a^4 + a^2x^2 + x^4$. 4. $x^3 + 6x + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^3}$.
6. $a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(c-c)$. 8. 3.

X

1. $2(a+m)(c+n) + 2bd$. 2. 16. 5. $a^{\frac{3}{2}} + b + c^{\frac{3}{4}} - 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}$.
6. $(5x-2)(3x-7)$. 7. 17. 8. 125 पाउंड में प्रत्येक।

प्रश्नमाला 51. [पृ० १७६]

1. a^2b^2. 2. $4a^2$. 3. $3xy^2$. 4. $5a^2y^3$.
5. $9m^2n^3$. 6. $4ax$. 7. $12mp$. 8. $15x^2y^2z^2$.
9. $18a^2c^2$. 10. $24c^3$. 11. $12z^2$. 12. $15m^3n^3p^3q^3$.
13. $18a^2b^2c^2d^2$. 14. 6. 15. $8x^2y^2$.

प्रश्नमाला 52. [पृ० १८१]

1. $a(a+b)$. 2. $x^3y^3(x+y)$. 3. $3(x+3)$.
4. $4a^2(a^2+bc)$. 5. $m^3n^3(m-n)^2$. 6. $ax(2a+3x)$.
7. $2a^2b^2(3a+4b)$. 8. $3x^2y^2(x-2y)$. 9. $2ab(a+2b)$.
10. $16x^3a^3(x^2-a^2)$. 11. $8(x^2+ax+a^2)$. 12. $8a^2x(x^2+a^2)$.
13. $6(a+3b)$. 14. $4x(x-5)$. 15. $xy(x+6y)$. 16. $a^2x^2(a+2x)$.
17. $2x+3$. 18. $a-2b$. 19. $x-2$. 20. $18(x+2a)$.
21. $a-b$. 22. $x+2$. 23. $4ab(3a+b)$. 24. x^2+5x+6.

प्रश्नमाला 53. [पृ० १८४-१८५]

1. a^2b^3. 2. a^3b^2c. 3. $30x^2y^4$. 4. $28m^4n^3p$.
5. $24x^3y^3z^3$. 6. $140a^2b^2c^2$. 7. $120a^3b^3c^3$. 8. $180x^4y^3z^2a^2$.
9. $a^2b^2(a^2-b^2)$. 10. $24(x^2-y^2)^2$. 11. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
12. $a^2(a-x)(a-2x)(a+3x)$. 13. $a^2(a-2)(a+2)(a+4)$.
14. $12a^3x^2(x-a)(x+a)(x^2-ax+a^2)$. 15. $48(x+6)(x+5)(x-2)$.
16. $(x+7)(x+5)(x+4)(x-3)$. 17. $3a^2(4a^2-9b^2)(a^2-b^2)$.
18. $(8a^3+27b^3)(8a^3-27b^3)$. 19. $12x^2(4x^2-25y^2)(2x-y)$.
20. $(2x-3a)^2(9x^2-a^2)$. 21. $2x(4x^4+81)$.
22. $6(3a-x)^2(a^2-4x^2)$. 23. $(2x-1)^2(4x^2-1)(x+3)$.
24. $(x-2y)(x-3y)(x-4y)(x+5y)$. 25. $(2x-1)(3x+1)(x+2)$.
26. $(1-4x^2)(1+2x+4x^2)(1+2x-4x^2)$. 27. $(x^2-3)^2(9x^4-1)(9x^2-1)$.

प्रश्नमाला 54. [पृ० १८७-१८८]

1. $\frac{1}{2b}$. 2. $\frac{3x}{4y}$. 3. $\frac{2a}{5x}$. 4. $\frac{3xz}{5y^2}$. 5. $\frac{2d}{3ab}$. 6. $\frac{2az}{5xy}$.

7. $\frac{2d^5}{3a}$. 8. $\frac{3npq}{5m}$. 9. $\frac{x-a}{x}$. 10. $-\frac{1}{x+3}$. 11. $\frac{2x-3a}{2x}$.

12. $-\frac{a}{4b+a}$. 13. $\frac{3a}{x+4a}$. 14. $\frac{2x^2}{x^2-2a^2}$. 15. $\frac{4x}{x+3}$.

16. $\frac{x-2}{x-3}$. 17. $\frac{x-3}{x+4}$. 18. $\frac{a-4b}{a-5b}$. 19. $\frac{a^2}{a+b}$.

20. $\frac{1-4x}{1-5x}$. 21. $\frac{x-y}{x+7y}$. 22. $\frac{1-2a^2}{1+3a^2}$. 23. $\frac{x^2-13}{x^2-4}$.

24. $\frac{3ax}{a-3x}$. 25. $\frac{2x+3}{3x+4}$. 26. $\frac{x-a}{x+a}$. 27. $\frac{x+5a}{x+7a}$.

28. $\frac{2x-5}{3x-2}$. 29. $\frac{2x-5a}{3x-7a}$. 30. $\frac{2-3ax}{1-5ax}$. 31. $\frac{x-a}{x^2+a}$.

32. $\frac{3a+5b}{3c-1}$. 33. $\frac{2x+3a}{3x+2a}$. 34. $\frac{2a-b}{a^2-1}$. 35. $\frac{a-b-c}{a+b-c}$.

प्रश्नमाला 55. [पृ० १६०]

1. $\frac{2adf}{4bdf}$, $\frac{3bcf}{4bdf}$, $\frac{4bde}{4bdf}$. 2. $\frac{6ax^2}{12abc}$, $\frac{4by^2}{12abc}$, $\frac{3cz^2}{12abc}$.

3. $\frac{15abx^2}{60x^3y^2}$, $\frac{10bcxy}{60x^3y^2}$, $\frac{6acy^2}{60x^3y^2}$. 4. $\frac{a^2(a+b)}{a(a^2-b^2)}$, $\frac{ba(a-b)}{a(a^2-b^2)}$, $\frac{c(a-b)}{a(a^2-b^2)}$.

5. $\frac{x^2(a-2b)}{a(a^2-4b^2)}$, $\frac{ay^2(a+2b)}{a(a^2-4b^2)}$. 6. $\frac{2a^2}{a(a-b)}$, $\frac{c-a}{a(a-b)}$.

7. $\frac{2a(a+b)}{a^2-b^2}$, $\frac{-3b(a+b)}{a^2-b^2}$, $\frac{4c(a-b)}{a^2-b^2}$.

8. $\frac{2b^2c^2x(a-x)}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}$, $\frac{3a^2c^2y(a+x)}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}$, $\frac{4a^2b^2z}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}$.

9. $\frac{a^2x(2x+3y)}{xy(4x^2-9y^2)}$, $\frac{b^2y(2x-3y)}{xy(4x^2-9y^2)}$, $\frac{c^2}{xy(4x^2-9y^2)}$.

10. $\frac{a^2(x^2-x+1)}{x^4+x^2+1}$, $\frac{b^2(x^2+x+1)}{x^4+x^2+1}$. 11. $\frac{3(x+3)}{x^3+2x^2-5x-6}$, $\frac{4(x+1)}{x^3+2x^2-5x-6}$. 12. $\frac{a^2-4b^2}{a^4+8ab^3}$, $\frac{abc}{a^4+8ab^3}$.

13. $\frac{a(a^2+3ab+9b^2)}{a^3-27b^3}$, $\frac{b(a-3b)}{a^3-27b^3}$, $\frac{c}{a^3-27b^3}$.

14. $\frac{a^2(a-b+c)}{ab(a^2+b^2-c^2-2ab)}$, $\frac{b^2(a-b-c)}{ab(a^2+b^2-c^2-2ab)}$, $\frac{abc}{ab(a^2+b^2-c^2-2ab)}$.

15. $\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, $\frac{(a-b)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, $\frac{(b-c)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

प्रश्नमाला 56. [पृ० १९२-१९३]

1. $\frac{a^2+b^2}{ab}$. 2. 0. 3. 1. 4. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$.

5. $\frac{a+b}{2(a-b)}$. 6. $\frac{12xy}{4x^2-9y^2}$. 7. $\frac{a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2(a-b)}$.

8. $\frac{2a^3}{a^2-b^2}$. 9. $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$. 10. $\frac{2}{x^2-4x+3}$.

11. $\frac{2}{x^2+10x+16}$. 12. $\frac{6xy}{8x^3+27y^3}$. 13. $\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

14. 0. 15. $\frac{8x^2y^2}{x^4-y^4}$. 16. $\frac{-64ax^3}{a^4-16x^4}$.

17. $\frac{x^2}{6(x^2-9)}$. 18. $\frac{2b}{1-16a^2b^2}$. 19. $\frac{4x^4}{x^4-16a^4}$.

20. $\frac{8a^7b}{a^8-b^8}$. 21. $\frac{108x^4}{81x^4-y^4}$. 22. $\frac{9ax(x+a)}{x^4-81a^4}$.

23. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$. 24. $\frac{6x^2-12}{x^4-5x^2+4}$. 25. $\frac{6a^2x}{4x^4-5a^2x^2+a^4}$.

26. $\frac{48a^3}{x^4-10a^2x^2+9a^4}$. 27. $\frac{2x}{x^4-1}$. 28. $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}$.

29. $\frac{4}{x^2-6x+5}$. 30. $\frac{4}{x^2+14ax+13a^2}$. 31. $\frac{2}{x+3}$.

32. 0. 33. $\frac{4x^3}{1+x^4+x^8}$. 34. $\frac{12x^4}{x^6-64}$. 35. $\frac{66ax^5}{16x^8-6561a^8}$.

प्रश्नमाला 57 [पृ० १६५]

1. $\frac{1}{3}$. 2. $\frac{a^2}{9}$. 3. xyz. 4. $\frac{x^2y^2z^2}{9a^2b^2c^2}$.
5. $\frac{5n^2x^2}{8my}$. 6. $\frac{x+2}{x}$. 7. 3. 8. $\frac{a^2-b^2}{a}$.
9. $\frac{a^2-4x^2}{a^2}$. 10. $\frac{x^2-1}{x^2-x-6}$. 11. 1. 12. 1.
13. $\frac{a^2+b^2}{a}$. 14. $\frac{x}{2}$. 15. $\frac{x+2}{x+3}$. 16. $\frac{a^2(a-b)}{x}$.
17. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^2}{a^2}+1$. 18. $\frac{8ab}{9x^2}+2+\frac{9x^2}{8ab}$. 19. $2\left(\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}\right)$.
20. 1. 21. $\frac{a+b-c}{a+b+c}$. 22. 1.

प्रश्नमाला 58. [पृ० १६७-१६८]

1. $\frac{5ax}{6by}$. 2. $\frac{(a+b)^2}{b}$. 3. $\frac{x-7}{x-5}$. 4. $a-b$.
5. $\frac{m-n}{m+2n}$. 6. $(m-n)^2$. 7. 1. 8. 1.
9. $\frac{x^2+y^2}{2xy}$. 10. $\frac{x^2-8x+12}{x^2-10x+21}$. 11. $\frac{1}{p^2+q^2}$. 12. a^2-b^2.
13. xy. 14. ab. 15. $2x$. 16. 1. 17. $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
18. $-\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{ab(a-b)^2}$. 19. $\frac{a}{a-b}$. 20. a^2-b^2. 21. $a-b$.

प्रश्नमाला 59. [पृ० २०१-२०३]

1. 2. 2. 2. 3. -5. 4. 1. 5. 2.
6. $\frac{1}{3}$. 7. 3. 8. -5. 9. 6. 10. $a+b$.
11. $2a$. 12. $\frac{1}{2}(a+b)$. 13. $a+b$. 14. $m-n$.
15. $a+b$. 16. $\frac{1}{2}(a+b)$. 17. $\frac{2ab}{a+b}$. 18. $\frac{12ab}{a+3b}$.
19. $c+d$. 20. $\frac{1}{3}(a+b+c)$. 21. $-\frac{1}{3}(a+b+c)$. 22. ab.
23. $\frac{1}{ab}$. 24. 13. 25. 16. 26. 20. 27. -3.
28. 8. 29. 10. 30. 9. 31. 9. 32. 5.

33. 8. 34. 5. 35. 7. 36. $\frac{8a}{25}$. 37. 24.

38. 18. 39. $\frac{6a}{7}$. 40. 56. 41. $4\frac{1}{3}$. 42. 6.

43. $10\frac{3}{8}$. 44. $\frac{ac+b^2}{b^2+c^2}$. 45. $-2\frac{39}{73}$. 46. 8. 47. 11.

48. 2. 49. $25a+24b$. 50. $\frac{2ab}{a+b}$. 51. 72. 52. $7\frac{1}{3}$.

प्रश्नमाला 60. [पृ० २०४]

1. 27. 2. 5. 3. 20. 4. 2. 5. 10.
6. 5. 7. 5. 8. 5. 9. 7. 10. 5.

प्रश्नमाला 61. [पृ० २०५-२०६]

1. $\frac{15}{16}$. 2. $\frac{8}{9}$. 3. $2\frac{4}{7}$. 4. 4·05. 5. 3.
6. 3. 7. $10\frac{7}{8}$. 8. $a^2+b^2+c^2$. 9. $\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$.
10. 0. 11. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 12. 0.

प्रश्नमाला 62. [पृ० २०९-२१२]

1. 180 × 90 ; 230 × 100. 2. 15 फ़ुट ; 12 फ़ुट।
3. 33 पा.। 4. 50, 30. 5. 20 मर्द, 16 औरत।
6. A, 84 मील और B, 70 मील 56 घन्टे में। 7. 28 दिन।
8. 2 पा. 15 शि.। 9. 24 फ़ुट। 10. 22 दिन काम किया।
11. 4 दिन। 12. 52 पा. ; 52 शि.। 13. A, 162 पा. ; B, 118 पा. ; C, 104 पा.। 14. 34 भेड़ ; 70 पा.। 15. लन्दन से $98\frac{8}{9}$ मील ; $10\frac{3}{8}$ घन्टे। 16. 44. 17. 32. 18. 72. 19. 23.
20. 5, 8, 2, 24. 21. 19, 5, 4, 32. 22. 22, 31, 9, 54.

प्रश्नमाला 63. [पृ० २१४]

1. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=2\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=6\end{array}\right\}$ 4. $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=7\end{array}\right\}$

5. $x=\frac{b^2+ac}{a^2+b}$, $y=\frac{ab-c}{a^2+b}$. 6. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$ 7. $\left.\begin{array}{l}x=40\\y=16\end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l}x=8\\y=5\end{array}\right\}$ 9. $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=4\end{array}\right\}$ 10. $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=8\end{array}\right\}$

प्रश्नमाला 64. [पृ० २१६]

1. $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 2. $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ 3. $\left.\begin{matrix} x=7 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 4. $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=7 \end{matrix}\right\}$

5. $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ 6. $\left.\begin{matrix} x=13 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ 7. $\left.\begin{matrix} x=6 \\ y=5 \end{matrix}\right\}$ 8. $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=5 \end{matrix}\right\}$

9. $\left.\begin{matrix} x=2\frac{1}{3} \\ y=1\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$ 10. $\left.\begin{matrix} x=6 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$

प्रश्नमाला 65. [पृ० २१९-२२०]

1. $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 2. $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ 3. $\left.\begin{matrix} x=7 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ 4. $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$

5. $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 6. $\left.\begin{matrix} x=6 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ 7. $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ 8. $\left.\begin{matrix} x=-2 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$

9. $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 10. $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ 11. $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 12. $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=-1 \end{matrix}\right\}$

13. $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ 14. $\left.\begin{matrix} x=-5 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 15. $\left.\begin{matrix} x=-2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$ 16. $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=11 \end{matrix}\right\}$

17. $x=\frac{bc-c^2}{ab-a^2},\ y=\frac{ac-c^2}{ab-b^2}.$ 18. $\left.\begin{matrix} x=7 \\ y=9 \end{matrix}\right\}$ 19. $\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{5} \end{matrix}\right\}$

20. $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$ 21. $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ 22. $\left.\begin{matrix} x=7 \\ y=4 \end{matrix}\right\}$ 23. $\left.\begin{matrix} x=10 \\ y=5 \end{matrix}\right\}$

24. $\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=10 \end{matrix}\right\}$ 25. $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ 26. $x=\frac{a^2-b^2}{am-bn},\ y=\frac{a^2-b^2}{an-bm}.$

27. $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{3}{5}.$ 28. $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{3}.$ 29. $x=4,\ y=2.$

30. $x=\frac{1}{15},\ y=18.$

प्रश्नमाला 66. [पृ० २२४-२२६]

1. $\frac{4}{5}$. 2. 7, 9. 3. 6, 2. 4. 60, 15. 5. 24, 15.
6. $\frac{6}{13}$. 7. $\frac{2}{3}$. 8. $\frac{3}{8}$. 9. 15 रु. ; 24 रु.। 10. 3, 5.
11. 6 मील व 3 मील फी घन्टे। 12. 8 ; 16. 13. 20 दिन।
14. 480 वर्गगज़। 15. चाय 2 शि. 8 पे. फी पाउंड काफी 1 शि. 6 पे. फी पा.।
16. 3 मील, $4\frac{2}{7}$ मील फी घन्टे। 17. 22 और 26.
18. A, 500 रु. ; B, 400 रु. ; C, 200 रु.। 19. 75. 20. 65.
21. 21, 40. 22. एक घोड़ा 24 पा. ; एक गाय 12 पा.। 23. 5 शि., 3 शि.।
24. A, 24 दिन ; B, 48 दिन। 25. $\frac{8}{15}$. 26. 15 मील। 27. 72.
28. 75 शि., 35 शि.। 29. 34 भेड़ ; 70 पा.। 30. 27.

प्रश्नमाला 67. [पृ० २३३-२३४]

7. (1) $6x-5y=0$; (2) $5x+7y=35$; (3) $x+y+2=0$; (4) $21x-5y+124=0$; (5) $5x+9y+55=0$.

प्रश्नमाला 68. [पृ० २३६]

1. $3, -3$. 2. $a, -a$. 3. $14, -14$. 4. $\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}$. 5. $5, -5$.
6. $3, -3$. 7. $5, -5$. 8. $2a, -2a$. 9. $a, -a$. 10. $6, -6$.
11. $1, -1$. 12. $2, -2$. 13. 6 गज़ 14. 9 गज़। 15. 5 फुट।

प्रश्नमाला 69. [पृ० २३८]

1. $2, 4$. 2. $5, -4$. 3. $1, -4$. 4. $4, -13$. 5. $3, -\frac{4}{3}$.
6. $\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$. 7. $7, -\frac{1}{3}$. 8. $2, \frac{1}{3}$. 9. $2, -\frac{2}{15}$. 10. a, b.
11. $19, 21$. 12. $16, -6$. 13. $3, 13$. 14. 40 साल। 15. 75 रु०।

विविध प्रश्नमाला IV [पृ० २३९-२४३]

I

1. $12a^3$; $720a^6b^4c^5x^2y^3$. 2. $(x-3)^2$, $(4x+1)(x-3)$; $x-3$.
3. $(a-b)(b-c)(b+2a+3c)(b-2a-3c)$.
4. $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$. 6. x^4+2.
7. $x=\dfrac{b}{a^2+b^2-ab}$, $y=\dfrac{a}{a^2+b^2-ab}$. 8. $\dfrac{ab}{a+b}$ घन्टा $\dfrac{abc}{ab-bc-ac}$ घन्टा।

II

1. $x-3$. 2. $(x-a)(x+b)(x^2+a)$. 3. (i) $\frac{9}{4}x^2y^2$; (ii) 3.
4. $\dfrac{a^4+b^4}{a^2b^2}$. 5. $\dfrac{5(x-3)}{3(x-5)}$. 7. 9. 8. $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2a}$, $y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2b}$.

III

1. $(a-b)(x+a)$. 2. x^6-1. 3. $x+3$. 4. $(x+a)(x-b)(x+b)$.
5. $\dfrac{8}{x^4-16}$. 6. $x=\dfrac{2(b-1)}{2ab-(a+b)}$, $y=\dfrac{2(a-1)}{2ab-(a+b)}$.
7. £2800 और £1200. 8. $3, -3$.

IV

2. $x-y$. 3. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$. 4. $\dfrac{1}{m^2-m+1}$. 6. 345.
7. $\frac{13}{21}$. 8. $8, -8$.

V

1. $x^2-(a+b)x+ab$. 2. $280x^3-123x^2-37x+6$. 3. 1.
4. $\frac{1}{a+c}$. 8. 4, −4.

VI

1. $x-2$. 2. $abc(x-a)(x-b)(x-c)$. 4. 0. 6. 2.
7. 12 शि.। 8. 4, −4.

VII

1. x^2+5. 2. $(a-b)(b-c)(c-a)$. 4. $\frac{3}{x^2-4x+3}$.
5. $\frac{a^2+b^2}{2ab}$. 7. $x=10, y=15$. 8. 4, −4.

प्रश्नमाला 70. [पृ० २४५]

1. $x^3+6x^2+11x+6$. 2. $x^3+14x^2+59x+70$. 3. $x^3-x^2-24x-36$. 4. $x^3-x^2-70x-200$. 5. $x^3-4x^2-29x-24$. 6. $x^3+x^2-46x+80$. 7. $x^3-37x+84$. 8. $x^3-6x^2-37x+210$. 9. $x^3-23x^2+167x-385$. 10. $x^3-18x^2+99x-162$. 11. $x^3-13x^2-8x+240$. 12. $x^3+25x^2+199x+495$. 13. $x^3-52x+96$. 14. $x^3-23x^2+151x-273$. 15. x^3+13x^2-144. 16. $x^3-7x^2-138x+1080$. 17. $x^3-3x^2-73x+315$. 18. $x^3+35x^2+396x+1440$. 19. $x^3-148x-672$. 20. $x^3-31x^2+290x-800$.

प्रश्नमाला 71. [पृ० २४७-२४८]

1. $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$. 2. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$. 3. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$. 4. $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$. 5. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$. 6. $a^2+x^2+y^2+z^2-2ax+2ay-2az-2xy+2xz-2yz$. 7. $a^2+x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2xy+2xz+2yz$. 8. $m^2+n^2+p^2+q^2+r^2+2mn+2mp+2mq+2mr+2np+2nq+2nr+2pq+2pr+2qr$. 9. $p^2+q^2+r^2+x^2+y^2-2pq+2pr-2px-2py-2qr+2qx+2qy-2rx-2ry+2xy$. 10. $a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2-2ab+2ac-2ax+2ay+2az-2bc+2bx-2by-2bz-2cx+2cy+2cz-2xy-2xz+2yz$. 11. $a^2+4x^2+9y^2+16z^2-4ax-6ay-8az+12xy+16xz+24yz$. 12. $4a^2+b^2+4c^2+d^2-4ab+8ac-4ad-4bc+2bd-4cd$. 13. 49. 14. 9. 15. 0. 16. 144. 17. 1635. 18. 1. 19. 63. 20. 0. 21. 47. 22. 69.

प्रश्नमाला 72. [पृ० २५१]

1. $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$. 2. $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$. 3. $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$. 4. $a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$. 5. $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$. 6. $m^7-7m^6n+21m^5n^2-35m^4n^3+35m^3n^4-21m^2n^5+7mn^6-n^7$. 7. $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$. 8. $x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$. 9. $x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1$. 10. $x^4+12x^3+54x^2+108x+81$. 11. $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$. 12. $64-192z+240z^2-160z^3+60z^4-12z^5+z^6$. 13. $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$. 14. $x^9-9x^8y+36x^7y^2-84x^6y^3+126x^5y^4-126x^4y^5+84x^3y^6-36x^2y^7+9xy^8-y^9$. 15. $243x^5-810x^4+1080x^3-720x^2+240x-32$. 16. $1-8a+28a^2-56a^3+70a^4-56a^5+28a^6-8a^7+a^8$. 17. $1-7c+21c^2-35c^3+35c^4-21c^5+7c^6-c^7$. 18. $1-18x+135x^2-540x^3+1215x^4-1458x^5+729x^6$. 19. $1-14x+84x^2-280x^3+560x^4-672x^5+448x^6-128x^7$. 20. $256x^8-1024x^7a+1792x^6a^2-1792x^5a^3+1120x^4a^4-448x^3a^5+112x^2a^6-16xa^7+a^8$. 21. $x^{10}-10x^9a+45x^8a^2-120x^7a^3+210x^6a^4-252x^5a^5+210x^4a^6-120x^3a^7+45x^2a^8-10xa^9+a^{10}$. 22. $243x^5-810x^4a+1080x^3a^2-720x^2a^3+240xa^4-32a^5$. 23. $10x^4+20x^2+2$. 24. $2x^6+30x^4+30x^2+2$. 25. $14x^6a+70x^4a^3+42x^2a^5+2a^7$. 26. 16. 27. 32. 28. 64. 29. 128. 30. 256. 31. 30. 32. 3. 33. 0. 34. 16. 35. 0.

प्रश्नमाला 73. [पृ० २५२-२५३]

1. $x^3+y^3-z^3+3xyz$. 2. $p^3-8q^3-r^3-6pqr$.
3. $8x^3-27y^3-z^3-18xyz$. 4. $a^3-8b^3+27+18ab$.
5. $27a^3-125b^3-64-180ab$. 6. $(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy+x-y)$.
7. $(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y)$.
8. $(x-2y-3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+3xz-6yz)$.
9. 0. 10. 0. 11. 0. 16. 0. 17. 392000.

प्रश्नमाला 74. [पृ० २५४-२५५]

3. $8(c-b)(a-b)(a-c)$. 4. $(x-z)(y-z)(y-x)$. 5. 0. 6. 0.

प्रश्नमाला 75. [पृ० २५६-२५७]

1. $2x^2y+3x^2z+12y^2z+4xy^2+9z^2x+18yz^2+12xyz$.
2. $64x^2y+320x^2z+5y^2z+8xy^2+200xz^2+25yz^2+80xyz$.
3. $2a^2b+3a^2c+12b^2c+4b^2a+9c^2a+18c^2b+12abc$.
4. $9x^2y+90x^2z+10y^2z+3y^2x+300z^2x+100z^2y+90xyz$.
5. $2(x^3+y^3+z^3)+7(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+16xyz$.
6. $2a^2b-3a^2c-12b^2c-4ab^2-9ac^2+18bc^2+12abc$.
7. $4abc$. 8. $4abc$. 9. 0. 10. $27abc$.

प्रश्नमाला 76. [पृ० २५८-२५९]

4. 0. 8. $84abc$. 9. $6xyz$. 10. $3(x+y-2z)(2x-2y+z)(y+z-x)$. 11. $3(3x+3y+2z)(3x+2y+3z)(2x+3y+3z)$. 12. 2567. 13. 16800. 14. 1280. 15. 1331.

प्रश्नमाला 77. [पृ० २६२-२६३]

1. $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)$.
2. $(p-2q-r)(p^2+4q^2+r^2+2pq+pr-2qr)$.
3. $(2x-3y-z)(4x^2+9y^2+z^2+6xy+2xz-3yz)$.
4. $(a+2b+1)(a^2+4b^2+1-2ab-a-2b)$.
5. $(2a+3b-4)(4a^2+9b^2+16-6ab+8a+12b)$.
6. $x^2+y^2+xy-2x+2y+4$. 7. $(x^2-x+2)(x^4+x^3-x^2+2x+4)$.
8. $2(z-y)(3x^2+y^2+z^2-3xy-3zx+yz)$.
9. $(a^2+3a+5)(a^4-3a^3+4a^2-15a+25)$. 10. $x-5y+3$.
11. $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc$. 12. $x^2+y^2+1+xy+x-y$.
13. $x^2+4y^2+9z^2+2xy-3xz+6yz$. 14. $2a-3b-c$.
15. $(2a-b)(7a^2+8ab+4b^2)$.

प्रश्नमाला 78. [पृ० २६६-२६७]

1. $(b-c)(a-c)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$. 2. $(b+c)(b-c)(a+c)(a-c)(a+b)(a-b)$. 3. $(b-c)(a-c)(a-b)(a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+abc)$. 4. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$. 5. $(b-c)(a-c)(a-b)(ab+bc+ca)$. 6. $(x+y)(y+z)(z+x)$.
7. $(y-z)(z-x)(x-y)(xy+yz+zx)$. 8. $5(y-z)(z-x)(x-y)\times(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$. 9. $-(y-z)(z-x)(x-y)$.

10. $-(b-c)(c-a)(a-b)$. 11. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
12. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$. 13. $3(2x-y+z)(x-z)(x+y)$.
14. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)$.
15. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$.
16. $3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$. 17. $(y+z-x)(x+y-z)(x-y+z)$.
18. $-(y-z)(z-x)(x-y)$. 19. $-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z+3)$.
20. $(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.
21. $(ax+by+cz)(by+cz-ax)(cz+ax-by)(ax+by-cz)$.
22. $(x+2y+3z)(2y+3z-x)(3z+x-2y)(x+2y-3z)$.
23. 4200. 24. 249. 25. 1950.

प्रश्नमाला 79. [पृ० २७४-२७५]

1. $(x^2+1)(x+1)$. 2. $(x+1)^2(x-1)$. 3. $(x-1)^2(x+1)$.
4. $(ab+c)(ac+b)$. 5. $(x-a)(x+b)(x^2-bx+b^2)$. 6. $(ax+by)(bx+ay)$.
7. $(x+y+z)(x-z)$. 8. $(x+a)(b-c)$. 9. $(x^2-ab)(2a-3b)$.
10. $(a-b)(a+b+c)$. 11. $(2a-3b)(2a+3b+4c)$.
12. $(ax-by)(ax+by+cz)$. 13. $(x^2-yz)(x^2+yz+y^2)$.
14. $(4x-5a)(4x+5a+3b)$. 15. $(a+b)(a^2+ab+b^2)$.
16. $(m-n)(m^2-mn+n^2)$. 17. $(a-b)(a+b)^3$.
18. $(x-y)^3(x+y)$. 19. $(a+2)(a^2+3a+4)$.
20. $(x-5)(x^2-12x+25)$. 21. $(2a-3b)(a+3b)(4a+3b)$.
22. $(x-y)(x-y-1)$ 23. $(2a-b)(2a-b-3)$.
24. $(x^2+a^2)(x-a)^2$. 25. $(a^2+2b^2)(a-2b)(a-b)$.
26. $(a+2b)(a+b+c)$. 27. $(x-3y)(x-y+z)$.
28. $(m+2p-3n)(m-2n)$. 29. $(a-7b+5c)(a-3b)$.
30. $(2x-3a+4b)(x+4a)$. 31. $(a-2b+3)(a-4b)$.
32. $(x-3y+2)(3x+y)$. 33. $(a-b-c)(a+b+c+1)$.
34. $(x-2y+3z)(x+2y-3z+4)$. 35. $(3x-4y-2z)(3x-4y+2z-5)$.
36. $(a+b)(a-b)(x+a)(x-a)(2x^2-3a^2)$. 37. $(x^2+ax-b)(2x-3b)$.
38. $(x+a)(x-a)(a+b)^2$. 39. $(a-1)^2(2a^2-a+2)$.
40. $(a-1)(a^2-6a+1)(a^2+3a+1)$. 41. $(2x+2y+z)(x+2y+2z)$.
42. $(2x+3y+z)(x-y-z)$. 43. $(a^2+1)^2(a^4-7a^2+1)$.
44. $(2x-3y+3z)(2x+y-3z)$. 45. $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$.
46. $(x+1)(x+2)(x+4)$.

प्रश्नमाला 80. [पृ० २७८-२७९]

1. $(x+1)(x+3)(x+4)$. 2. $(x+2)(x+3)(x+4)$. 3. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
4. $(x-2)(x+3)(x+4)$. 5. $(x-1)(x^2-3x-2)$. 6. $(x+1)(x^2+4x-6)$.
7. $(x-2)(x^2-4x+5)$. 8. $(x^2-3x-5)(x+2)(x-2)$. 9. $(x-1)(x+2)(x^2-4x+5)$. 10. $(x+1)(x-3)(x^2-3x-2)$. 11. $(x+3)(x-2)(x^2+4x-6)$.
12. $(x-4)(x+2)(x^2-5x+7)$. 13. $(x-5)(x^2-2x+3)$.
14. $(x+3)(x^2-3x+4)$. 15. $(x+2)(x-4)^2$. 16. $(x-2)(2x^2+x+2)$.
17. $(x+2y)(x^2-2xy-5y^2)$. 18. $(a+3b)(a^2+ab-3b^2)$.
19. $(a-2b)(5a^2+7ab+14b^2)$. 20. $(2x-1)(4x^2+2x+3)$.
21. $(x-1)(x+3)(2x+1)$. 22. $(x-2)(x+1)^2$.
23. $(a-b)(2a^2+ab+b^2)$. 24. $(x-1)(3x^2+11x+3)$.
25. $(x+3y)(x^2-3xy+3y^2)$. 26. $(x+a-b)(x-a+2b)$.
27. $\{x^2+y^2(a+b)^2\}\{x+y(a-b)\}\{x-y(a-b)\}$.
28. $\{a^2+b^2(x+y)^2\}\{a^2+b^2(x-y)^2\}$. 29. $(a+2x-y)(a-x+2y)$.
30. $(x+2a+b)(x-a+2b)$. 31. $(x+y+z)(x+3y-z)$.
32. $(2a+b-3c)(2a-3b+3c)$. 33. $(x^2+2x+3)(x^2+4x-3)$.
34. $(a^2+ab-b^2)(a^2-5ab+b^2)$. 35. $(2x^2-6x+3)(2x^2-4x-3)$.
36. $(x^2+1)(x-1)^2$. 37. $(a^2+3a-5)(a^2-3a+5)$.
38. $(a-bx)(a-bx-cx^2)$. 39. $(x^2y^2+xy-z+1)(x^2y^2-xy+z+1)$.
40. $\{x(y+z)-y+z\}\{x(y-z)+y+z\}$.
41. $\{x(a+b)+y(a-b)\}\{x(a-b)+y(a+b)\}$.
42. $(x^2-2x-4)(x^2-2x-1)$. 43. $(a^2-3a+5)(a^2-3a+1)$.
44. $(2x^2+3x-3)(2x^2+3x-4)$. 45. $(x^2-xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$.
46. $(x^2-3x+4)(x^2-2x+4)$. 47. $(a^2-5ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$.
48. $(x^2+7x+5)(x^2-3x+5)$. 49. $(a^2+6ab+b^2)(a-b)^2$.
50. $(x^2+4x+10)(x^2+4x-2)$. 51. $(x^2-3x-17)(x^2-3x-5)$.
52. $(x^2+7x+30)(x+8)(x-1)$. 53. $(2x^2-3x+7)(x-3)(2x+3)$.
54. 0. 55. 0. 56. 0. 57. 300. 58. 5.

प्रश्नमाला 82. [पृ० ३०२-३०४]

1. 179. 2. 3. 3. 6·5̇. 4. $-8\frac{3}{4}$. 5. $\frac{1}{a}(ad-bc)$.
16. $5a^2-11a+15=0$. 17. $a=0$, अथवा $1\frac{1}{3}$.
18. $2rn$, जब कि r एक धनात्मक पूर्णांक है।

29. $(b-c)(a-c)(a-b)(ab+bc+ca)$. 36. $1+x+x^2+\cdots+x^{30}+x^{31}$.
38. 11111111. 41. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$. 42. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$. 43. $x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6$.
44. $x^{14}-x^{12}y^2+x^{10}y^4-x^8y^6+x^6y^8-x^4y^{10}+x^2y^{12}-y^{14}$.
45. $x^{15}+x^{14}y+\cdots\cdots+xy^{14}+y^{15}$. 46. $p=12$; $a=\frac{1}{8}$. 49. 0. 50. 1.

प्रश्नमाला 83. [पृ० ३१०-३११]

1. $2x-1$. 2. $3x-2$. 3. $2x+5a$. 4. $x(3x+4)$.
5. $3a-1$. 6. $2a-3b$. 7. x^2+x+1. 8. x^2-xy+y^2.
9. $x(2x^2+x+1)$. 10. x^2+3x+1. 11. x^2+4x+1.
12. $3a^2+2ax+x^2$. 13. $5a^2+3ax+x^2$. 14. $7x^2-3ax+2a^2$.
15. $5x^2-3x+2$. 16. $-7x^2+4x+1$. 17. $x^2(2x^2+3ax+4a^2)$.
18. $2(a^2+5a+2)$. 19. x^2+3x-2. 20. $5-3x+x^2$.
21. x^2+5x+1. 22. x^2+2x+4. 23. x^2+3x+5.
24. $2(x^2-2xa+2a^2)$. 25. $3x^2+2xy+4y^2$. 26. x^2+2x+3.
27. $4a^2+2a-5$. 28. x^2+2x+3.

प्रश्नमाला 84. [पृ० ३१४-३१५]

1. x^2-5x+6. 2. $2x^3-17x+12$. 3. x^2+3x+4.
4. $3x^3-5x^2+7$. 5. $6x^2-11x+4$. 6. $2x^2+15x-8$.
7. $3x^2+5x-1$. 8. $5x^2-3x-1$. 9. $2x^2+3x-1$.
10. $3x^3-2x+1$. 11. x^2+x+2. 12. x^2+3x-2.

प्रश्नमाला 85. [पृ० ३१७]

1. $x+4$. 2. $2x-1$. 3. $2x-3$. 4. $2x^2+1$.
5. $3a-2b$. 6. $3a-5b$. 7. $3x-4$. 8. $2x^2-3$.

प्रश्नमाला 86. [पृ० ३१९]

1. $9x^4+30x^3-17x^2-76x+32$. 2. $18x^4+3x^3-109x^2-84x+32$.
3. $48x^5-64x^4-120x^3+160x^2+27x-36$. 4. $45x^4-24x^3-123x^2+40x+80$. 5. $12x^4-14x^3-94x^2+63x+180$. 6. $12x^6+8x^5+25x^4+34x^3+15x^2+18x+8$. 7. $32x^6-24x^5-8x^4+18x^3-48x^2+27x-18$. 8. $12x^6+24x^5+95x^4+118x^3+249x^2+144x+216$.

प्रश्नमाला 87. [पृ० ३२०]

1. $12x^4-100x^3+195x^2+70x-72$. 2. $6x^4-79x^3+273x^2-188x-96$. 3. $48x^4-92x^3-128x^2+157x-30$.
4. $16x^8+40x^7+20x^6+38x^5-20x^4-39x^3-15x^2-9x+9$.

प्रश्नमाला 88. [पृ० ३२३]

1. $x+3$. 2. $\frac{x+3}{x+5}$. 3. $\frac{a+3b}{a-4b}$. 4. $\frac{x^2-ax+b^2}{x^2+ax-b^2}$.

5. $\frac{3x-2y}{2x+5y}$. 6. $\frac{1+2x-3x^2}{1-2x+3x^2}$. 7. $\frac{(x-1)^2}{x^2-3x+1}$.

8. $\frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-5}$. 9. $\frac{x^2+3ax+7a^2}{2x^2-3ax+5a^2}$. 10. $\frac{2x+3}{3x+4}$.

11. $\frac{3x^2-ax-2a^2}{3x^2+ax-2a^2}$. 12. $\frac{2(a^2-5ab+7b^2)}{3(a^2+5ab+7b^2)}$. 13. $\frac{3(3x^2+4x+5)}{4(2x^2+3x+4)}$.

14. $\frac{a(3a^2-b^2)}{2a^2-b^2}$. 15. $\frac{4x(2x^2-3y^2)}{5y(3x^2-2y^2)}$. 16. $2(a+b+c)$.

17. $1+xyz$. 18. $\frac{z+x-2y}{4(y+z)}$. 19. 2. 20. $\frac{7x-2y}{5x^2-3xy+2y^2}$.

प्रश्नमाला 89. [पृ० ३२६-३२८]

1. $\frac{108x^4}{81x^4-y^4}$. 2. $\frac{9ax(x+a)}{x^4-81a^4}$. 3. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$.

4. $\frac{6x^2-12}{x^4-5x^2+4}$. 5. $\frac{6a^2x}{4x^4-5a^2x^2+a^4}$. 6. $\frac{48a^3}{x^4-10a^2x^2+9a^4}$.

7. $\frac{2x}{x^4-1}$. 8. $\frac{(x-c)}{(x-a)(x-b)}$. 9. $\frac{4}{x^2-6x+5}$.

10. $\frac{4}{x^2+14ax+13a^2}$. 11. $\frac{2}{x+3}$. 12. 0.

13. $\frac{4x^3}{1+x^4+x^8}$. 14. $\frac{12x^4}{x^6-64}$. 15. $\frac{96ax^5}{16x^8-6561a^8}$.

16. $\frac{3}{x^2+5ax+4a^2}$. 17. $\frac{a-d}{(x+a)(x+d)}$. 18. $\frac{6a-11}{(a-1)(a-2)(a-3)}$.

19. $\frac{1}{(x+2)^2}$. 20. $\frac{5}{(x-3)(x-4)(x-5)}$. 21. $\frac{1}{a-1}$.

22. 1. 23. 0. 24. 0. 25. $\frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$.

प्रश्नमाला 90. [पृ० ३३०-३३१]

1. $-x^2y^2z^2$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. 1. 4. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$.

5. $\frac{1+a^2}{1+a}$. 6. $\frac{4a^4}{a^4-x^4}$. 7. x. 8. $a-b$.

9. $\frac{1}{3(x+2)}$. 10. $-\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{xy(x-y)^2}$. 11. $\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}$.

12. x^2. 13. a^2+b^2. 14. m. 15. $4xy$. 16. 1.

17. $\frac{1}{3}$. 18. $\frac{2}{3}$. 19. 1. 20. a.

प्रश्नमाला 91. [पृ० ३४०-३४४]

21. 0. 24. 3. 25. $\frac{a^4-10a^3b-6ab^3-b^4}{a^4+10a^3b+6ab^3-b^4}$. 26. 1.

27. $\frac{a-b}{a+b}$. 28. 0. 29. x^6+2. 30. 1. 31. $\frac{3(a+b)}{a-b}$.

32. 1. 34. 0. 35. 3. 36. $x+y+z$.

37. $a^2+b^2+c^2$. 38. $a+b+c$. 39. 0. 42. 0.

43. 1. 44. 2. 45. 1. 46. 0.

47. $\frac{1}{xyz}$. 48. $\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. 49. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

50. $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. 51. $\frac{x^2+hx+k}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. 56. x^2.

विविध प्रश्नमाला V [पृ० ३४४-३४६]

I

1. (i) $(x^2+20x+95)^2-16$; (ii) $(x^2+5x+5)^2-16$.

2. $3(x+z)(2x-y+z)(x+y+2z)$. 3. $18(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. 7. 0.

II

1. 0. 4. 0. 5. $\frac{(a-b)^2}{ab}$. 6. $2a+3b+c$.

7. $18x^4-45x^3+37x^2-19x+6$. 8. $(a-b)(b-c)(a-c)$.

III

1. $x^5+10x^3+40x+\frac{80}{x}+\frac{80}{x^3}+\frac{32}{x^5}$. 3. 0. 5. $2x-1$; $(2x-1)(3x-2)(x-3)$. 6. x^2-2x+3. 7. $ab+bc+ca$.

IV

1. 242. 2. $(a^2+b^2)(a-b)(2a-b)(a+b)(a+2b)$. 3. 2528000.

5. $\frac{a^2+b^2}{a^2-2ab-b^2}$. 7. $(x+2y)(x+7y)(x-5y)(x-3y)$; $(x-3y)(x+2y)(x+7y)$. 8. 0.

V

3. 1. 5. (i) $(3a^2-4ab+3b^2)(2a^2+17ab+2b^2)$; (ii) $(4x^2-3x+4)(3x^2-7x+3)$; (iii) $(bx^2+cx+b)(ax^2+bx+a)$.

7. (i) $x-a$; (ii) $x-y-z$.

VI

4. $(x+y)^4+z^4$. 5. $3(x^2+y^2+z^2)$. 6. (i) $x^2+(2m-3)x-6m$; (ii) $x-3$. 7. $2x^2-3x+1$; $2x^6-3x^5-7x^4+28x^3-36x^2+20x-4$.

VII

1 $x^2+y^2+2xy-1$. 2. x. 4. (i) $a+b$; (ii) $\dfrac{1-x}{(1+x)(1+2x^2)}$.

5. $(5x+2y)^2+4(2x-5y)^2$; $p=5$, $q=2$. 6. $(2x-1)(3x-1)$; $(x-2)(2x-1)(3x-1)(2x+1)$. 7. -42.

VIII

4. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$. 5. -1.

6. 0. 8. x^2+1; $(x^2+1)(x^2-1)^2$.

प्रश्नमाला 92. [पृ० ३५३-३५४]

1. $-5\frac{1}{3}$. 2. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. 3. $\frac{1}{3}(a+b+c)$.

4. $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}$. 5. 2. 6. 3. 7. 4. 8. 5.

9. $1\frac{1}{3}$. 10. 4. 11. 4. 12. 7. 13. 1.

14. 4. 15. 2. 16. $\frac{12}{73}$. 17. 3. 18. 2.

19. $\frac{8}{3}$. 20. $2\frac{3}{4}$. 21. $26\frac{1}{3}$. 22. 13. 23. $55\frac{1}{3}$.

24. $-\frac{19}{28}$. 25. $-\frac{49}{114}$. 26. $-\frac{24}{7}$. 27. 15. 28. $\frac{81}{47}$.

29. $\frac{4}{5}$. 30. $\dfrac{ab(a+b-2c)}{a^2+b^2-ac-bc}$. 31. $\dfrac{c(a^2-ab+b^2)+ab}{ab(c+1)}$.

32. $\dfrac{nb-am}{m-n}$. 33. $\dfrac{a^2-bc}{b+c-2a}$. 34. $\dfrac{3ab-a^2-b^2}{a+b}$. 35. $3a$.

प्रश्नमाला: 93. [पृ० ३५६-३५७]

1. $1\frac{1}{3}$. 2. -3. 3. $-\frac{45}{83}$. 4. 2. 5. 1.

6. 2. 7. $\frac{7}{9}$. 8. $-\frac{11}{7}$. 9. 2. 10. $\frac{1}{4}$.

11. $\frac{5}{3}$. 12. $1\frac{8}{11}$. 13. $\frac{1}{5}$. 14. $\frac{7}{8}$. 15. $4\frac{1}{2}$.

16. 6. 17. 7. 18. $4\frac{1}{2}$. 19. $-\frac{4}{3}$. 20. 1.

21. $-\frac{5}{6}$. 22. $3\frac{1}{2}$.

प्रश्नमाला 94. [पृ० ३५९-३६०]

1. 24. 2. $-b$. 3. $-\frac{3}{4}$. 4. 2. 5. 7.
6. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. 7. $\frac{ab}{a+b}$. 8. $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$. 9. 2.
10. $\frac{3}{2a^2}$. 11. 4. 12. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. 13. 3. 14. 2.
15. $\frac{ab}{a-b}$. 16. 25. 17. 3. 18. $\frac{2(a^2+b^2)}{a-b}$.
19. 6. 20. $\frac{1}{2}(a-b)$.

प्रश्नमाला 95. [पृ० ३६८-३७३]

1. 3 बजके $16\frac{4}{11}$ मिनट। 2. 5 बजके $27\frac{3}{11}$ मिनट।
3. (i) 7 बजके $5\frac{5}{11}$ मिनट ; (ii) 7 बजके $21\frac{9}{11}$ और $54\frac{6}{11}$ मिनट।
(iii) 7 बजके $38\frac{2}{11}$ मिनट 4. (i) 7 बजके $5\frac{5}{11}$ मिनट ;
(ii) 6 बजके $16\frac{4}{11}$ मिनट। 5. $\frac{ap}{p+q}$ मील। 6. तेज़ चलनेवाले मनुष्य की यात्रा के आरम्भ से 8 मील ; 6 घन्टा। 8. 36 मिनट। 9. फ़ी घन्टे $3\frac{1}{3}$ और $4\frac{1}{2}$ मील। 10. 160. 11. 6 पा.। 12. 300. 13. कुत्ता, 960 ; खरगोश, 1200. 14. 180. 15. 20 शि. व 5 शि.। 16. 40.
17. 76 पाउंड सोना व 30 पाउंड चाँदी। 18. 4 घन्टे व 6 घन्टे।
19. 42 साल। 20. पहले छड़ से $6\frac{2}{3}$ आउन्स, और दूसरे से $13\frac{1}{3}$ आउन्स।
21. 450 पा. 8 शि. 4 पे. ; 156 पा. 13 शि. 4 पे.। 22. 11 पैसे ; पहला असबाब ले जानेवाले प्रत्येक कुली को 6 पैसे ; दूसरा असबाब ले जानेवालों में से प्रत्येक को 5 पैसे, तीसरा व चौथा असबाब ले जानेवाले कुलियों में से प्रत्येक को 4 पैसे। 23. 189.
24. 25 आउन्स ; फ़ी आउन्स 8 शि.। 25. 7 शि. ; 11 शि. 8 पे. 26. 2080.
27. प्रत्येक $\frac{3}{4}$ पे. में ; 512. 28. 12. 29. 654. 30. 1504. 31. 80.
32. 736. 33. 4550.

प्रश्नमाला 96. [पृ० ३७८-३८०]

1. $x=1,\ y=2$. 2. $x=2,\ y=3$. 3. $x=3,\ y=4$.
4. $x=4,\ y=5$. 5. $x=5,\ y=6$. 6. $x=6,\ y=7$.
7. $x=7,\ y=8$. 8. $x=8,\ y=9$. 9. $x=4,\ y=2$.
10. $x=5,\ y=3$. 11. $x=7,\ y=4$. 12. $x=5,\ y=8$.
13. $x=8,\ y=12$. 14. $x=6,\ y=14$. 15. $x=8,\ y=18$.
16. $x=8,\ y=9$. 17. $x=12,\ y=16$. 18. $x=21,\ y=12$.
19. $x=21,\ y=24$. 20. $x=18,\ y=28$. 21. $x=99,\ y=15$.
22. $x=10,\ y=8$. 23. $x=3,\ y=7$. 24. $x=4,\ y=7$.

25. $x=3,\ y=5.$
26. $x=1,\ y=2,\ z=3.$
27. $x=2,\ y=-3,\ z=1.$
28. $x=3,\ y=4,\ z=2.$
29. $x=2,\ y=6,\ z=4.$
30. $x=1,\ y=3,\ z=5.$
31. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
32. $x=3,\ y=6,\ z=9.$
33. $x=4,\ y=10,\ z=14.$
34. $x=8,\ y=12,\ z=20.$
35. $x=3,\ y=4,\ z=5.$

प्रश्नमाला 97. [पृ० ३८३-३८४]

1. $x=1,\ y=2,\ z=3.$
2. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
3. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
4. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
5. $x=3,\ y=2,\ z=1.$
6. $x=3,\ y=2,\ z=1.$
7. $x=4,\ y=3,\ z=2.$
8. $x=4,\ y=5,\ z=6.$
9. $x=7,\ y=5,\ z=3.$
10. $x=1,\ y=-2,\ z=3.$
11. $x=3,\ y=2,\ z=5.$
12. $x=3,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{2}{3}.$
13. $x=10,\ y=20,\ z=5.$
14. $x=2,\ y=-3,\ z=4.$
15. $x=5,\ y=6,\ z=7.$
16. $x=2,\ y=4,\ z=6.$
17. $x=2,\ y=5,\ z=10.$
18. $x=12,\ y=12,\ z=12.$
19. $x=6,\ y=12,\ z=8.$
20. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{4}.$
21. $x=7,\ y=10,\ z=9.$
22. $x=1,\ y=-2,\ z=3.$
23. $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac},\quad z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$
24. $x=1,\ y=2,\ z=3.$
25. $x=-28,\ y=10,\ z=9.$

प्रश्नमाला 98. [पृ० ३८७-३८८]

1. $x=\dfrac{a}{2},\ y=\dfrac{b}{2},\ z=\dfrac{c}{2}.$
2. $x=\dfrac{2}{a+b-c},\quad y=\dfrac{2}{a-b+c},\quad z=\dfrac{2}{b+c-a}.$
3. $x=\dfrac{2abc}{ab+ac-bc},\quad y=\dfrac{2abc}{bc-ac+ab},\quad z=\dfrac{2abc}{bc+ac-ab}.$
4. $x=\dfrac{c(a^2+b^2)}{a^2-b^2},\quad y=\dfrac{c(a^2+b^2)}{2ab}.$
5. $x=2,\ y=4,\ z=6.$
6. $x=5,\ y=3,\ z=1.$
7. $x=12,\ y=10,\ z=8.$
8. $x=13,\ y=8,\ z=9.$
9. $x=4,\ y=5,\ z=7.$
10. $x=\dfrac{b(2a-b)}{a-b},\quad y=\dfrac{a(2b-a)}{b-a}.$
11. $x=\dfrac{Abc}{(a-b)(a-c)},\quad y=\dfrac{Aac}{(b-a)(b-c)},\quad z=\dfrac{Aab}{(c-b)(c-a)}.$

12. $x=\frac{1}{(b-c)(a-c)}$, $y=\frac{1}{(a-b)(c-b)}$, $z=\frac{1}{(c-a)(b-a)}$.

13. $x=\frac{a^2bc}{(b-a)(c-a)}$, $y=\frac{ab^2c}{(b-a)(b-c)}$, $z=\frac{abc^2}{(c-b)(c-a)}$.

14. $x=abc$, $y=ab+ca+bc$, $z=a+b+c$.

15. $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$. 16. $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_2c_1-a_1c_2)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)=0$. 17. $a=6$. 18. $w=4$, $x=12$, $y=5$, $z=7$.

19. $x=5$, $y=4$, $z=3$, $w=2$, $t=1$. 20. $x=ab$, $y=bc$, $z=ac$.

प्रश्नमाला 99. [पृ० ३९५-३९६]

1. 375. 2. 50 पाउंड; फ़ी पाउंड 28 शि.। 3. A, 14 शि.; B, 19 शि.। 4. 20, 30, 60. 5. 3 शि. 6 पे.; 4 शि. 2 पे.।

6. $A, \frac{mp}{p-m+n}$; $B, \frac{mp}{m-n}$ दिन। 7. A, 980 रु.; B, 1540 रु.; C, 2380 रु.। 8. 8 घन्टे। 9. 720 मील। 10. 4 और 3 गैलन।

11. 253. 12. अर्द्धक्राउन; 8 शि.; 9 छ-पेंसवाले सिक्के। 13. 20 आदमी; 6 शि.। 14. प्रत्येक समान नल 32 घन्टे में और दूसरा नल 24 घन्टे में। 15. क्रमशः 8 शि. और 5 शि.। 16. 75 और 25 क्वार्टर। 17. 6 क्वार्टर गेहूँ व 10 क्वार्टर बार्ली। 18. घन्टे में 45 और $22\frac{1}{2}$ मील। 19. 20 बुशेल राई (rye), 52 बुशेल गेहूँ। 20. पहले, 21 गिन्नियां व 21 क्राउन; बाकी रही 9 गिन्नियां व 12 क्राउन। 21. फ़ी घन्टे $2\frac{1}{2}$ मील। 22. A, 5; B 6 मिनट।

23. 10 व 12 मील फ़ी घन्टे। 24. $\frac{b(n-1)}{a-c}$ मील घन्टे में। 25. 100मील

प्रश्नमाला 100. [पृ० ४०६-४०७]

1. $x=5$, $y=4$. 2. $x=7$, $y=-5$. 3. $x=8$, $y=6$. 4. $x=9$, $y=11$. 5. $x=10$, $y=13$. 6. [छोटे वर्ग के बाहु के दस गुने की लम्बाई को इकाई मानो।] $x=1·2$. 7. $x=7$. 8. $x=7$. 9. 9. 10. 4. 11. $(-6, 4)$; $(8, 2)$; $(6, 8)$; क्षेत्रफल $=40$ इकाई। 12. $(5, 4)$. 13. (i) $(3, 0)$; $(0, -3)$; $(-3, 0)$; $(0, 3)$; $=$क्षेत्रफल 18 इकाई। (ii) $(1, 5)$; $(12, 5)$; $(12, 10)$; $(1, 10)$; क्षेत्रफल $=55$ इकाई। (iii) $(3, 0)$; $(8, 0)$; $(0, 5)$; $(0, 12)$; क्षेत्रफल $=40·5$ इकाई। 14. (i) $(0, 0)$, $(5, 0)$; $(0, 6)$; क्षेत्रफल $=15$इकाई; (ii) $(2, 1)$, $(2, 4)$, $(5, 1)$; क्षेत्रफल $=4·5$ इकाई। (iii) $(4, 6)$, $(-4, 2)$, $(2, -4)$; क्षेत्रफल $=36$ इकाई।

15. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right\}$ 16. $\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=-5 \end{array}\right\}$ 17. $\left.\begin{array}{l} x=9 \\ y=11 \end{array}\right\}$

प्रश्नमाला 101. [पृ० ४१४-४१६]

1. 13 आ. 3 पा. ; 2 सेर 11 छटांक। 2. 1 रु. 9 आ. 6 पा. ; 19.
3. $3\frac{1}{4}$ घन्टे ; 19 मील। 4. $8\frac{5}{8}$ फुट $4\frac{1}{2}$ हाथ।
5. A के $2\frac{1}{2}$ घन्टे चलने के बाद ; यात्रा के आरम्भस्थान से $7\frac{1}{2}$ मील की दूरी पर।
6. यात्रा के आरम्भ से 4 घन्टे बाद ; A से 12 मील। 7. 1 रु. 3 आ. ; 39.
8. 5. 11. शाम को 4-30 बजे ; B से $13\frac{1}{2}$ मील पर। 12. 434 रु.।
13. 3 बज कर 16·4 मिनट। 14. 3265 रु. ; 113 रु. 7 आ.।
15. 6 घ. 59·4 मिनट ; कलकत्ते से 108 मील।

प्रश्नमाला 102. [पृ० ४२०]

1. $\sqrt[7]{a^5}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. 3. $3\sqrt[5]{x^4}$. 4. $\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}.\sqrt{a}}$.
5. $\frac{8}{\sqrt[3]{m^8}}$. 6. $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{3\sqrt[5]{x^4}}$. 7. $\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}$. 8. $\sqrt[5]{x^{2+a}}$.
9. $\sqrt[2m]{a^{11}}$. 10. $\sqrt[a]{x^4}$. 11. $x^{\frac{7}{3}}$. 12. $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$.
13. $x^{\frac{2}{3}}$. 14. $a^{\frac{2}{5}}$. 15. $x^{\frac{3}{2}}$. 16. $a^{\frac{3}{4}}$.
17. $\frac{1}{8}$. 18. 4. 19. 27. 20. 32.
21. $\frac{1}{27}$. 22. 36. 23. $\frac{1}{25}$. 24. 81.
25. 36. 26. x^{-m}.

प्रश्नमाला 103. [पृ० ४२३]

1. a^{-6}. 2. $a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}$. 3. ab^6. 4. $a^{-8}b^{-\frac{5}{3}}$.
5. a^8b^6. 6. $x^{-\frac{9}{2}}y^4$. 7. $x^{\frac{5}{63}}$. 8. a^{-1}.
9. y. 10. $\frac{4}{5}x^2a^2$. 11. $\frac{9}{16}x^{-2}a^{-3}$. 12. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$.
13. $a^{-1}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{6}}$. 14. $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}$. 15. a^4b^2.

प्रश्नमाला 104. [पृ० ४२७-४२९]

1. $x-2x^{\frac{1}{3}}+1$. 2. $a-27b$. 3. $1+a^2b^{-2}+a^4b^{-4}$.
4. $x^2+6xz^{\frac{1}{3}}-4y+9z^{\frac{2}{3}}$. 5. $x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$.
6. $a+a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}$. 7. $x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$.

8. $a^{2m}-9b^{2n}+12b^nc^p-4c^{2p}$. 9. a^8-64b^2.

10. $a+a^{\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{4}}-x^{-1}$. 11. $x-x^{\frac{1}{3}}$. 12. $2+4x^{-1}+2x^{-2}$.

13. $y+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x$. 14. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b$. 15. $x^{2n}-1+x^{-2n}$.

16. $4x-2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}+y^{-1}+y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}$.

17. $x^{\frac{9}{4}}-x^{\frac{15}{8}}a^{\frac{3}{8}}+x^{\frac{9}{8}}a^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{15}{8}}+a^{\frac{9}{4}}$.

18. $x^{2^n}-a^{2^n}$. 19. $x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}$. 20. a^{m-1}.

21. $x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{1}{2}}-1$. 22. $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+xy^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+y$.

23. $x^n+x^{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}+a^n$. 24. $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}$.

25. $a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$. 26. $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$.

27. $\frac{2x+36x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x-27y}$. 28. $\frac{a+x}{a^2+3ax+x^2}$. 29. 1.

30. $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$. 31. 1. 32. $\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}$. 33. 2.

34. $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n+2$. 36. $\left(\frac{x^{-2}}{4}-\frac{y^{-3}}{5}\right)\left(\frac{x^{-4}}{16}+\frac{y^{-6}}{25}\right)$.

37. $\left(\frac{p}{q}\right)^{2m}$. 38. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$. 39. 1.

प्रश्नमाला 105. [पृ० ८३१-४३२]

1. 3. 2. 5. 3. 2. 4. $-\frac{1}{11}$. 5. 6.

6. $\frac{b+d}{a+c}$. 7. $1\frac{1}{2}$. 8. $2\frac{1}{2}$. 9. 2. 10. 3.

11. -4. 12. 0. 13. $x=4, y=2$. 14. $x=-2, y=-3$.

15. $x=2, y=3$. 16. $x=1, y=3$. 17. $x=2, y=-1$.

18. $x=1, y=\frac{1}{2}$. 19. $x=1, y=2$. 20. $y=4$ और $x=2$, अथवा $-\frac{1}{2}$.

21. $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}, y=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$. 22. $m=n^{\frac{1}{n-1}}$. 28. $x=1, y=2, z=3$.

29. $x=-1\frac{1}{3}, y=-9\frac{1}{3}, z=-5\frac{2}{3}$. 30. $x=y=z=\frac{1}{3}a$.

प्रश्नमाला 106. [पृ० ४३७]

1. $2xz+3y$. 2. x^2-2x+3. 3. x^3-x+1. 4. $2x^2-3x+4$.
5. $2x^2+2ax+4b^2$. 6. $3x^2-\frac{xy}{3}+3y^2$. 7. $x^2-x+\frac{1}{2}$.
8. $7x^2-\frac{x}{5}+3$. 9. $x^2-\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. 10. $\frac{a^2}{2}+\frac{a}{x}-\frac{x}{a}$.
11. $\frac{a}{2b}-1-\frac{2b}{a}$. 12. $\frac{3a}{x}-\frac{1}{5}+\frac{2x}{3a}$. 13. $2x^2-2xy^2-y^4$.
14. $\frac{7x}{y}-3-\frac{y}{7x}$. 15. $\frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{x}$. 16. $\frac{2x}{7y}-5+\frac{3y}{4x}$.
17. $x-x^{\frac{1}{2}}+1$. 18. $x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}$. 19. $ax^{-1}+1+a^{-1}x$.
20. $x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$. 21. $\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2}-\frac{5}{3}xy^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}y$. 22. a^m-2a^n.
23. $a^{2m+1}+3a^m-5c^{m-2}$.

प्रश्नमाला 107. [पृ० ४३९-४४०]

1. $5xy-4$. 2. $7ax^2-3b^2$. 3. $7a^3b^4+9a^4b^3$.
4. $\frac{x^4y^2}{2}-\frac{x^3y^5}{5}$. 5. $\frac{5ab}{2}-\frac{c^2}{3}$. 6. $a+b+c$.
7. $a-b+c$. 8. $2a-b-3c$. 9. $a^2+2b^2-3c^2$.
10. $2a^2-3b^2+5c^2$. 11. $x-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}$. 12. $x-2-\frac{1}{x}$.
13. $x^2+1+\frac{1}{x^2}$. 14. $\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}$. 15. $\frac{x}{y}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{y}{x}$.
16. $\frac{3x}{a}-1+\frac{a}{3x}$. 17. $x+2+\frac{1}{x}$. 18. $a^{\sqrt{2}}-a^{-\sqrt{2}}$.
19. $a-b+c-d$. 20. a^2+b^2. 21. $a^2-b^2+c^2-d^2$.
22. $a^2+a-\frac{1}{3}$. 23. $2a(b+c)+2bc$.

प्रश्नमाला 108. [पृ० ४४३]

1. $x+9$. 2. $3x-8$. 3. $4a-3b$. 4. x^2-3x+2.
5. $2x^2+x-3$. 6. $1-3x^2+2x^4$. 7. $2x^2-3cx+c^2$.

प्रश्नमाला 109. [पृ० ४४८-४४९]

1. अंतका । 2. अंतका । 3. पहला । 4. पहला ।
5. अंतका । 6. $a:d$. 7. $1:4$. 8. $1:1$.

9. 75 : 8. **10.** 28 : 27. **11.** 5 : 7. **12.** 3 : 4.
13. 63 और 72. **14.** 85 और 51. **15.** 28 और 35. **16.** 42 और 54.
17. -15. **18.** 35. **19.** -17. **20.** $\frac{ad-bc}{c-d}$.
23. 76 : 75. **24.** 1772 : 1771. **25.** B.

प्रश्नमाला 110. [पृ० ४५०]

1. 4. **2.** 18. **3.** $37\frac{1}{3}$. **4.** 36. **5.** 20.
6. 60. **7.** 20. **8.** 6. **9.** 14. **10.** 18.

प्रश्नमाला 111. [पृ० ४५५]

1. $x=9, y=6$. **2.** $x=25, y=9$. **3.** $x=56, y=30$.
4. $\frac{a}{3}$. **5.** $\frac{5}{8}$. **6.** $\frac{3}{4}$. **7.** $\frac{4}{81}$. **8.** $\frac{1}{5}$. **9.** $2\frac{7}{3}$.
10. $\sqrt{2ab-b^2}$. **11.** $a\left\{1-\frac{16b^2}{(1+b)^4}\right\}$. **15.** 2.

प्रश्नमाला 113. [पृ० ४६१-४६३]

26. 0.

विविध प्रश्नमाला [पृ० ४६४-४७८]

I

1. $1\frac{2}{3}$. **2.** 0. **3.** $5b(a+b)$. **4.** $2x^2-4xy+5y^2$.
5. $\frac{b^3}{(a+b)^3}$. **6.** $\frac{ab}{b-a}$.

II

1. 21. **2.** $4x^2-6x-1$. **3.** 12.
4. x^2-3x+2. **5.** $\frac{1}{5}$. **6.** 11.

III

1. -30. **2.** $\frac{4x^2}{1-x^4}$. **3.** $(a+b-3c)(a-b+3c)$.
4. $x-a$. **5.** $(x-1)(x-2)(x-3)$. **6.** $\frac{x(x+2)}{x^2-2x+4}$.
7. $\frac{1}{3}$.

IV

1. $\frac{y^2}{x^2}$. **2.** $x^6+x^5y-x^3y^3+xy^5+y^6$. **3.** (i) $(x+1)^2(x-1)$; (ii) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$. **5.** $(64x^6-729)(3x+2)$.
6. $-\frac{6}{7}$. **7.** $x=a^2b,\ y=ab^2$.

V

1. 1. 2. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$.
3. $\frac{9(a^2+3)}{a(a^2+27)}$. 4. $\frac{x}{\sqrt{y}}-4+\frac{4\sqrt{y}}{x}$. 6. $x=3, y=1$.

VI

1. 1. 2. $b^2-a^2+\frac{b^4}{a^2}-\frac{a^4}{b^2}$. 3. $x^2+(a-b)x-ab$.
5. $\frac{5x^2-4x-8}{3x^2+4x+24}$. 6. $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{3}$. 7. $x=3, y=5, z=7$.

VII

1. $2x^3y^{-3}-3x^4y$. 2. ae^x+e^x+a+1. 4. $\frac{ax+by}{ax-by}$.
5. 7. 7. 80, 128.

VIII

2. (i) $(b+c-a)(b+c-5a)$; (ii) $(x+2y+a)(x-a)$.
3. $\frac{a+b}{(a-b+c)(b+c-a)}$. 5. -6. 6. $2x^2-3x^{-1}+4x^{-4}$.
7. $x=7\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{3}, z=1\frac{1}{5}$.

IX

1. -20. 2. $\frac{1}{x^2-1}$. 3. $(a-b+1)(a^2+b^2+1+ab-a+b)$.
4. 6. 6. $x=16, y=4$. 7. 8 बजके $27\frac{3}{11}$ मिनट।

X

1. $9a^2+4b^2+9c^2+6ab-6bc+9ac$. 2. x^2+2x+3.
3. $\{(a+b)x+(a-b)y\}\{(a-b)x+(a+b)y\}$. 4. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. 6. 20 दिन।

XI

2. (i) $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$; (ii) $(x+y-z)(x-y+z+1)$.
3. $\frac{3x}{a}-1+\frac{a}{3x}$. 4. $x=y=z=1$. 5. $x^2-5xy+7y^2$.
6. 480, 16 फी शि. ; 90, 18 फी शि.।।
7. 1.

XII

2. 0. 3. (i) $(x-b)(x-2a+b)$; (ii) $(x+a)(x+b+c)$.
4. $3x-1$. 5. 20. 6. 10.

XIII

3. 0. 4. 0. 5. 30. 6. 1.

XIV

3. $a+b$. 4. $x=\frac{1}{3}(2a+b+c)$, $y=\frac{1}{3}(a+2b+c)$, $z=\frac{1}{3}(a+b+2c)$.

5. 5 दिन। 6. $(x^2+5ax+5a^2)^2-a^4$.

XV

1. 4. 3. $\frac{2x+3}{x^2+x+1}$. 4. $2x-3b$. 5. $\frac{1}{n}$.

6. 4. 7. 54 गैलन।

XVI

1. x^2+2x+3. 3. $(xy+ab)(ay^2+b^2x)$.

5. पहले मिलावट में $\frac{1}{3}$ हिस्सा शराब, व दूसरे में $\frac{2}{3}$ हिस्सा शराब।

XVII

1. x^2+x+1. 2. $n(n-1)$. 5. 72. 6. $\frac{x^2-2x+3}{2x^2+5x-3}$.

XVIII

2. (i) $(7x-1)(2x-5)$; (ii) $2(a-c)(1-ac)$; (iii) $2m^2n(m+n)$.

3. 1920. 4. $a+b+c$. 6. $x=2$, $y=4$, $z=6$.

XIX

2. $ac-bc-b^2+a^2$. 3. $mq : np$.

XX

3. $\frac{1}{abc}$. 4. $-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$. 6. $x=c$,

अथवा $=c-\frac{a+b}{2}$. 7. $x=\frac{b+c}{2a}$, $y=\frac{a+c}{2b}$, $z=\frac{a+b}{2c}$.

8. क्रमशः 4 व 3 मील घन्टे में ; $3\frac{1}{3}$ मील।

XXI

5. $(a-b)(a+3b-2c)$. 6. x^2-x+3.

XXII

4. 1020 गज़। 7. $x=b+c$, $y=a+c$, $z=a+b$.

XXIII

2. $(3x-1)(7x-2)(4x-1)$. 6. $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

XXIV

1. $x=a$, $y=b$, $z=c$. 2. 54, 81, 108.

UNIVERSITY MATRICULATION PAPERS

ALLAHABAD

1934

1. Factorize : (i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$;
(ii) $30x^2+97xy-28y^2$; (iii) $(bx+ay)^2+(ax-by)^2$.

2. (*a*) Simplify $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

(*b*) Solve $3y+4x=3xy$, $\frac{9}{x}+\frac{8}{y}=7$.

3. At an election there were two candidates *A* and *B*. $\frac{2}{3}$ of the electors voted for *A* who was elected by a majority of 200 over *B*, while $\frac{1}{5}$ of the electors did not vote at all. How many electors were there altogether ?

4. *A* walks at the rate of 4 miles an hour and rests for eighteen minutes at the end of every hour. Two hours later *B* runs at the rate of 6 miles an hour. Find graphically when and where they will meet. Find the equation of the inclined portion of the graph between the first and second haltage.

Or, Draw the graphs of the following straight lines :

(i) $4x-y=10$; (ii) $2x-y=4$; (iii) $x=3$; (iv) $y=2$.

Solve graphically the first two simultaneous equations.

Draw a straight line which cut off intercepts of 3 and 4 on the axes of x and y respectively and find its equation. (The same units are taken in all cases.)

1935

1. Factorize : (i) $(2x-3y)^3+(3y-z)^3+(z-2x)^3$;
(ii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$; (iii) $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$.

2. Solve : (i) $\frac{2}{2x-7}-\frac{4}{9x-15}=\frac{5}{8x-34}-\frac{3}{3x-5}$; (ii) $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}=29$, $\frac{3}{y}+\frac{1}{x}=11$.

3. Tin appears to lose one-seventh of its weight when weighed in water. Lead appears to lose one-twelfth of its weight under the same conditions. An alloy of tin and lead, which weighs 270 lbs. in air, appears to weigh only 240 lbs. when weighed in water. How much of each metal does it contain ?

4. Explain clearly what you understand by the graph of an equation. Draw the graph of the equation $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ and measure its intercept between the two axes.

1936

1. Factorize :
(i) x^4+4 ; (ii) $ax^2+(a^2+1)x+a$; (iii) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

2. Solve : (i) $\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-2}=\frac{7}{x+1}$; (ii) $x+6y=5z$............ (1)
$7x+z=6y$............ (2)
$5x+6y-4z=24$.....(3)

3. A certain number between 10 and 100 is eight times the sum of its digits and if 45 be subtracted from it, the digits will be reversed. Find the number.

4. *A* can do a piece of work in 6 hours and *B* in 8 hours. Find by means of a graph the time they would take in finishing it working together.

1937

1. Solve : (i) $x+y=5xy$, $2x-3y=12xy$; (ii) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0.$

2. Factorize : (i) x^6-28x^3+27 ; (ii) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$; (iii) $x^5+x^4+x^3+x^2$.

3. A can reap a field in five days less than B, and if they work together they can reap it in six days ; find in what time each can reap the field alone. Explain the double result.

4. A train leaves Calcutta at 12 noon and travels 30 miles an hour ; another train leaves at 3 P. M. and travels 40 miles an hour. Find graphically when and where the second train will overtake the first.

1938

1. Factorize : (a) $x^2-4xy+4y^2-1$. (b) $8a^3-b^3+27c^3+18abc$. (c) $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$.

2. Solve : (a) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=18$; $\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=37$; $\frac{5}{z}+\frac{2}{x}=31$. (b) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$.

3. A number of three digits remains unaltered when the digits are reversed. The sum of the three digits is 17 and the difference between the first two digits is 4 ; find the number.

4. Solve graphically the equations : $x=2y+5$ and $3x-4y=22$.

1939

1. (a) If $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=3$, find the value of $x^3+\frac{1}{x^3}$.

(b) Factorize : (i) a^4+4b^4 ; (ii) $x^3+4x^2-11x-30$.

2. (a) Simplify $\frac{2}{x^2-8x+15}+\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{4}{6x-x^2-5}$.

(b) Find the square root of $\frac{a^4}{9}+\frac{2a^3}{3}+a+\frac{1}{4}$.

[The question seems to be wrong.]

3. (a) Solve $\frac{5}{3-4x}+\frac{9}{4x+13}=\frac{4}{4x+5}$.

(b) A boat goes upstream 30 miles and downstream 44 miles in 10 hours ; it also goes upstream 40 miles and downstream 55 miles in 13 hours. Find the rate of the stream and of the boat.

4. A man walks to a town at the rate of $3\frac{3}{4}$ miles per hour, rests there half-an-hour, and rides back at the rate of $7\frac{1}{2}$ miles per hour. The time occupied is 4 hours 10 mins. Find graphically how far he has walked.

CALCUTTA

1944

Compulsory Paper

1. *Either*, (a) Factorize x^4+4x^2-12.

(b) Find the H. C. F. of x^3+3x^2-9x+5 and $x^3-19x+30$.

Or, (c) If $x=a+\frac{1}{a}$ and $y=a-\frac{1}{a}$, find the value of $x^4+y^4-2x^2y^2$.

(*d*) If $2s=a+b+c$, show that
$$s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=ab+bc+ca.$$

2. (*a*) Solve $\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)}=\dfrac{x+5}{x+8}$.

(*b*) If $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$, show that $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

3. *Either*, (*a*) A man who went out for an evening walk between 5 and 6 returned between 6 and 7 and found that the hands of the clock had exactly changed places. When did he go out ?

Or, (*b*) A person bought an article and sold it at a profit of 6 per cent. Had he bought it at 4 per cent. less and sold it at Rs. 2. 6*a*. more, his profit would have been 12 per cent. For how much did he buy it ?

4. Draw the graphs of *any two* of the following :—

(*a*) $y=2x$; (*b*) $y=7$; (*c*) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{7}=1$.

Additional Paper

1. *Either*, (*a*) Find the sum of the first n terms of a series in arithmetical progression.

(*b*) A man undertakes to pay off, by monthly instalments, a debt of Rs. 650 on which no interest is charged. He pays Rs. 20 in the first month and continually increases the instalment in every subsequent month by Rs. 10. In what time will the debt be cleared up ?

Or, (*c*) Solve $1+x=\dfrac{3}{4-\dfrac{3}{4-x}}$.

(*d*) If a, b, c be in arithmetical progression, and x, y, z in geometrical progression, prove that $x^{b-c}\,y^{c-a}\,z^{a-b}=1$.

2. *Either*, (*a*) Find the sum of the first n terms of the series $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots\cdots$

(*b*) Prove that the arithmetic mean of two positive numbers is greater than their geometric mean.

Or, (*c*) Shew that $(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$.

(*d*) Find for what value of n will $16x^4-24x^3+41x^2-nx+16$ be a perfect square.

3. Draw the graph of $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

1945

Compulsory Paper

1. *Either*, (*a*) If $a+b+c=15$ and $a^2+b^2+c^2=77$, find the value of $ab+bc+ca$,

(*b*) If $ab+bc+ca=0$, show that
$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

Or, (*c*) If $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$, find the value of $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

(*d*) Find the H. C. F. of $2x^2-x-1$ and $3x^3-7x^2+4$.

2. (a) Factorize $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(b) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, prove that $\frac{a^2+ab+b^2}{c^2+cd+d^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{c^2-cd+d^2}$.

3. *Either*, (a) The product of two numbers is 18225 and the quotient when the larger number is divided by the smaller is 81. Find the numbers.

Or, (b) At what time between 4 and 5 o'clock will the hands of a watch be at right angles to one another?

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :—

(a) $x-y=3$, (b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ and (c) $7x-3y=21$.

Additional Paper

1. *Either*, (a) Find the sum of the first n terms of the series

$$a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b)+\cdots\cdots$$

(b) If x, y and z be respectively the sums of the first p, q and r terms of a series in arithmetical progression, prove that $xqr(q-r)+yrp(r-p)+zpq(p-q)=0$.

Or, (c) If $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$, shew that $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

(d) Simplify $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

2. *Either*, (a) Find the roots of the quadratic equation $ax^2+2bx+c=0$.

(b) The hypotenuse of a right-angled triangle is 13 inches. Find the length of each of the remaining two sides if their sum is 17 inches.

Or, (c) Express $(x-2a)(x-5a)(x-8a)(x-11a)+81a^4$ as a perfect square.

(d) Prove that $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\cdots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}$.

3. Draw the graphs of $y=x^2$ and $y=2x-1$, and determine where they meet.

1946

Compulsory Paper

1. *Either*, (a) Express $a^2+2ab-2bc-c^2$ as the difference of two squares.

(b) Simplify $\frac{b+c-k}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-k}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-k}{(c-a)(c-b)}$.

Or, (c) If $a+b+c=0$, show that $a^2-bc=-(ab+bc+ca)$.

(d) Factorize $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$.

2. *Either*, (a) If $a+b=2c$, show that $\frac{a}{a-c}+\frac{c}{b-c}=1$.

(b) Solve $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$.

Or, (c) Find the H. C. F. of x^3-1 and x^5-1.

(d) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, prove that $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$.

3. A number consists of two digits ; the digit in the tens' place is twice the digit in the units' place ; if 36 be subtracted from the number the digits are inverted ; find the number.

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :—

(*a*) $y-2x=7$; (*b*) $y=5$; (*c*) $x=6y$.

Additional Paper

1. *Either*, (*a*) Solve the quadratic $ax^2+bx+c=0$.

(*b*) Apply the above formula to find the roots of $x^2-2\sqrt{3}x-13=0$.

Are the roots free from surds though the part of the roots arising from $\sqrt{b^2-4ac}$ is not a surd ? If not, why not ?

Or, (*c*) Find the square root of $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$.

(*d*) Solve $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$.

2. *Either*, (*a*) Find the sum of n terms of a series in geometrical progression of which the first term is a and the common ratio is r.

(*b*) The sum of n terms of an A.P. is 40, the common difference is 2, and the last term is 13. Find n.

Or, (*c*) Find the meaning of $a^{\frac{m}{n}}$ where m and n are integers only.

(*d*) If l, m and n are the pth, the qth and the rth terms of an A.P., prove that $l(q-r)+m(r-p)+n(p-q)=0$.

3. *Either*, (*a*) Draw the graphs of $y=x^2+3x$, and $y=-2$. Hence find the roots $x^2+3x+2=0$.

Or, (*b*) Prove graphically that the expression x^2-3x+4 is positive for all real values of x.

1947

Compulsory Paper

1. *Either* (i) Simplify $\frac{a^2(b-c)}{(b+a)(a+c)}+\frac{b^2(c-a)}{(c+b)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(a+c)(c+b)}$.

Or, (ii) If $x=\frac{4ab}{a+b}$, find the value of $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$.

2. *Either*, (i) If $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{2}{a+b}$, prove that $a^2+b^2=2c^2$.

Or, (ii) Solve $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$.

3. *Either*, (i) Find the H.C.F. of $6x^2+xy-15y^2$ and $21x^2+41xy+10y^2$.

Or, (ii) If $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$, prove that $xyz(x+y+z)^3=(xy+yz+zx)^3$.

4. *Either*, (i) Factorize $4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2$.

Or, (ii) The age of a father ten years ago was thrice the age of his son ; ten years hence the father's age will be twice that of his son. Find the present age of the father.

5. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(*a*) $3x-4y=2$, (*b*) $x+y=10$, (*c*) $2x=3y$.

Additional Paper

1. Solve the following two equations :—

(*a*) $x^2-2\sqrt{17x}-8=0$. (*b*) $x^2-10x+8=0$.

Distinguish between the roots of the two equations, and try to account for the difference.

Or, (*c*) Find the square root of $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+7$.

(*d*) Solve $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$.

2. (*a*) Draw the graph of $5x^2-10x+9$.

(*b*) Trace the path of a point which moves in such a manner that thrice its abscissa exceeds twice its ordinate by 5.

Or, (*c*) Solve the equation $x^2-6x+8=0$, by drawing the graph of $y=x^2$.

3. (*a*) The mth term of an A. P. is n, and the nth term is m, find the pth term of it.

(*b*) Find the sum to n terms of the Geometrical progression $1+3+9+27+\cdots$

Or, (*c*) Simplify $\left\{\frac{4^{m+\frac{1}{4}}\times\sqrt{2^{2m}}}{2\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$.

(*d*) If a, b, c be in G. P., prove that $a+c>2b$, where a, b, c are all positive.

1948

Compulsory Paper

1. *Either*, (*a*) Factorise $a^3+b^3+c^3-3abc$.

(*b*) Find the value of $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}$, when $x=\frac{2ab}{a+b}$.

Or, (*c*) Find the H. C. F. of $3x^2+13x+10$ and $3x^3+18x^2+33x+18$.

(*d*) Simplify $\frac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$.

2. *Either*, (*a*) If $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$,

find the value of $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$.

(*b*) Solve $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$.

Or, (*c*) If $a+\frac{1}{b}=1$ and $b+\frac{1}{c}=1$, show that $c+\frac{1}{a}=1$.

(*d*) If $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, show that $\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}=\frac{a}{c}$.

3. *Either*, (*a*) A general can arrange his men in a hollow square 5 deep. If the total number of men in it be 1900, find the number of men in the front row.

Or, (*b*) Find the time between 1 and 2 o'clock when the hands of a clock are at right angles.

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :—

(*a*) $2y-x=7$. (*b*) $x=5$. (*c*) $4x=3y$.

Additional Paper

1. Form the two quadratic equations of which the roots are :—

(*a*) $2+\sqrt{7}$ and $2-\sqrt{7}$. (*b*) $\sqrt{7}+2$ and $\sqrt{7}-2$ respectively.

Distinguish between the co-efficients of the two equations and try to explain the difference.

Or, (*c*) Find the square root of $x^4-2ax^3+(a^2+2b^2c)x^2-2ab^2x+b^4$.

(*d*) Solve $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-6}{x+3}=2$.

2. (*a*) Using the graphs $y=x^2$ and $y=\frac{5x+2}{3}$, solve the equation $3x^2-5x-2=0$.

Or, (*b*) Draw the graph of $y=5x^2+2x-1$. Read off the abscissa where this graph is cut by $y=3$. These are the roots of the equation $5x^2+2x-4=0$. Explain why.

3. (*a*) Find the sum of the following series :—

$$2+5+8......152.$$

(*b*) Find the arithmetic and geometric means of *a* and *b*.

(*c*) Show that the arithmetic mean of any two real positive quantities is greater than their geometric mean.

Or, (*d*) Show that the recurring decimal ·735 is equivalent to an infinite geometrical progression. By summing it find its value.

DACCA
1943
Compulsory Paper

1. (*a*) Factorize *any two* of the following :

(i) $125x^5y^2-64x^2y^5$. (ii) $x^4+x^2y^2+y^4$. (iii) $(x-y)^2-(1-xy)^2$.

(*b*) Divide $8a^3-b^3-27c^3-18abc$ by $2a-b-3c$.

Or, (*c*) Find the H. C. F. of $x^5+11x-12$ and x^5+11x^3+54.

(*d*) Find the continued product of $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$.

2. (*a*) Express $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ as the sum of two squares.

(*b*) Show that $(2x-1)^3-(x-2)^3-3(2x-1)(x-2)(x+1)$ is a perfect cube.

3. Solve the following equations :

(*a*) $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$. (*b*) $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2=\frac{x+2}{x+4}$.

Or, (*c*) A father's present age is to his son's present age in the ratio of 7 to 3. Ten years ago the father was four times as old as the son. Find their present ages.

(*d*) Solve $x+y=7$; $2x+3y=18$.

4. (*a*) Solve *graphically* $y=4x$; $x+y=5$.

Or, (*b*) Find *graphically* the value of $x+5$ when $x=7$.

Additional Paper

1. (*a*) If $\frac{a}{x}(b-c)+\frac{b}{y}(c-a)+\frac{c}{z}(a-b)=0$,

show that $\frac{x}{a}(y-z)+\frac{y}{b}(z-x)+\frac{z}{c}(x-y)=0$.

Or, (*b*) Extract the square root of $x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{5}{2}$.

(*c*) Solve the equation $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$.

B—34

2. (*a*) Find a formula for the sum to n terms of an A. P. of which the first term and the common difference are given.

(*b*) The sums to the first p, q, r terms of an A. P. are a, b, c respectively. Prove that $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$.

Or, (*c*) If a be the first term of a G. P. of n terms, l the last term, and P be the product of the terms, show that $P=(al)^{\frac{n}{2}}$.

3. Solve graphically the simultaneous equations

(1) $x^2+y^2=13$, (2) $5x+y=13$.

1944

Compulsory Paper

1. (*a*) Divide x^3+y^3 by $x+y$ and from the result write down the quotient of $(x+y)^3+27z^3$ by $x+y+3z$.

Or, (*b*) Find the factors of :

(i) $16x^2-40xy+25y^2$. (ii) $4(xy-ab)^2-(x^2+y^2-a^2-b^2)^2$.

2. (*a*) If $\frac{5x+4y}{8x+5y}=\frac{2}{3}$, find the value of $4x+7y : 9x+2y$.

(*b*) Find three consecutive numbers whose sum is 114.

Or, (*c*) A person sold 5 hens and 2 ducks for Rs. 8 to one buyer and 2 hens and 3 ducks for Rs. 6-8 at the same rates to another buyer. Find the price of each.

3. (*a*) Prove that the product of any two algebraical expressions is equal to the product of their H. C. F. and L. C. M.

(*b*) Find the L. C. M. of $6x^2-5x-6$ and $4x^3-2x^2-9$.

Or, (*c*) Solve graphically $3x-y=5$; $4x+3y=11$.

Additional Paper

1. (*a*) Solve $\frac{7}{2x-1}+\frac{5}{2x-3}=2$.

(*b*) Find the square root of $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\frac{3}{4}$.

Or, (*c*) Assign a meaning, with reason, to $a^{-2\frac{1}{2}}$ and to a^0.

(*d*) Simplify $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l}\times\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m}\times\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}$.

2. (*a*) Find without assuming any formula the sum of the series $4+7+10+13+\cdots\cdots$ to 112 terms.

(*b*) The first term of a G. P. exceeds the second by 2, and the sum to infinity is 50. Find the series.

Or, (*c*) Find the sum to n terms of the series $1.2+2.3+3.4+4.5+\cdots\cdots$

(*d*) Show that the sum of the series $1+r+r^2+\cdots$ to infinity is $\frac{1}{1-r}$ if r be numerically greater than unity ?

3. (*a*) The sum of the squares of two consecutive odd integers is 290 ; find the integers.

(b) If $x=\dfrac{\sqrt{(a+2b)}+\sqrt{(a-2b)}}{\sqrt{(a+2b)}-\sqrt{(a-2b)}}$, prove that $bx^2-ax+b=0$.

Or, (c) Trace the graphs of (i) $y=x$, (ii) $y=\dfrac{x^2}{4}$ and determine the points where they intersect.

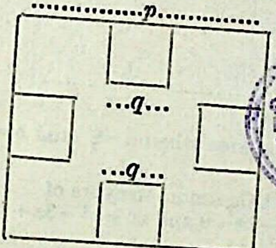
1945

Compulsory Paper

1. (a) Simplify $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2-4ab-21b^2}\times\dfrac{a^2+2ab-3b^2}{a^3-b^3}\div\dfrac{1}{a-7b}$.

Or, (b) Find the remainder when $x^3+3x^2+4x+12$ is divided by $x-2$.

2. (a) The figure given represents a square lawn measuring p feet each way, in which four square tanks have been dug, each measuring q feet each way. (i) Find in a (factorised) form suitable for calculation the area of the lawn excluding the tanks. (ii) Calculate the area when $p=146$ and $q=27$.



Or, (b) I have a large number of match boxes. I wish to set them side by side on a table so that they shall form a rectangle in which the number of rows of boxes is the same as the number of boxes in a row. The first time I arrange them in this way there are 25 boxes short of the number required. I try to arrange them, therefore, with one box less in a row. This time there are 4 boxes over. How many boxes are there?

3. (a) The incomes of A and B are in the ratio of 3 to 2 and their expenditures are in the ratio of 5 to 3. Each saves Rs. 1,000 a year; find their yearly incomes.

Or, (b) Find the greatest common measure of

$$x^2+x-6,\ x^2+3x-10,\ x^3+x^2-5x-2.$$

(c) Find the value of $\dfrac{a-1}{a-2}-\dfrac{a+1}{a+2}-\dfrac{4}{4-a^2}+\dfrac{2}{2-a}$.

4. (a) The salary of an officer is increased each year by a fixed sum. After 5 years of service his salary is raised to Rs. 120 and after 12 years to Rs. 176. Draw a graph from which his salary may be read off for any year and determine from it (i) his initial salary and (ii) the salary he should receive for his 21st year.

Or, (b) Taking one inch as unit (1) draw the graphs of $x-2=0$, $y-1=0$ and $2x+3y=6$ and (2) find the area included between them.

1946

Compulsory Paper

1. (a) A box contains 12 dozen oranges of which 24 are bad. How many good ones may be expected (*i*) in 96 oranges and (*ii*) in x oranges?

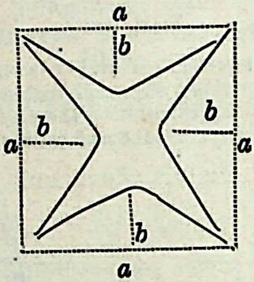
(b) Simplify :

$$\frac{x^2}{ab}+\frac{(x-a)^2}{a(a-b)}-\frac{(x-b)^2}{b(a-b)}.$$

2. (a) For what values of b and c is $2x^3-3x^2+bx+c$ divisible both by $x-1$ and $x-2$?

(b) Show that $x+y$ and $x-y$ are factors of the expression $(x^2-2y^2)^3+(2x^2-y^2)^3$.

3. Find the area of the star-shaped figure in the diagram below, a and b being the lengths of the respective dotted lines.



Calculate the value of the area when $a=8''$ and $b=3''$ and interpret the result when $a=8''$ and $b=4''$.

4. (a) Find the Greatest Common Measure of

$$x^3-5x^2+9x-9 \text{ and } x^3+x^2-3x+9.$$

(b) Find the value of

$$\frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}.$$

5. (a) If $a:b=c:d$, prove that

$$a+b:a-b=c+d:c-d.$$

(b) What number must be subtracted from each of the numbers 7, 10, 19 and 31 in order that the remainders may be in proportion?

6. Draw a graph to show the connection between the sale and cost prices of certain articles on the assumption that they are sold so as to make a profit of 20 p. c. From the graph find the cost prices of articles which are sold for 9as., Re. 1-8 and Rs. 2-10. Also find the sale prices of articles which cost 10as., Re. 1-9 and Rs. 2-8.

1947

Compulsory Paper

1. (a) Resolve into factors : (i) $-a^3-27b^3$, (ii) $27x^3-8y^3-64-72xy$.

(b) Simplify $\frac{1}{x^2-7x+12}-\frac{1}{x^2-x-12}$.

2. (a) Find the value of c, so that $x^3-10x^2+31x-c$ may be exactly divisible by $x-2$ and $x-5$.

(b) Solve the equation $\frac{2}{x-a}+\frac{3}{x+a}=\frac{9a}{x^2-a^2}$.

3. (a) Find the L.C.M. of a^3b-ab^3, $a^2+ab-2b^2$, and $a^2-ab-2b^2$.

(b) Find the H.C.F. of $2x^3-4x^2-6x$ and $3x^5-6x^4-6x^3-9x^2$.

4. A person starts walking from a certain place at 5 miles per hour. Draw the graph of his motion and determine from the graph the time taken by him in covering a distance of $12\frac{1}{2}$ miles.

5. (*a*) If $a : b = c : d$, show that $3a+2b : 4a+5b = 3c+2d : 4c+5d$.

(*b*) What number must be added to each of the numbers 3, 5, 7, 10 to give four numbers in proportion ?

6. (*a*) Solve graphically $2x+3y=4$, $3x-2y=-7$.

(*b*) Find a fraction such that if 1 be subtracted from the numerator, the value will be $\frac{3}{4}$ and if 6 be added to the denominator, its value will be $\frac{1}{2}$.

1948

Compulsory Paper

1. *Either*, (*a*) If $x+\frac{1}{x}=4$, find the values of $x^2+\frac{1}{x^2}$ and $x^3+\frac{1}{x^3}$.

Or, (*b*) Simplify $\frac{a^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(b-c)(c-a)}$.

2. *Either*, Factorise

(*a*) $5x^2-7x-6$. (*b*) $x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$.

Or, (*c*) If $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, prove that $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+d}$.

(*d*) If $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$, prove that $\frac{p+q}{p+q}=\frac{r+s}{r-s}$.

3. (*a*) Solve (i) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=1$. (ii) $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}+3=0$.

(*b*) $\frac{1}{2}$ of a post is under mud, $\frac{1}{3}$ of its length is under water and the part that stands above the water level is 2 ft. long. Find the entire length of the post.

4. *Either*, (*a*) Find the H. C. F. of x^2-3x+2, $3x^2-2x-8$ and $2x^2-9x+10$.

(*b*) Find the L. C. M. of $12(x^2-4x+3)$ and $16(x^2-5x+6)$.

Or, (*c*) Draw the graphs of the equations :—

(i) $4x+3y-12=0$. (ii) $5x-4y-20=0$.

PATNA

1931

1. *Either*, (*a*) Simplify $\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\frac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

Or, (*b*) Prove that $(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2c^2+b^2c^2+c^2a^2)$, if $a+b+c=0$.

Either, (*c*) Reduce to its lowest terms the fraction, $\frac{7-10x-11x^2+6x^3}{14+x+4x^2-3x^3}$.

Or, (*d*) Show that, if the four quantities, a, b, c, d are proportional, then $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$.

2. (*a*) Solve, by completing the square, the equation $7x^2+13x=2$.

(*b*) Draw the graph of $y+3x+2=0$, for values of x from $x=0$ to $x=-4$ and by the aid of your graph, obtain the value of x, when $y=8$.

3. *Either*, (*a*) Find the square root of $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+4x+2x^{\frac{3}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$.

Or, (*b*) Two men, 40 miles apart, walking in opposite directions, meet in $6\frac{2}{3}$ hours; but if one of them had doubled his pace, they would have met in $\frac{3}{4}$th of the time. Find their respective speeds.

1931 (Supplementary)

1. *Either*, (*a*) Factorize $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

Or, (*b*) If $x=a^2-bc$, $y=b^2-ac$, $z=c^2-ab$, show that

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$$

Either, (*c*) Find the H. C. F. of $2x^3+3x^2y-y^3$ and $4x^3+xy^2-y^3$.

Or, (*d*) Simplify $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

2. *Either*, (*a*) Solve, by completing the square, the equation $15x^2-28=x$.

Or, (*b*) Find a value of x so that $16x^{\frac{4}{3}}-24x+25x^{\frac{2}{3}}-20x^{\frac{1}{3}}+20$, may be a perfect square.

(*c*) Plot the graphs on the same axes of (i) $y=3x+2$; (ii) $y+1=4x$; from $x=0$ to $x=4$ and find from the graphs the value of x and y where they intersect.

3. *Either*, (*a*) If $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$, show that

$$(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2.$$

Or, (*b*) A man and a boy can do in 15 days a piece of work which would be done in 2 days by 7 men and 9 boys. How long would it take one man or one boy to do it?

1932

1. *Either*, (*a*) Find the continued product of

$$x^2+x+1,\ x^2+x-1 \text{ and } x^4-2x^3+x^2+1.$$

(*b*) Find the H. C. F. of $10x^3+11x^2+9$ and $6x^3+5x^2+9$.

Or, (*c*) Simplify $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\times\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}\times\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}$.

(*d*) Find the L. C. M. of

$$x^2-4ax+4a^2,\ x(x-y)-2a(2a-y) \text{ and } x^2-y^2+4ay-4a^2.$$

2. *Either*, (*a*) Find the value of $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$, when $x=a+b-c$, $y=b+c-a$, $z=c+a-b$.

(*b*) If $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$, show that $\dfrac{2a^3-3c^3+4e^3}{2b^3-3d^3+4f^3}=\dfrac{a^2e}{b^2f}$.

Or, (*c*) Solve graphically the equations $3x+2y=5$ and $5x-2y=3$.

(*d*) Find a so that $4x^4+12x^3+25x^2+ax+16$ may be a perfect square.

3. *Either*, (*a*) Solve, without assuming any formula, the equation

$$\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5.$$

Or, (*b*) Five years hence father's age will be 3 times the son's age and 5 years ago father was 7 times as old as his son. Find their present ages.

1933

1. (*a*) Resolve into factors

(i) $(x^2-y^2)(a^2-b^2)+4xyab$; (ii) $xy-y^2+5y-3x-6$.

Or, (*b*) Find the H. C. F. of $4x^3-12x-8$ and $6x^3-24x^2+30x-12$.

(*c*) Simplify $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}$, when $ab+bc+ca=0$.

2. (*a*) Solve, by completing the square, the equation $5x^2-\frac{1}{3}x=3\frac{2}{3}-x$.

(*b*) Find a so that $\frac{4}{9}x^2-8\frac{x}{y}+\frac{4}{3}x+36y^{-2}-\frac{a}{y}+1$ may be a perfect square.

Or, (*c*) Show that $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$, when $a+b+c=0$.

3. (*a*) Draw, with the same axes, the graphs of

(i) $y=4x$; (ii) $2x+y=18$; and find from the graphs the point where they intersect.

Or, (*b*) A man rows 30 miles down a river in 6 hours and returns in 10 hours. Find the rate at which the man rows and also the rate at which the river flows.

1934

1. (*a*) Resolve into factors :

(i) x^4-32x^2+4 ; (ii) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

Or, (*b*) Find the G. C. M. of $8x^3-24x^2+16$ and $2x^4-50x^2+120x-72$.

(*c*) If $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$, prove that $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$.

Or, (*d*) Find the value of a so that

$$4x+8x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-1}+x^{-2}+a \text{ may be a perfect square.}$$

2. (*a*) Solve, by completing the square, the equation $12x^2+56x-255=0$.
(*b*) Using the same axes and unit, draw the graphs of

(1) $\frac{x-2}{2}$; (2) $\frac{4-5x}{5}$, between $x=+2$ and $x=-2$.

Hence, show how to solve the equation $\frac{x-2}{2}=\frac{4-5x}{5}$.

Or, (*c*) A traveller walks a certain distance. If he had gone 2 miles an hour faster, he would have taken 3 hours less time ; but if he had gone 1 mile an hour slower, he would have taken 3 hours longer. Find the distance.

3. (*a*) If $\frac{x}{q+r-p}=\frac{y}{r+p-q}=\frac{z}{p+q-r}$, find the value of

$$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z.$$

Or, (*b*) Simplify $\frac{bc}{(b-a)(c-a)}+\frac{ca}{(c-b)(a-b)}+\frac{ab}{(a-c)(b-c)}$.

1935

1. (*a*) Find the L. C. M. or G. C. M. of

$$16x^3+54\ ;\ 16x^4+36x^2+81 \text{ and } 8x^3-24x^2+36x-27.$$

Or, (*b*) If $2s=a+b+c$, prove that

$$(2as+bc)(2bs+ca)(2cs+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

(*c*) Simplify $\left(\dfrac{x^{a^2+b^2}}{x^{ab}}\right)^{a+b}\cdot\left(\dfrac{x^{b^2+c^2}}{x^{bc}}\right)^{b+c}\cdot\left(\dfrac{x^{c^2+a^2}}{x^{ca}}\right)^{c+a}.$

Or, (*d*) Find the value of $a^3+b^3+c^3-3abc$, when $a+b+c=9$ and $ab+bc+ca=26$.

2. (*a*) Solve, by completing the square, the equation $\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{6-x}=\dfrac{2(6+x)}{15}$,

(*b*) Draw, with the same axes, the graphs of

(1) $2x+3y=7$; (2) $x-2y=0$;

and find from the graphs the point where they intersect.

Or, (*c*) Solve the equation $x+a=y+b=z+c,\ ax+by+cz=2(ab+bc+ca)$.

3. (*a*) Find the square root of $x^{\frac{3}{2}}+9x^{-\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+12x^{-\frac{1}{4}}+4x^{\frac{3}{4}}+4$.

Or, (*b*) A number consists of two digits. The sum of the digits falls short of the number by 54 ; if the digits be reversed, the number exceeds the old number by 27 ; find the number.

1936

1. (*a*) Find the continued product of $a+b+c,\ b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$.

Or, (*b*) Factorize (i) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$; (ii) $x^3-y^3+3y^2-3y+1$.

2. (*a*) Find the H. C. F. of

$$3x^4-7x^3+13x^2-7x+6 \text{ and } 2x^4-7x^3+16x^2-17x+12.$$

Or, (*b*) Simplify $\dfrac{1}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\frac{b}{c}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}$,

3. (*a*) Solve the following equations :

(i) $\dfrac{5}{7}(2x-11)-\dfrac{3}{4}(x-5)=\dfrac{x}{3}-(10-x)$; (ii) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}+1=\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}=23$,

Or, (*b*) Extract the square root of $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{4x^2}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{2x}-\dfrac{3}{4}$.

4. (*a*) If $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$, prove that $\dfrac{a}{y+z-x}=\dfrac{b}{z+x-y}=\dfrac{c}{x+y-z}$,

(*b*) Without assuming any formula, solve the equation

$$x^2+105x+2000=0.$$

5. (a) The temperature of a room from 8 A.M. to 4 P.M. is given by the following table :

8 A.M.	9	10	11	12	1 P.M.	2	3	4
66°	68°	70°	72°	74°	76°	78°	80°	82°

Represent the above graphically and read off the temperature at 10-30 A.M.

Or, (b) The sum of the two digits of a number is 10 ; and if 36 be subtracted from the number, the digits are reversed. Find the number.

1937 (Supplementary)

1. (a) Multiply $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$ by $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}$.

Or, (b) Simplify $2-[2-\{1-(1-\overline{-1+a})\}]$.

2. (a) Find the greatest common measure of
$4x^2+10x-6$ and $8x^3+12x^2-128x+60$.

Or, (b) Find the value of $x^3+y^3+4(x-y)^2$, when $x+y=4$ and $xy=6$.

3. (a) If $a:b::c:d$, prove that $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

Or, (b) Find the square root of $x^4+2x+6x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{x}+9$.

4. (a) Solve the equations $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=1$; $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{19}{20}$.

Or, (b) Find the value of x in the following equation $\dfrac{8}{13}x+\dfrac{7}{13x}=\dfrac{5}{7}x$.

5. (a) Find the length of a pole in a tank one-third of which is in mud, and one-fifth in water and 14 ft. above the level of the water.

Or, (b) A man walks at the rate of 3 miles an hour. Construct the graph of his walking, and find from it the distance walked by him in 5 hours and 45 minutes.

1938 (Supplementary)

1. (a) Factorize : (i) x^4-2x^2+1 ; (ii) $ab(1+c^2)-c(a^2+b^2)$.

Or, (b) Find the L. C. M. of x^2+x-6, x^2+2x-3 and x^3-3x^2+2x.

2. (a) Simplify $\dfrac{1}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{1}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{1}{c^2-(a-b)^2}$.

Or, (b) If $bc+ca+ab=0$, prove that $\dfrac{1}{a^2-bc}+\dfrac{1}{b^2-ca}+\dfrac{1}{c^2-ab}=0$.

3. (a) Solve $10x^2-69x-45=0$.

Or, (b) If $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$, evaluate $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$.

4. (a) Simplify $\left\{\sqrt[3]{3}\times\dfrac{1}{\sqrt[6]{9}}\times\sqrt[9]{27^{-1}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$. *Or*, (b) Solve $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{y}{2}-\dfrac{x}{6}=5$.

5. (*a*) A father's age is three times that of his son, and in 10 years it will be twice as great. How old are they ?

Or, (*b*) If one cubit be equal to 1·5 feet, construct a conversion graph for cubits and feet. Read off from the graph the number of feet that are equivalent to $3\frac{3}{4}$ cubits.

1939

1. (*a*) Divide $a^3+8b^3-c^3+6abc$ by $a+2b-c$.

Or, (*b*) If $a+b+c=0$, prove that $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$.

2. (*a*) Find the L. C. M. of $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ and $6x^2+5x-6$.

Or, (*b*) Factorize : (i) x^4-23x^2+1. (ii) x^6-729y^6.

3. (*a*) Simplify $\dfrac{1}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\frac{b}{c}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}$.

Or, (*b*) If *a*, *b*, *c* are in continued proportion, prove that

$$a^2+ab : b^2=b^2+bc : c^2.$$

4. (*a*) Simplify $\left\{\sqrt[5]{4}\times\frac{1}{\sqrt[10]{8}}\times\sqrt[15]{2^{-1}}\right\}^{30}$. *Or*, (*b*) Solve $\dfrac{x-6}{x+2}+\dfrac{x-10}{x+6}+2=0$.

5. (*a*) Find the fraction which becomes $\frac{1}{2}$ when 1 is added to its denominator and $\frac{1}{3}$ when 2 is subtracted from its numerator.

Or, (*b*) Solve the following equations graphically $3x=17-2y$, $3y=2x+6$.

1939 (Supplementary)

1. (*a*) Find the continued product of p^2-pq+q^2, p^2+pq+q^2 and $p^4-p^2q^2+q^4$. *Or*, (*b*) If $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$, prove that

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$$

2. (*a*) Find the H. C. F. of $x^4-3x^3-2x^2+12x-8$ and x^3-7x+6.

Or, (*b*) Factorize : (i) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$; (ii) $x^2+2xy-a^2-2ay$.

3. (*a*) Simplify $\dfrac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{ca}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\dfrac{ab}{c(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$.

Or, (*b*) Extract the square root of $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{x}{y}-6\dfrac{y}{x}+7$.

4. (*a*) Solve $6x^2-91x+323=0$. *Or*, (*b*) Simplify $\dfrac{(x^{a+b})^2(x^{b+c})^2(x^{c+a})^2}{(x^a.x^b.x^c)^4}$.

5. (*a*) One-half of a certain integer exceeds one-third of the next greater integer by two. Find the integer.

Or, (*b*) Solve the following equations graphically $3x+4y=25$, $4x-3y=0$.

नेटवर्क का...

अब भारत के 25 शह...

ईज़ीकॉल पेजिंग. ऐसी

अनोखी पेजिंग सर्विस, जहां

आप अपने सम्पर्क करने वालों

से अपनी पसंद के अभिवादन

के साथ उनका संदेश ले

सकेंगे..

हमने इसे नाम...

पर्सनल...

...के निर्णय की

...समय

...त कार्यालय पत्रांक

...र्भ।

...1642/सी-11

...सी-

...ure tube



लिए बांध में कुछ खम्भा को लगाना पड़ेगा जिसमें दो दिन का समय लगेगा। परगनाधिकारी ने जामकर्ताओं के बीच आकर उपरोक्त वार्ता का उल्लेख करते हुए जामकर्ताओं को आश्वासन दिया कि तीन दिन के भीतर विद्युत आपूर्ति सुनिश्चित करने का विभाग ने वादा किया है। परगनाधिकारी के आश्वासन पर रात आठ बजे जामकर्ताओं ने जाम समाप्त किया।

फिलहाल चुनार नगर की जनता ने फौरी आश्वासन पर अपना चक्का जाम समाप्त कर लिया, परन्तु यदि शीघ्र विद्युत आपूर्ति की व्यवस्था न की गयी तो किसी भी समय गंभीर रूप धारण कर सकता है जनता का आक्रोश। विद्युत आपूर्ति सुनिश्चित किये जाने के लिये शिवसेना एवं नवयुवक अधिवक्ता संघ ने भी परगनाधिकारी को अलग अलग पत्रक दिये हैं।

क्षेत्र अन्तर्गत फुल्लनपुर मुहल्ले में यादवों के दो पक्ष में मारपीट होने से एक पक्ष के तीन व्यक्ति घायल हो गये। घायलों को उपचार हेतु जिला अस्पताल में भर्ती किया गया है।

चलती ट्रेन से महिला के कान के झुमके छीने

दिलदारनगर (गाजीपुर) (नि.प्र.)। गत दिवस कुछमन रलवे स्टेशन से जब ५० डाउन अमृतसर-हावड़ा एक्सप्रेस ट्रेन खुली -'थ्री टायर' की खिड़की के पास बैठी एक महिला के कान में पहनी सोने के झुमके को खींचकर एक व्यक्ति भागने में सफल हो गया। उक्त चलती ट्रेन में महिला रोती चिल्लाती,कान खून से लथपथ हो गयी। उक्त ट्रेन लगभग ३ घंटे देरी से चल रही थी।

स्मरण रहे कि इस प्रकार की घटनाओं को रोकने में रलवे पुलिस असमर्थ है।

योजना के प्रारूप के लिए समिति

)। उत्तर प्रदेश के मुख्य ...य की नौवीं पंचवर्षीय ...रूप तैयार करने के संबंध ...में एकरूपता लाने के लिए ... के आदेश दिये हैं। ...भी नौ जिलों के सर्वांगीण ...खते हुए अतिरिक्त मुख्य ...त्तराखंड की अध्यक्षता में ...का गठन करने को कहा है। ...क नौवीं पंचवर्षीय योजना तैयार कर लिया जाना

समिति के सदस्य होंगे।

श्री प्रसाद ... कि गत पंचवर्षीय योजनाओं की भांति ... योजना के कुछ प्रमुख कार्यक्रमों ... तैयार करने के लिए १८ कार्यकारी दलों के गठन का प्रस्ताव है। कार्यकारी दलों की अध्यक्षता संबंधित सचिव करेंगे। इन कार्यकारी दलों में जहां एक ओर संबंधित विभागों के प्रतिनिधियों को सम्मिलित किया जायेगा, वहीं दूसरी ओर कार्यकारी दलों के अध्यक्षों को यह अधिकार होगा कि वे आवश्यकतानुसार विषय के विशेषज्ञों को भी सम्मिलित कर सकते हैं।

मुख्य सचिव ने कहा कि संविधान के ७३वें व ...

राज का स्थान, नयी आर्थिक नीति का गरीबों पर प्रभाव, भूमि तथा जल प्रबंधन तथा नदी योजना के संसाधन गठित की जायेगी।

श्री प्रसाद ने कहा कि नदी तथा नौवीं योजना के ससाधन गठित की जायेगी। श्री प्रसाद ने कहा कि नौवीं पंचवर्षीय योजना में कृषि उत्पादन में वृद्धि, वाह्य सहायतित योजनाओं को अधिकाधिक प्रोत्साहन तथा अवस्थापना सुविधाओं के विस्तार, गरीबी उन्मूलन तथा रोजगार परक कार्यक्रमों को विशेष रूप से लिया जायेगा।

बैठक में बताया गया कि कार्यकारी दलों तथा उप समितियों के गठन के संबंध में सभी संबंधित

